



Universidad
Nacional
de Loja

Universidad Nacional de Loja

Facultad de la Educación, el Arte y la Comunicación

Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales:

Matemáticas y la Física

Uso de la Inteligencia Artificial en la enseñanza de Matemática en el nivel de educación secundaria

Trabajo de Integración Curricular,
previo a la obtención del título de
Licenciado en Pedagogía de las
Matemáticas y la Física.

AUTOR:

Pablo Fernando González Jiménez

DIRECTOR:

Lic. Fabricio Vladimir Vines Vines Mg. Sc.

Loja – Ecuador

2024

Certificación

Loja, 10 de agosto del 2023

Lic. Fabricio Vladimir Vinces Vinces Mg. Sc.

DIRECTOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR

CERTIFICO:

Que he revisado y orientado todo proceso de la elaboración del Trabajo de Integración Curricular denominado: **Uso de la Inteligencia Artificial en la enseñanza de Matemática en el nivel de educación secundaria**, previo a la obtención del título de **Licenciado en Pedagogía de las Matemáticas y la Física.**, de la autoría del estudiante **Pablo Fernando González Jiménez**, con **cédula de identidad Nro. 1150072229**, una vez que el trabajo cumple con todos los requisitos exigidos por la Universidad Nacional de Loja para el efecto, autorizo la presentación para la respectiva sustentación y defensa.

Lic. Fabricio Vladimir Vinces Vinces Mg. Sc.

DIRECTOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR

Autoría

Yo, **Pablo Fernando González Jiménez**, declaro ser autor del presente Trabajo de Integración Curricular y eximo expresamente a la Universidad Nacional de Loja y a sus representantes jurídicos de posibles reclamos o acciones legales, por el contenido del mismo. Adicionalmente acepto y autorizo a la Universidad Nacional de Loja, la publicación de mi Trabajo de Integración Curricular en el Repositorio Digital Institucional - Biblioteca Virtual.

Firma:



Cédula de identidad: 1150072229

Fecha: Loja, 8 de marzo de 2024

Correo electrónico: pablo.f.gonzalez@unl.edu.ec

Teléfono: +593 939331758

Carta de autorización por parte del autor para consulta, reproducción parcial o total y/o publicación electrónica del texto completo, del Trabajo de Integración Curricular.

Yo, **Pablo Fernando González Jiménez**, declaro ser autor del Trabajo de Integración Curricular, denominado: **Uso de la Inteligencia Artificial en la enseñanza de Matemática en el nivel de educación secundaria**, como requisito para optar el título de **Licenciado en Pedagogía de las Matemáticas y la Física**, autorizo al Sistema Bibliotecario de la Universidad Nacional de Loja, para que, con fines académicos, muestre la producción intelectual de la Universidad, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera en el Repositorio Institucional.

Los usuarios pueden consultar el contenido de este trabajo en el Repositorio Institucional, en las redes de información del país y del exterior con las cuales tenga convenio la Universidad.

La Universidad Nacional de Loja, no se responsabiliza por el plagio o copia del Trabajo de Integración Curricular que realice un tercero.

Para constancia de esta autorización, en la ciudad de Loja, a los ocho días del mes de marzo de dos mil veinticuatro.

Firma:



Autor: Pablo Fernando González Jiménez

Cédula: 1150072229

Dirección: Loja, Av. Eloy Alfaro y Milton Jácome.

Correo electrónico: pablo.f.gonzalez@unl.edu.ec

Teléfono: +593 939331758

DATOS COMPLEMENTARIOS:

Director del Trabajo de Integración Curricular:

Lic. Fabricio Vladimir Vines Vines Mg. Sc.

Dedicatoria

A mi madre María Verónica Jiménez Gaona, seres queridos y amigos por su amor y apoyo incondicional, han sido una pieza fundamental durante todo el recorrido en este camino. Gracias por estar siempre a mi lado, apoyándome e inspirándome a perseguir mis sueños y metas, este trabajo es un tributo a su amor, amistad y paciencia.

Pablo Fernando González Jiménez

Agradecimiento

Agradezco a mi madre María Verónica Jiménez Gaona por su apoyo incondicional, cada paso en este trabajo ha sido impulsado por su confianza en mí, y a mis queridos amigos que fueron como mi segunda familia, gracias por estar siempre ahí, animándome en los momentos difíciles y compartiendo este viaje inolvidable. De corazón, gracias por ser la razón detrás de cada sonrisa en mi vida.

De igual forma, expreso mi sincero agradecimiento al director de tesis Fabricio Vladimir Vines por su valiosa orientación y apoyo constante a lo largo de este trabajo de investigación, su guía ha sido fundamental para el desarrollo de este proyecto y mi crecimiento profesional.

Por último, agradezco a mis compañeros de la universidad, que forman parte de la carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física, su colaboración y compañerismo a lo largo de este proceso ha enriquecido mi experiencia y contribuido a la concreción de este trabajo.

Pablo Fernando González Jiménez

Índice de contenidos

Portada	i
Certificación	ii
Autoría	iii
Carta de autorización	iv
Dedicatoria	v
Agradecimiento	vi
Índice de contenidos	vii
Índice de tablas	viii
Índice de figuras	viii
Índice de anexos	viii
1. Título	1
2. Resumen	2
Abstract.....	3
3. Introducción	4
4. Marco Teórico	6
4.1. Inteligencia Artificial.....	6
4.2. Enseñanza de la Matemática.....	16
5. Metodología	29
6. Resultados	31
7. Discusión	36
8. Conclusiones	38
9. Recomendaciones	39
10. Bibliografía	40
11. Anexos	47

Índice de tablas:

Tabla 1. La inteligencia artificial de 2019 a 2023	8
Tabla 2. Aplicaciones de la IA en la educación	12
Tabla 3. Principios éticos en la IA y métodos de implementación	15
Tabla 4. Aportes de autores destacados al campo de la didáctica de la Matemática	20
Tabla 5. Aplicaciones de la IA en la enseñanza de Matemática	23
Tabla 6. Ventajas y desventajas de la implementación de IA en Matemática	25
Tabla 7. Aspectos para implementar la IA en la enseñanza de Matemática	32

Índice de figuras:

Figura 1. Historia de la inteligencia artificial.....	7
Figura 3. Uso de los diferentes tipos de IA en la enseñanza de Matemática en secundaria ..	31
Figura 4. Fases de los procesos metodológicos donde se aplica la IA.....	34

Índice de anexos:

Anexo 1. Guía Didáctica.....	47
Anexo 2. Bitácora de búsqueda.....	112
Anexo 3. Informe de pertinencia.....	117
Anexo 4. Oficio de designación del director de TIC	118
Anexo 5. Certificación de traducción del resumen	119

1. Título

Uso de la Inteligencia Artificial en la enseñanza de Matemática en el nivel de educación
secundaria

2. Resumen

La inteligencia artificial tiene el potencial para convertirse en una herramienta valiosa para enseñar. La presente investigación tiene como objetivo analizar el uso de inteligencia artificial en la enseñanza de Matemática en el nivel de educación secundaria. Para llevar a cabo el trabajo se realizó un estudio documental sistemático de alcance exploratorio-descriptivo, sobre el que se fundamentaron teóricamente los objetos de investigación, además, se examinó la información de 48 textos donde se evaluó la aplicación de sistemas inteligentes para enseñar la asignatura mencionada. Los resultados mostraron que las IA más empleadas en educación son los tutores inteligentes, también revelaron que el principal aspecto a considerar para implementar estos sistemas son los recursos técnicos y tecnológicos, y que la inserción de la IA en la educación no sigue un proceso metodológico único, sin embargo, se acopla a distintas fases de estos. Finalmente se concluyó que los sistemas inteligentes mejoran la eficiencia del aprendizaje brindando opciones para automatizar y personalizar la enseñanza.

Palabras clave: inteligencia artificial, enseñar Matemática, educación secundaria, guía didáctica.

Abstract

Artificial intelligence has the potential to become a valuable tool for teaching. The present research aims to analyze the use of artificial intelligence in the teaching of Mathematics at the secondary school level. In order to carry out this work, a systematic documentary study was conducted with an exploratory-descriptive scope, on which was theoretically based the research objects. In addition, the information from 48 literary sources where the application of intelligent systems to teach the mentioned subject was evaluated. The results showed that the most used AI in education is intelligent tutors; they also revealed that the main aspect to consider for the implementation of these systems is technical and technological resources and that the insertion of AI in education does not follow a single methodological process, but it is coupled to different phases of these. Finally, it was concluded that intelligent systems improve learning efficiency by providing options to automate and personalize teaching.

Keywords: Artificial Intelligence, Mathematics teaching, Secondary education, Didactic guide.

3. Introducción

La tecnología revoluciona la forma en que percibimos el mundo, con sus avances impulsa el desarrollo de la sociedad brindando herramientas útiles sobre las cuales progresar. Los sistemas educativos se enfrentan a la exigencia de adaptarse a las demandas de la sociedad tecnológica actual, por ello resulta esencial que la educación deba garantizar la calidad de formación de los estudiantes mediante la incorporación de nuevas tecnologías, la enseñanza de Matemática en el nivel de educación secundaria es crucial en la formación, y la integración de herramientas digitales puede convertirse en un valioso instrumento para mejorar la instrucción.

La Inteligencia Artificial es una tecnología con gran potencial para ayudar en actividades humanas, una de las áreas más prometedoras donde se la ha aplicado es la educación, aquí ha sido implementada mediante diversos software que la incluyen para brindar una atención automatizada, personalizada y más cercana a los estudiantes (Pedró et al., 2019). Recientemente, varios de los aplicativos que contienen IA han sido lanzados al mercado, de entre ellos llaman la atención los enfocados a contribuir en la enseñanza de Matemática debido a las opciones que ofrecen para mejorar la calidad y eficiencia de la enseñanza.

En los últimos años diversos estudios han explorado el potencial de la IA en la educación, identificando áreas específicas donde su aplicación pueda tener un impacto positivo, investigaciones previas han hecho hincapié en cómo se llevan estos aplicativos en general sin ahondar en la enseñanza de la Matemática en específico (Calabuig, et al., 2021; Moreno, 2019; Rodríguez, 2021), hecho que le confiere interés al tema debido a que los sistemas inteligentes se fundamentan en esta materia y son una herramienta prometedora para brindar una educación personalizada dando alternativas para el aprendizaje de los estudiantes y pretendiendo mejorar sus resultados académicos.

La aplicación de estos recursos tecnológicos en Ecuador es un panorama nuevo, y es que el gobierno apenas empieza con el análisis de las políticas de su posible aplicación, un pequeño diagnóstico de la situación del país es el realizado por Morales (2023) donde menciona que las herramientas dinámicas e inteligentes no se aplican en el país por falta de conocimiento y capacitación docente, haciendo énfasis al escaso uso en el área de Matemática, denotando efectos limitantes en cuando al aprendizaje de los estudiantes para obtener conocimientos de forma innovadora.

Es así que el principal reto que afronta la inteligencia artificial en relación a la enseñanza en la actualidad es su correcta adaptación, Orellana et al. (2021) en su estudio describen como la inclusión de la IA en la enseñanza se convierte en una necesidad en la cual se debe trabajar rediseñando los planes de estudio de Matemática desde la educación

secundaria, por cuanto esta área constituye uno de los campos de afinidad de la IA. Esta situación abre un abanico de oportunidades para enriquecer los procesos educativos y mejorar el aprendizaje, sin embargo, para aprovechar plenamente el potencial de esta tecnología se requiere una cuidadosa planeación y una estratégica implementación.

Sobre la base de los antecedentes expuestos se ha planteado como objetivo general analizar el uso de la inteligencia artificial en la enseñanza de Matemática en el nivel de educación secundaria, del cual se derivan los siguientes objetivos específicos: indagar los aspectos que se deben tener en cuenta para implementar la inteligencia artificial en la enseñanza de la Matemática, identificar los procesos metodológicos que guían la inserción de la inteligencia artificial en la enseñanza de Matemática en la educación secundaria y elaborar una guía didáctica sobre la implementación de inteligencia artificial en la enseñanza de Matemática en el nivel de educación secundaria.

El aporte del proyecto al avance del conocimiento radica en mostrar los aspectos de la implementación de la IA en el proceso de enseñanza de Matemática mediante una revisión documental sistemática acerca de cómo se las está acoplando a la educación. Por otro lado, el desarrollo de la investigación presenta algunas limitaciones por la cantidad de información y documentos revisados, debido a que existen trabajos a los que se tuvo un acceso limitado (resumen) porque se alojaban en sitios de entrada suscrita.

El trabajo será de utilidad para los docentes que enseñan Matemática en el nivel secundario proporcionando información valiosa sobre cómo pueden utilizar la IA para aplicarla en el aprendizaje de sus estudiantes, también es de interés para los responsables de la planificación educativa, ya que, les permitirá conocer las posibilidades y recursos que ofrece esta tecnología. En consecuencia, los beneficiarios directos de esta investigación serán los miembros de la comunidad educativa.

El presente documento se desarrolla de acuerdo a los lineamientos y estructura establecida en el Reglamento de Régimen Académico de la Universidad Nacional de Loja (2021), donde se incluyen los siguientes elementos: título; resumen; introducción; marco teórico, fundamenta las categorías conceptuales de inteligencia artificial y enseñanza de la Matemática; metodología, detalla los procedimientos, métodos, técnicas e instrumentos empleados para la investigación; resultados, extraídos de la revisión documental sistemática; discusión, aborda e interpreta los datos relevantes obtenidos; conclusiones, realizadas acorde a los objetivos planteados; recomendaciones; bibliografía, lista los documentos utilizados como referencia en la elaboración del trabajo; y, anexos, incluye una guía didáctica orientada al uso de una IA para enseñar Matemática y documentos habilitantes.

4. Marco Teórico

4.1. Inteligencia Artificial

La Inteligencia Artificial (IA) es un campo de estudio multidisciplinario que busca desarrollar sistemas con la capacidad de ejecutar tareas que comúnmente requieren de inteligencia racional para llevarse a cabo, Luz y Malbernat (2021) dicen que “es un campo de las ciencias de la computación que investiga y desarrolla sistemas capaces de realizar tareas inteligentes, es decir, aquellas que se suelen atribuir a la inteligencia cognitiva de los seres humanos” (p. 156), estas cualidades le permiten a los sistemas inteligentes adecuarse a distintos ámbitos y realizar tareas complejas de forma eficiente.

La forma con la cual funciona la IA se basa en algoritmos y modelos matemáticos entrenados con enormes cantidades de datos, con esta información se realizan diferentes configuraciones y se determinan distintas posibilidades, esto confiere a los sistemas inteligentes las capacidades de aprender, adaptarse y razonar de manera autónoma, Rouhiainen (2018) menciona que “a diferencia de las personas, los aplicativos desarrollados con IA no necesitan descansar y pueden analizar grandes volúmenes de información a la vez” (p.17), estas características les permite adaptarse a un sinnúmero de escenarios y evolucionar en función al propósito e información con el que haya sido entrenada.

El papel de la IA en la sociedad se vuelve cada más notorio, su implementación se ha extendido a diversos campos presentando un crecimiento exponencial en tipos y aplicaciones, actualmente los sistemas inteligentes experimentan su pico máximo de uso, principalmente en actividades relacionadas a la automatización de procesos, también presenta varias funciones que ayudan a actividades cotidianas como aplicativos dirigidos al diseño, creación de contenido multimedia, redacción de textos o software orientado a educar, estos contextos la convierten en un complemento esencial para la mejora de la productividad en diversos sectores.

Historia de la IA

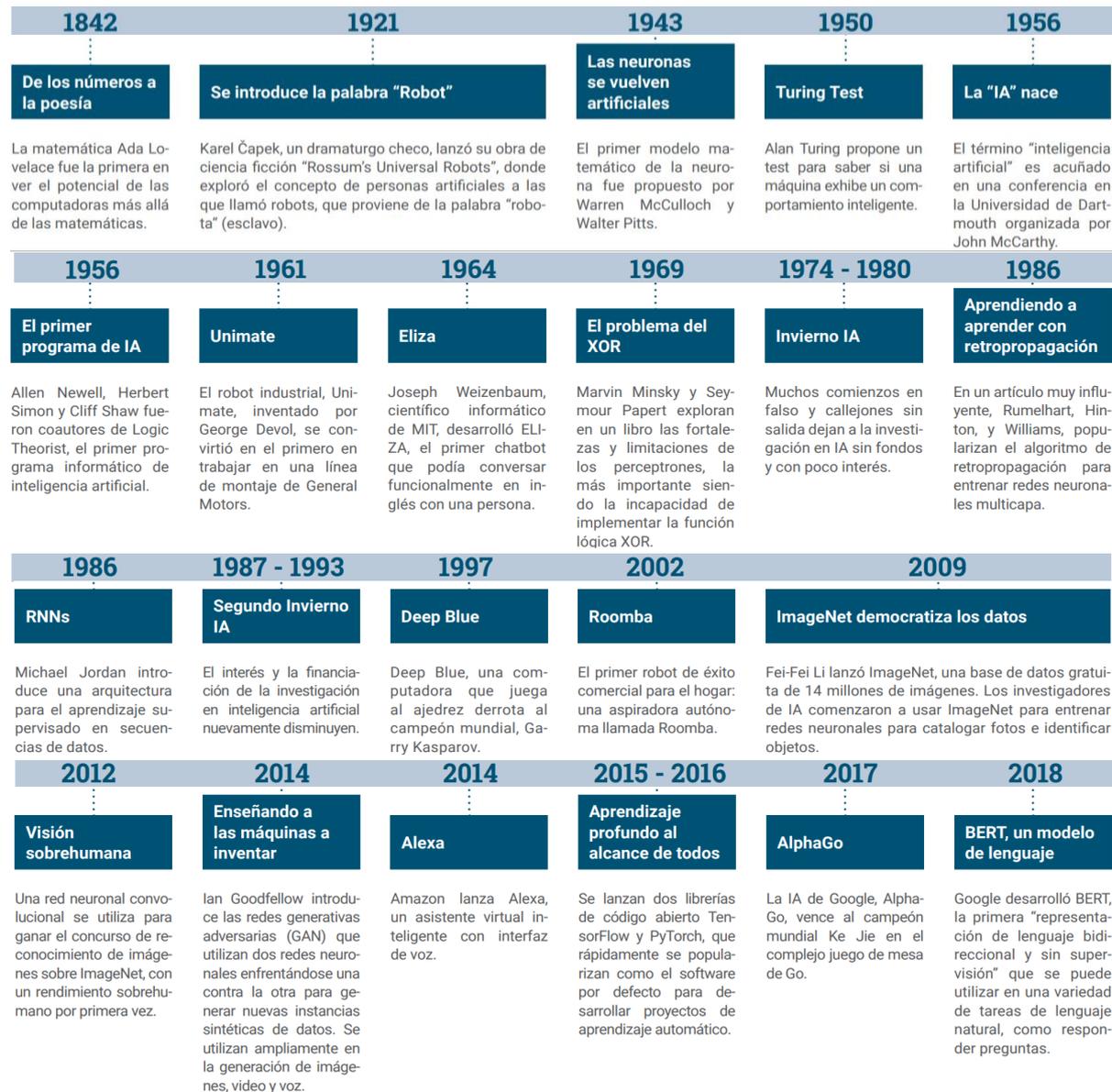
Cuando se habla de Inteligencia Artificial parece un tema relativamente nuevo, sin embargo, su inicio se remonta a mediados del siglo XX cuando los científicos empiezan a explorar cómo replicar la inteligencia humana utilizando máquinas, desde ahí el término ha evolucionado iniciando con las simulaciones de neuronas hasta convertirse en complejos sistemas capaces de aprender y adaptarse a situaciones que se conocen hoy en día.

Uno de los pioneros de este campo fue Alan Turing, según Londoño (2016) este propuso el famoso Test de Turing como un estándar para evaluar si una máquina es capaz de mostrar un comportamiento inteligente similar al de una persona, otro pionero destacado es John McCarthy, este acuñó el término "Inteligencia Artificial" en 1956 y es considerado uno

de los fundadores de la disciplina. Asimismo, en el paso del tiempo varios autores a través de sus contribuciones sentaron las bases para los futuros avances tecnológicos. La Figura 1 resume la historia de la IA.

Figura 1

Historia de la inteligencia artificial



Nota. Figura extraída de Abeliuk y Gutiérrez (2021). Historia y evolución de la inteligencia artificial.

Actualmente la IA ha adquirido un papel destacado, principalmente impulsado por el surgimiento de aplicaciones como chatbots y deepfakes, situación que influyó de gran forma a la comunidad tecnológica generando una ola de aparición de nuevo software que integra o se centra en la IA dirigidos a diversos campos. En la Tabla 1 se retoma lo más destacado de los últimos años:

Tabla 1*La inteligencia artificial de 2019 a 2023*

Evolución de la IA en los últimos años		
Año	Avance	Descripción
2019	Aprendizaje profundo y ética	Se destacaron las aplicaciones en salud y se generaron debates sobre la ética y los impactos sociales y laborales que puede generar la IA. Surgieron varios avances en el aprendizaje profundo, modelos de lenguaje y el reconocimiento visual.
2020	AlphaFold	En noviembre de 2020 la IA resuelve un problema científico después de medio siglo con la aparición de AlphaFold que conseguía resolver virtualmente la estructura tridimensional de cualquier proteína.
2021	Metaverso	En este año se presenta el Metaverso por parte de Facebook, esta es una plataforma virtual donde los usuarios interactúan mediante cascos de realidad virtual para acceder a cualquier escenario desde la comodidad de sus hogares.
2022	ChatGPT	La compañía OpenAI lanza al mercado "ChatGPT", un modelo de lenguaje avanzado, que se destaca por la interacción entre IA y humanos. Este sistema inteligente genera una gran controversia sobre el uso y ética de las IA.
2023	GAN y Deepfakes	La IA se vuelve cada vez más visible, los chatbots junto con las Redes Generativas Antagónicas dedicadas a la creación artística, y las aplicaciones de diseño de deepfakes, se hacen bastante populares en lo que va del 2023.

Nota. Tabla realizada sobre la base de los trabajos de Vivas (2022) y Yanes (2023).

En los últimos años, el surgimiento del aprendizaje automático junto con el procesamiento del lenguaje natural revoluciona el campo y las formas de uso de la inteligencia artificial, esto junto a los avances en la creación de redes neuronales artificiales más complejas han dado lugar a sistemas sofisticados con una increíble capacidad para identificar patrones y tomar decisiones, planteando nuevas oportunidades en el diseño de distintas IA.

Tipos de Inteligencia Artificial

Es posible distinguir y categorizar los sistemas inteligentes en función de las tareas o actividades que desempeñan, clasificándolas por la capacidad de procesamiento de datos, encontramos las máquinas reactivas, máquinas de memoria limitada, teoría de la mente, autoconsciencia, Inteligencia Artificial Estrecha (ANI), la Inteligencia Artificial General (AGI) y la Inteligencia Artificial Super (ASI), cada una caracterizada por niveles crecientes de complejidad y capacidad de adaptación. A continuación Sharma y Garg (2022) definen las categorías de inteligencia artificial mencionadas:

Máquinas reactivas (Reactive machines): poseen una capacidad limitada para simular la inteligencia humana, no trabajan funciones basadas en memoria, por ello son incapaces de corregir sus acciones basándose en sus experiencias pasadas (aprender), estudian el entorno y seleccionan la mejor solución entre las posibles.

Memoria limitada (Limited memory): tienen una capacidad muy limitada para aplicar experiencias pasadas a nuevas decisiones, retienen datos durante poco tiempo, pueden recordar y utilizar información previa para tomar decisiones. A este grupo pertenecen los chatbots, los asistentes virtuales, las IA de vehículos auto-conducidos, entre otros.

Teoría de la mente (Theory of mind): sistemas con inteligencia social necesaria para comprender las emociones, este tipo de IA autoconsciente se está desarrollando como concepto, y aún está en curso, su objetivo principal es simular emociones y creencias humanas que puedan influir en decisiones futuras.

Autoconsciencia (Self-aware): capacidad de un sistema para tener conocimiento y comprensión de sí mismo, posee conciencia y reacciones similares a las humanas, al entender su propio estado, utiliza esa información para inferir emociones, aún está en desarrollo.

Artificial Narrow Intelligence (ANI): fue diseñada y entrenada para realizar un solo tipo de trabajo concreto, cualquier IA que utilice Machine Learning (ML) y Deep Learning (DL) para enseñarse a sí misma entra en este grupo, algunos ejemplos son los robots industriales y los asistentes personales virtuales.

Artificial General Intelligence (AGI): pueden replicar las capacidades cognitivas del cerebro humano, realizar diversas tareas, así como aprender y mejorarse a sí misma. Es un sistema autodidacta que puede superar a los humanos en un gran número de disciplinas. Proporciona la capacidad de comprender, aprender y funcionar igual que los seres humanos.

Artificial Super Intelligence (ASI): futura área de investigación de la IA, esta no sólo reproducirá la inteligencia de los humanos, sino que también tendrá un almacenamiento mucho mayor, un análisis de datos más rápido y un mejor poder de decisión. Se espera que las capacidades de las ASI superen a las de los humanos.

La IA demuestra su versatilidad a través de una amplia gama de enfoques, estos han arrojado resultados prometedores en diversos ámbitos, sus capacidades han impulsado avances significativos en diversos campos como la agricultura, medicina, industrias, educación y otros sectores estratégicos, esto se debe en gran parte a la forma para abordar desafíos y ofrecer resultados competentes, cualidades que la convierten en una herramienta útil en la búsqueda de soluciones efectivas.

Las IA aplicadas en diferentes ámbitos reciben otra clasificación, esta es comúnmente asociada a la utilidad a la cual están dirigidas, Kuz et al. (2016) menciona a los chatbots que simulan conversaciones humanas y brindan respuestas automáticas, a los tutores inteligentes que ofrecen instrucción personalizada y adaptativa en áreas específicas de aprendizaje, a los sistemas de recomendación empleados para sugerir productos y contenido en plataformas de

compra y redes sociales, a los asistentes virtuales como Siri o Alexa que proporcionan asistencia y realizar tareas basadas en comandos de voz, a las IA de análisis de datos y predicción, la visión por computadora y el procesamiento de lenguaje natural (NLP), que permite la comprensión y generación de lenguaje humano.

Los sistemas de tutoría brindan una educación más individualizada para los estudiantes presentado contenidos acordes a diagnósticos, Rodríguez (2021) dice que “son sistemas diseñados para replicar la efectividad de la tutoría humana en herramientas digitales, ayudan a los estudiantes a comprender las características de los lenguajes de programación específicos y desarrollan sus habilidades generales de resolución de problemas” (p. 2), estas características le confieren cualidades útiles para fortalecer el aprendizaje dentro y fuera del aula.

Un sistema de tutoría inteligente ampliamente utilizado es Assessment and Learning Knowledge Spaces (ALEKS), que según Marín y Fernández (2020) funciona mediante inteligencia artificial evaluando el conocimiento de los estudiantes y así elige los temas adecuados para su nivel de conocimiento, tiene soporte para una gran cantidad de contenidos y opera mediante herramientas de evaluación y aprendizaje personalizado. Es adaptable a amplios entornos educativos y puede ser manejado como complemento o fuente principal de formación.

Su plataforma incluye diversas opciones de personalización en cuanto a contenidos de Matemática, siendo un buen complemento para ayudar a los estudiantes que se encuentran en el nivel secundario, presenta gráficos estadísticos y se puede realizar seguimientos a las calificaciones que obtienen los estudiantes, en la plataforma de igual manera, se puede asignar distintas actividades, tareas y evaluaciones estableciendo varios parámetros en cuanto a su entrega, además de opciones para la administración de clases, informes y análisis de temas.

Áreas de Aplicación de la IA

Las áreas de aplicación de la IA son numerosas y se extienden a través de una amplia gama de industrias y campos de estudio, están diseñadas para cumplir con más de un rol y se desarrollan con distintos propósitos, sus capacidades le atribuyen una versatilidad inmensa. Una de las aplicaciones más comunes es en el marketing donde se utiliza para personalizar la publicidad, identificar patrones de compra y predecir tendencias en el mercado, cuestiones que resultan muy útiles para mejorar e impulsar la comercialización de servicios o productos.

La inteligencia artificial desempeña un papel fundamental en la industria manufacturera, especialmente en el marco de la Industria 4.0 referente a la integración de tecnologías digitales en los procesos industriales, para Zeba et al. (2021) la aplicación de la IA en este campo tiene como objetivo mejorar la eficiencia de los procesos productivos al

optimizar la fabricación y detectar posibles fallas en la maquinaria, estas acciones preventivas no solo evitan pérdidas económicas sino que también elevan la calidad de los productos finales.

Examinando su influencia en la salud Martínez et al. (2019) mencionan que la IA plantea el desarrollo de nuevas herramientas informáticas para ayudar en el diagnóstico, tratamiento de enfermedades y descubrimiento de nuevos fármacos, además, puede ser utilizada en la gestión de datos médicos y la personalización de la atención sanitaria lo que brinda la posibilidad de ofrecer un cuidado personalizado y eficiente a cada individuo.

En el sector de servicios financieros, Tadapaneni (2019) señala que la IA mejora el reconocimiento de patrones adaptativos utilizando métodos estadísticos modernos en grandes volúmenes de datos, se usa para detectar fraudes y evaluar riesgos, lo que ayuda a las empresas a tomar decisiones más instruidas sobre inversiones y a prevenir posibles pérdidas financieras, también puede ser usada para analizar los mercados financieros y predecir tendencias.

Por parte del sector educativo, los sistemas inteligentes son empleados mediante aplicativos orientados a mejorar las prácticas educativas, ayuda en el diagnóstico del rendimiento de los alumnos, personalizar el aprendizaje según las necesidades que presente cada estudiante, mejorar la gestión y comunicación de los centros educativos, en un contexto más específico Peñaherrera et al. (2022) mencionan la relación entre la IA y la educación:

Hay muchas más aplicaciones de IA para la enseñanza en el desarrollo, incluida la tutoría para estudiantes, la construcción de contenido inteligente y nuevos procedimientos de desarrollo personal para educadores por medio de conferencias virtuales globales. Además, las aplicaciones fundamentadas en IA tienen la posibilidad de examinar una enorme proporción de información, ofreciendo a los usuarios materiales de aprendizaje cada vez más personalizados. (p. 405)

Las implicaciones de los sistemas inteligentes en la enseñanza de Matemática presentan un conjunto de beneficios como la mejora respecto a la atención en la educación y desafíos como las malas prácticas que se hacen mediante las herramientas. A pesar de esto, la IA ha demostrado su capacidad para transformar la educación de varias formas, ofreciendo una variedad de complementos bastante útiles y presentando modelos de educación adaptados a las distintas necesidades de los consumidores.

Inteligencia Artificial y Educación

Estos dos campos tienen el potencial para convivir juntos, los beneficios que ofrecen los sistemas inteligentes para complementar la enseñanza hace que esta relación sea un tema de interés, Moreno (2019) menciona que la IA tiene como objetivo principal el desarrollo de programas que permitan la creación de entornos de aprendizaje personalizados y adaptables,

esto implica la búsqueda de estrategias específicas para la adquisición de conocimientos por parte de los estudiantes y el suministro de información necesaria para que la IA pueda generar estrategias eficaces.

La IA es una tecnología que está transformando el mundo en una variedad de campos y la educación es una de las ramas donde presenta más posibilidades, las aplicaciones que se han desarrollado en esta área cada vez se perfeccionan, buscando mejorar la calidad del aprendizaje y reducir costos en administración. En la Tabla 2 se detalla los usos más comunes.

Tabla 2

Aplicaciones de la IA en la educación

Aplicación	Descripción	Ejemplos
Estimular el aprendizaje personalizado	Las instituciones educativas pueden utilizar la información recopilada de los estudiantes en los sistemas inteligentes para ofrecer enseñanza personalizada.	Moodle, utiliza algoritmos de IA para adaptar el contenido y la secuencia de actividades según las necesidades y el progreso de cada estudiante.
Facilitar la docencia	Facilita las tareas repetitivas, como la calificación y revisión de trabajos, una de las ventajas de incorporar la IA en la educación es la posibilidad de desarrollar algoritmos que puedan evaluar dichos documentos.	IBM Watson Teacher Advisor, proporciona recomendaciones y recursos educativos personalizados para apoyar la planificación y evaluación.
Monitorear el rendimiento de los estudiantes	Los patrones de rendimiento pueden ser detectados con algoritmos, lo que permite procesar datos y obtener información importante para establecer tendencias sobre el desempeño de los estudiantes.	Brightspace Insights, utiliza IA para recopilar, analizar y presentar información sobre el rendimiento y el progreso de los estudiantes.
Simplificar la administración educativa	Las tareas administrativas implican el uso de recursos, algunas de estas pueden ser asignadas a la IA como la coordinación, la asistencia en el diseño de programas, la atención de consultas administrativas y la generación de horarios.	PowerSchool, que automatiza tareas administrativas como la gestión de registros académicos, programación de clases, seguimiento de asistencia y comunicación con padres y estudiantes.
Creación de tutores virtuales	Las instituciones educativas pueden adoptar tutores virtuales para asistir a los profesores, ya que son capaces de identificar patrones comunes de los estudiantes y brindarles retroalimentación de manera precisa para mejorar su desempeño.	Duolingo, utiliza IA para proporcionar instrucciones, explicaciones y retroalimentación personalizada a los estudiantes en diferentes materias, como idiomas, matemáticas, ciencias, entre otras.
Identificación de nuevos temas de análisis	Los educadores pueden aprovechar IA para desarrollar programas de análisis que busquen de forma automatizada los contenidos más relevantes y actualizados sobre un tema específico, así como para	IBM Watson Discovery, utiliza técnicas de procesamiento del lenguaje natural y aprendizaje automático para analizar

Aplicación	Descripción	Ejemplos
	generar cursos de manera automática, estos algoritmos también pueden crear preguntas y ejercicios basados en los contenidos recopilados.	textos, detectar patrones y encontrar temas de investigación relevantes.

Nota. La presente tabla recoge información del trabajo de Peñaherrera et al. (2022).

Los sistemas inteligentes pueden contribuir en muchos aspectos en la educación, principalmente puede potenciar la accesibilidad del aprendizaje mediante modalidades en línea o desconectadas, sin embargo, es fundamental tener presente que la educación sigue siendo una actividad humana, situación que involucra la interacción entre humanos, si bien la IA busca mejorar dicho proceso no puede sustituir por completo el papel del docente ni la interacción social en el proceso de aprendizaje.

Existen preocupaciones asociadas con el uso de la IA en la interacción social y las prácticas colaborativas, Gómez (2022) menciona el temor a que la automatización impulsada por la IA pueda reemplazar ciertos empleos y afectar la estabilidad laboral, además, la dependencia excesiva de la tecnología y la IA puede reducir la calidad de las interacciones humanas, llevando a una disminución en la empatía y la conexión emocional, también la falta de transparencia y ética en el desarrollo de IA podría plantear riesgos con la privacidad y la seguridad de los datos de los usuarios.

Consideraciones éticas del uso de IA en la educación

El uso de la IA en la educación plantea importantes implicaciones éticas que deben abordarse adecuadamente, la principal es la privacidad de los estudiantes, la recopilación de datos personales pueden violar su intimidad, por esto la UNESCO (2021) considera necesario establecer políticas de protección de datos y garantizar la transparencia en su implementación, para ello ha tomado la iniciativa de establecer el Consenso de Beijing sobre la inteligencia artificial en la educación, documento que proporciona orientaciones y recomendaciones a los Estados sobre la mejor manera de responder a las oportunidades y desafíos.

La ética debe guiar las decisiones estableciendo límites claros sobre el uso de la IA en la educación, algunos países están intentando implementar normativas y regulaciones relacionadas con su uso, Latorre (2022) manifiesta que en un marco legal y ético la Comisión Europea ha identificado la necesidad de reformar las directivas para abordar los desafíos de la era digital y la inteligencia artificial, resaltando que las características específicas de la IA, con su comportamiento autónomo plantea problemas en la aplicabilidad de las normas de responsabilidad a la misma, destacando la necesidad de una reforma para garantizar la protección efectiva en este contexto.

Algunos países ya han implementado regulaciones y estrategias nacionales para fomentar el uso y desarrollo de la IA, abordando temas como la educación, seguridad y normas éticas, Abdala et al. (2019) menciona que entre estas destacan las leyes para los derechos de usuarios, leyes de protección del uso de datos personales y guías para un uso ético de inteligencia artificial y Big Data, además, menciona que entre los países que han lanzado planes nacionales de IA se encuentran: China, Canadá, Corea del Sur, Dinamarca, Emiratos Árabes, Estados Unidos, Francia, Finlandia, Italia, India, Japón, México, Suecia, Singapur, Taiwán, y el Reino Unido. Sin embargo, también destaca que existen otros países como Alemania, Argentina, Bélgica, Chile, Dinamarca, España, Portugal o Suiza que aún no han presentado estrategias integrales, pero están trabajando en su lanzamiento.

A pesar de que estos países han hecho planes nacionales y reconocido la importancia de regular la IA, son pocos los que han implementado normativas específicas al respecto, Abdala et al. (2019) destaca a Japón como país pionero en impulsar una regulación concreta en materia de IA, en el año 2015 se confirmó una ley de protección de información que regula el uso de datos personales, por otro lado, Singapur también ha reconocido la necesidad de normativas, pero optan por una regulación ligera mediante guías de uso para fomentar el desarrollo de esta tecnología, en contraste, México es el primer país de habla hispana que lanzó planes integrales para promover el uso y desarrollo de la IA, estos establecen directrices nacionales para el futuro de los sistemas inteligentes, cubriendo áreas como educación, investigación, aplicación comercial, seguridad y normas éticas.

Una consecuencia de la falta de normativas, es el uso fraudulento de las IA, Huang (2023) menciona que en algunas instituciones como universidades o editoriales, se ha impuesto la prohibición de ciertos software basados en inteligencia artificial debido a preocupaciones relacionadas con la deshonestidad, estas restricciones se han establecido para salvaguardar la integridad de la educación y garantizar el desarrollo de habilidades y conocimientos de manera auténtica, por ejemplo, el uso de chatbots en trabajos o exámenes puede facilitar prácticas deshonestas, como el plagio o la obtención de respuestas sin un esfuerzo real de aprendizaje.

Una cuestión imprescindible en el uso ético de la IA es no fomentar comportamientos perjudiciales e inadecuados, Flores y García (2023) creen que es responsabilidad de los desarrolladores y usuarios establecer límites claros en cuanto a su aplicación y asegurarse de que sus funcionalidades promuevan el bienestar, la equidad y la justicia, se debe promover la transparencia para que las personas comprendan qué implicaciones tienen en sus estudios, con estas acciones se busca garantizar un uso ético y responsable minimizando los posibles impactos negativos. Consecutivamente la Tabla 3 presenta como se debería utilizar,

implementar y desarrollar aplicativos con IA considerando la ética, considerando los métodos técnicos y no técnicos.

Tabla 3

Principios éticos en la IA y métodos de implementación

Métodos técnicos	
Estos buscan plantar la ética desde la construcción de los algoritmos que la operan, diseñando la arquitectura de las IA contemplando las normas que se deberían emplear desde un principio denegando las posibilidades de la malversación de estas herramientas, garantizando así el comportamiento y seguridad de los sistemas inteligentes.	
Ethics by design	La ética en el diseño de los programas es una forma de garantizar el comportamiento ético de los mismos, para lograr esto se mecaniza tres aspectos clave en su construcción como: Los software aprenderán comportamientos éticos de los humanos. Se establecerá normas que rijan que clase de conducta debería tener. Los sistemas deben adaptar su comportamiento según la situación y contexto.
IA explicable	Este concepto deriva de XAI (Explainable AI), este aspecto menciona que las inteligencias artificiales deben ser transparentes mostrando sus métodos de funcionamiento.
Prueba y validación del producto	Se recomienda hacer pruebas periódicas acerca del correcto funcionamiento para diagnosticar posibles errores y corregirlos.
Métodos no técnicos	
Se elaboran como medidas para garantizar el comportamiento de algoritmos no fiables, si en la fase de entrenamiento la IA recogió comportamientos no éticos, estas medidas pueden adoptarse para intentar corregir esa situación. Contribuyen a garantizar la seguridad y buen uso de los sistemas inteligentes.	
Regulación	En principio los encargados de legislar y regular las actividades de desarrollo y uso de la IA son los gobiernos y agencias internacionales, para ello, estos deben establecer normas, parámetros, contratos, regulaciones, entre otros.
Certificaciones	Las empresas que desarrollan los aplicativos son las encargadas de categorizar su producto acorde a las certificaciones que se le confieran incluyendo características como la fiabilidad, seguridad y transparencia.
Educación y sensibilización	Este aspecto se dirige a la comunidad que interactúa con las IA, se debe generar una conciencia colectiva acerca de los potenciales riesgos, beneficios e implicaciones que conlleva el uso de esta tecnología.
Investigación	Distintos organismos deben colaborar en la investigación acerca de estos sistemas, principalmente los gobiernos deben fomentar la investigación de manera segura y fiable, para garantizar la calidad de los resultados y la ética que los compone.

Nota. La presente tabla recoge información del trabajo de Sebio (2020).

En la implementación de sistemas inteligentes debe primar el fortalecer el aprendizaje, evitando posibles situaciones donde se intente hacer mal uso, abusar o realizar prácticas deshonestas, teniendo claras las condiciones y normativas sobre el uso de la IA. Dentro del marco de la enseñanza de la Matemática resulta de suma importancia realizar una reflexión acerca de la responsabilidad y el compromiso ético en relación con el diseño, desarrollo y aplicación de los sistemas.

La enseñanza de la Matemática es fundamental para comprender y aprovechar los servicios que brinda la IA o abordar los posibles riesgos que conlleva su aplicación. Al adquirir conocimientos matemáticos los estudiantes pueden entender de mejor forma lo que conlleva la inteligencia artificial, ya sea evaluar sus aplicaciones, contribuir a un desarrollo e implementación ética de los sistemas o simplemente mejorar el uso, para lograr estos cometidos es necesario profundizar sobre la forma en que las aplicaciones de la IA se relacionan con la enseñanza de la Matemática.

4.2. Enseñanza de la Matemática

La enseñanza es un proceso educativo realizado con el propósito de impartir destrezas y principios a los estudiantes para que estos sean capaces de ponerlos en práctica en distintos contextos, para Cousine (2014) enseñar es “hacer adquirir a los alumnos conocimientos que ellos no poseen. Esos conocimientos tienen un valor utilitario (útiles para la adquisición de otros conocimientos) y cultural (útiles para la formación del espíritu de quienes los adquieren)” (p. 1), dentro de este rubro, los docentes tienen un papel esencial para mediar el desarrollo de los alumnos, ayudando a fortalecer aspectos como la motivación, curiosidad y prácticas reflexivas.

El propósito de enseñar Matemática es similar al anterior, pretende que los estudiantes obtengan conocimientos y habilidades en la asignatura mediante la adquisición de habilidades para entender conceptos matemáticos y que sean capaces de emplearlos en distintas situaciones. En un contexto actual, se promueve la enseñanza centrada en la participación de los estudiantes y la utilización de estrategias innovadoras, para ello han surgido alternativas como el uso de tecnologías educativas para mejorar la experiencia de aprendizaje.

Enseñar Matemática es parte fundamental de cualquier currículo educativo, ya que es una de las materias más importantes en la formación de los estudiantes en todos los niveles educativos. Para Fernandes y Manrique (2021) la enseñanza de la Matemática en el nivel de educación secundaria tiene como objetivo principal desarrollar la capacidad de resolver problemas, comunicar ideas, razonar y aplicar conceptos a situaciones de la vida real, denotando que la asignatura compone una base sólida en la obtención de competencias y habilidades importantes en varios campos de estudio y el mundo actual.

Matemática de Nivel Secundaria

La enseñanza de la Matemática en nivel secundaria en diferentes países, se plantea el debate sobre la relevancia de los contenidos y su conexión con problemáticas reales, Parra y Villa (2017) muestran las tendencias curriculares de esta área en distintos países donde se “han venido incorporando procesos, contenidos, objetivos y/o competencias que exigen el desarrollo

de capacidades para que los estudiantes vinculen sus conocimientos con la realidad” (p. 289), aunque no todos los tópicos matemáticos tienen una aplicación en la cotidianidad, la asignatura sigue desempeñado un papel relevante en el desarrollo de habilidades.

En Ecuador, según la UNESCO (2019) la educación secundaria se divide en dos subniveles denominadas Educación General Básica Superior y el Bachillerato General Unificado. Estas, están destinadas a estudiantes de edades comprendidas entre los 11 y los 17 años, en estos niveles la enseñanza de la Matemática se centra en conceptos y temas fundamentales que establecen las bases para adquirir un sólido conocimiento matemático.

La educación secundaria es un nivel vital en el desarrollo estudiantil donde la Matemática juega un papel fundamental, a través de esta los estudiantes adquieren habilidades cruciales en lo académico y en la vida cotidiana, que brindan las bases necesarias para comprender conceptos complejos, analizar datos y tomar decisiones, proporcionando un lenguaje universal que permite la comunicación y el intercambio de ideas.

En este nivel las matemáticas se enfocan en la comprensión y aplicación de conceptos y temas fundamentales que proporcionan una base sólida en el conocimiento matemático, Taco (2020) menciona que el currículo de Ecuador se centra en tres bloques curriculares: algebra y funciones, geometría, y estadística, que son componentes esenciales para el desarrollo de habilidades matemáticas en los estudiantes, estos bloques en conjunto con las destrezas desarrolladas presentan una propuesta más abierta y flexible, llevada a cabo para dar mejores herramientas en la atención de los estudiantes en los diferentes contextos educativos del país.

Cómo se enseña y cómo se aprende Matemática

El estudio de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática es de gran importancia en el campo educativo, comprender las metodologías y procesos involucrados en esta disciplina es esencial para mejorar las prácticas educativas y facilitar un aprendizaje eficaz. Por tanto, resulta pertinente investigar enfoques pedagógicos y estrategias didácticas que estimulen la comprensión y el interés por la materia.

En el campo de la educación, se han empleado distintos modelos pedagógicos con el propósito de estimular el proceso de aprendizaje en los estudiantes, según González (2023) existen tres primordiales, el modelo tradicional que se caracteriza por la transmisión de conocimientos mediante la exposición del profesor y la práctica de ejercicios repetitivos, el modelo constructivista que promueve la construcción activa del conocimiento a través de la interacción con materiales y situaciones desafiantes, y el basado en problemas que se centra en la resolución de situaciones reales. Cada uno de estos tiene fortalezas y limitaciones, por lo que

es importante que los educadores seleccionen y adapten el enfoque más adecuado a las necesidades y características de sus estudiantes.

En Ecuador, el Ministerio de Educación (2019) sugiere la adopción del enfoque pedagógico constructivista en el ámbito educativo, específicamente en la enseñanza de Matemáticas, basado en un modelo pragmático-constructivista que sostiene que el estudiante logra un aprendizaje con sentido al abordar situaciones de la vida real mediante la aplicación de diversos conceptos y herramientas matemáticas. Estos enfoques fomentan una educación centrada en el estudiante con el objetivo de promover su formación integral y el desarrollo de competencias necesarias para su vida personal, social y laboral.

De acuerdo con el Ministerio de Educación (2021), se ha señalado que, con el propósito de abarcar los diversos conceptos matemáticos, el currículo ecuatoriano establece la inclusión de cuatro componentes: disciplinar, interdisciplinar, consideración de necesidades especiales y provisión de acompañamiento pedagógico. Este ajuste tiene como objetivo fomentar el desarrollo de cuatro competencias: matemática, digital, comunicacional y socioemocional, brindando así un enfoque integral en la educación matemática.

Los procesos metodológicos proporcionan una estructura organizada y sistemática para abordar el estudio y desarrollo de la Matemática, desde la formulación de un problema hasta la obtención de resultados, Guerrero et al. (2018) menciona que buscar procesos metodológicos adecuados posibilitará el desarrollo de habilidades sin caer en la mecanización de procesos que poco aportan en el desarrollo del verdadero aprendizaje, estos proporcionan una estructura organizada y sistemática para desarrollar capacidades matemáticas, fomentando el pensamiento y promoviendo un aprendizaje significativo en el que los estudiantes adquieren, retienen y relacionan sus conocimientos con la información percibida.

La enseñanza y aprendizaje de Matemática es un proceso complejo que además de un modelo pedagógico, requiere la adopción de estrategias pedagógicas efectivas para fomentar el aprendizaje significativo. Los enfoques tradicionales, basados en la transmisión de conocimientos de manera unidireccional, están siendo desafiados por la incorporación de tecnologías en el aula, estos permiten una mayor interactividad, adaptación y personalización de los contenidos, promoviendo una experiencia de aprendizaje más dinámica y participativa.

Un modelo que se ajusta a las necesidades educativas actuales es el ACC (anticipación, construcción y consolidación), este según Callejo y Aranda (2010) se fundamenta en el constructivismo con principios en el aprendizaje activo, está basado en la idea de que los estudiantes adquieren un conocimiento más profundo y duradero cuando son protagonistas en

el proceso de aprendizaje, su estructura cuenta con tres momentos donde se realizan distintas actividades orientadas a desafiar a los estudiantes y brindarles oportunidades para relacionar los nuevos conceptos con sus experiencias y conocimientos previos.

En el primer momento de anticipación se exploran actividades repasando conocimientos previos necesarios para contextualizar al estudiante en el tema, adicionalmente pueden impartirse objetivos y conceptos para orientarlos, en la fase de construcción, los alumnos desarrollaran conocimientos mediante la práctica de ejercicios, por último, en la consolidación se realiza actividades de reflexión acerca de lo revisado para comprobar y compartir los comprendido pensando como lo pueden desarrollar en distintos contextos.

Los estilos de aprendizaje y la enseñanza de la Matemática tienen una relación muy estrecha que es importante conocer, Pérez (2015) distingue cuatro clases de estilos de aprendizaje: activo, reflexivo, pragmático y teórico, siendo los dos primeros los preferidos por los alumnos, esto enfatiza la importancia de tener en cuenta las diversas preferencias de aprendizaje al planificar y diseñar estrategias de enseñanza, con el objetivo de mejorar el desempeño académico de los estudiantes.

Cada individuo puede asociar su forma de comprender las cosas a un estilo de aprendizaje, Díaz (2012) afirma que es importante que los docentes incorporen recursos y estrategias que abarquen todos los estilos de aprendizaje para promover el interés y la motivación de los estudiantes, mejorando así su rendimiento académico. Es esencial combinar los estilos de aprendizaje para evitar la monotonía en la enseñanza, esta mezcla proporciona diferentes perspectivas construidas en base a distintas percepciones de los temas, lo que ayuda a una mejor y más rápida comprensión de los conceptos tratados al abordarlos desde otras perspectivas y por consiguiente esta práctica contribuye a desarrollar más formas de aprender en los estudiantes.

La comprensión de los diferentes estilos de aprendizaje en la Matemática resulta esencial para entender cómo los estudiantes desarrollan conceptos y habilidades, estas varían desde los visuales hasta las auditivas y kinestésicas, teniendo un impacto en la manera en que los estudiantes procesan y asimilan la información. Se reconoce que los estudiantes puedan tener afinidad por más de un estilo, por lo que complementarlos en base a la diversidad es la mejor forma de abordar temas, al reconocer las preferencias de instrucción los educadores pueden adaptar sus enfoques de enseñanza y brindar experiencias más efectivas para aprender.

Didáctica de la Matemática

La didáctica de la Matemática comprende una serie de enfoques y estrategias que posibilitan la organización, ejecución y evaluación del proceso educativo en esta disciplina, esta desempeña un papel fundamental en la planificación y ejecución de estrategias de enseñanza efectivas, permite a los educadores diseñar experiencias de aprendizaje que fomenten distintas cualidades en los estudiantes, Artigue (2018) considera dos perspectivas de la didáctica como una disciplina autónoma en su construcción teórica y como la aplicación de técnicas educativas para materializar ideas pedagógicas y formativas, la comprensión de estos principios y la selección adecuada de recursos y actividades pedagógicas son esenciales para crear un entorno de enseñanza en el que los estudiantes puedan construir significado y desarrollar habilidades de manera efectiva.

En el campo de la didáctica, varios autores destacados han realizado importantes contribuciones, estos han investigado y desarrollado teorías y enfoques pedagógicos que han influido significativamente en la enseñanza de la Matemática, sus aportes se centran en la importancia de la conceptualización, la resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento crítico en el aprendizaje matemático. En la Tabla 4 se presentan algunas de las posturas más relevantes de la didáctica.

Tabla 4

Aportes de autores destacados al campo de la didáctica de la Matemática

Autor	Aporte
Zoltan Dienes	Respaldó el uso de materiales concretos, para que los estudiantes puedan explorar y comprender conceptos matemáticos abstractos. Los estudiantes deben pasar por diferentes etapas cognitivas para desarrollar un entendimiento sólido de las matemáticas, desde la etapa concreta, pasando por la representación gráfica y finalmente llegando a la etapa abstracta.
Jerome Bruner	Destacó la importancia de la construcción activa del conocimiento por parte de los estudiantes y abogó por un enfoque constructivista en la educación, para este autor los alumnos deben ser participantes activos en su propio aprendizaje y los educadores deben proporcionarles oportunidades para explorar y construir su comprensión de los conceptos matemáticos.
Alan Schoenfeld	Propuso la idea de que los estudiantes deben ser desafiados con problemas auténticos y significativos que les permitan desarrollar habilidades de pensamiento crítico y razonamiento matemático, además, resalta la importancia de que los profesores adopten un enfoque pedagógico centrado en el estudiante, proporcionando apoyo adecuado.
Guy Brousseau	Resalta la relevancia de elaborar propuestas pedagógicas que posibiliten la participación activa de los estudiantes en la interacción con los conceptos matemáticos, facilitando así la construcción autónoma de su propio aprendizaje. Según su enfoque, los profesores deben desempeñar el papel de "didactas" que facilitan el aprendizaje al presentar desafíos interesantes y estimulantes, mientras que los estudiantes son responsables de su propio aprendizaje al involucrarse en actividades matemáticas significativas.

Autor	Aporte
Werner Blum y Rita Borromeo	Destacan la importancia de una enseñanza activa y participativa, en la que los estudiantes sean involucrados de manera activa en la resolución de problemas y en la construcción de su propio conocimiento matemático mediante el uso de enfoques didácticos que promuevan la interacción entre los estudiantes, la reflexión sobre los procesos de pensamiento matemático y el desarrollo de habilidades metacognitivas.
Raymond Duval	Considera las diversas modalidades de representación y simbolización en la instrucción de las matemáticas es esencial para asegurar que los estudiantes no solo obtengan conocimientos matemáticos, sino que también desarrollen capacidades para comprender, interpretar y transmitir dichos conocimientos de forma adecuada, según la perspectiva de este autor.
Juan D. Godino	Plantea una metodología educativa que se fundamenta en el empleo de la modelización matemática y el análisis de situaciones problemáticas, sostiene que al presentar desafiantes y auténticos problemas matemáticos, se estimula el pensamiento crítico en los estudiantes. Esta metodología requiere que los estudiantes participen activamente en la construcción de conocimiento matemático a través de la exploración, la discusión y la reflexión.
Confrey y Maloney	Han explorado el potencial de las herramientas digitales y los entornos de aprendizaje basados en tecnología para mejorar la instrucción y la adquisición de conocimientos en el campo de las matemáticas. Sus trabajos han destacado la importancia de considerar los contextos sociales y culturales en los que se desarrolla la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas explorando cómo los entornos de aprendizaje colaborativos y el uso estratégico de la tecnología pueden promover una mayor participación y comprensión de los estudiantes.
Gerald Goldin	Señala la relevancia de fomentar un enfoque constructivista en la instrucción de las matemáticas, brindando a los estudiantes la oportunidad de construir su propio conocimiento, asimismo, resalta la importancia de emplear herramientas y tecnologías adecuadas para respaldar el aprendizaje matemático, como manipulativos, software educativo y recursos en línea.

Nota. La presente tabla recoge información de los trabajos de Blum et al. (2013), Confrey y Maloney (2007), Godino (2014), Goldin (2020) y Sriraman, (2005).

La didáctica se vuelve más relevante al integrar el uso de tecnologías educativas en la enseñanza de Matemática, al adquirir nuevas habilidades y competencias para implementar metodologías que aprovechen las herramientas tecnológicas disponibles. La IA es una herramienta que puede ser usada para complementar y potenciar los enfoques de la didáctica vistos, al ofrecer herramientas interactivas, simulaciones y tutoriales adaptativos que permiten a los estudiantes explorar y descubrir los conceptos matemáticos de manera individualizada y en su propio ritmo, lo que facilita la construcción activa del conocimiento.

Inteligencia Artificial y Enseñanza de Matemática

El avance tecnológico ha abierto nuevas oportunidades para mejorar la enseñanza de las matemáticas en el nivel de educación secundaria, la aplicación de tecnología en el aula ha demostrado ser una herramienta eficaz para facilitar la comprensión de conceptos matemáticos. Mediante la utilización de programas educativos informáticos, aplicaciones interactivas y

recursos en línea, los alumnos tienen la posibilidad de disfrutar de un enfoque de aprendizaje más dinámico y visual, que les permite explorar conceptos matemáticos desde distintos ángulos y fortalecer su capacidad de razonamiento.

La utilización de tecnología en la enseñanza de la Matemática promueve el desarrollo de habilidades digitales y competencias en los estudiantes, Díaz y Careaga, (2021) consideran que “los factores intervinientes, para relacionar los problemas matemáticos abstractos con los contextos, pueden ser mediatizados por soluciones tecnológicas basadas en Inteligencia Artificial y el uso de Plataformas Educativas” (p. 140), como ejemplo podemos contemplar a las calculadoras gráficas o software de simulación y programación, estos no solo facilitan el cálculo y la resolución de problemas, sino que también fomentan el pensamiento crítico, la creatividad y la colaboración.

En el contexto actual de la educación, la incorporación de tecnología en la enseñanza de las Matemáticas ha demostrado ser un camino prometedor. Las herramientas tecnológicas, incluyendo la IA, ofrecen una amplia gama de recursos y posibilidades que pueden resultar beneficiosos en el ámbito educativo, específicamente, la IA puede ser considerada como una herramienta valiosa para optimizar el aprendizaje de la Matemática debido a su naturaleza y el campo de estudio al que se puede aplicar, aunque presenta desafíos y limitaciones, su potencial para mejorar diversos aspectos en esta área es prometedor.

La comprensión de los mecanismos fundamentales del funcionamiento de la Inteligencia Artificial, tales como los sistemas matemáticos, puede resultar relativamente sencilla a nivel elemental, por referencia a esto Calabuig et al. (2021) consideran interesante introducir este tema como parte del contenido que se imparte en la educación secundaria, tanto en las asignaturas de Matemática como en las de Tecnología, dado su enfoque cercano a la experiencia de los estudiantes, esta característica favorece su inclusión temprana apuntando al desarrollo de una base sólida para comprender el potencial y las implicaciones éticas de la IA.

Existe una estrecha relación entre la IA y la Matemática, dado que esta área representa una herramienta fundamental para el desarrollo de algoritmos y modelos de aprendizaje automático, que conforman una parte sustancial de los sistemas autónomos. La conexión existente radica en que los sistemas inteligentes ofrecen a los estudiantes y educadores recursos novedosos para mejorar la comprensión y el aprendizaje, al mismo tiempo que la Matemática proporciona los fundamentos teóricos y conceptuales esenciales para comprender los mecanismos y algoritmos de la IA.

Aplicaciones de la IA en la Enseñanza de la Matemática

La IA tiene aplicaciones en diversos campos de la educación, incluyendo la enseñanza de la Matemática, para Peñaherrera et al. (2022) la IA puede utilizarse para crear programas de aprendizaje personalizados que se ajusten a los estilos de aprendizaje individuales de los estudiantes, para personalizar el aprendizaje en función de las necesidades individuales de los estudiantes, ayudar a los docentes a identificar las áreas en las que los estudiantes necesitan más apoyo y proporcionar retroalimentación inmediata a cada estudiante y, también pueden apoyar a los estudiantes a visualizar problemas matemáticos de manera más efectiva, lo que puede ayudar a mejorar su capacidad para interpretarlos.

La relación entre educación, IA y la Matemática es cada vez más importante en la sociedad actual. La primera se ha convertido en una herramienta cada vez más útil para mejorar la calidad de la educación de la segunda, dando un gran abanico de posibilidades en cuando a su implementación, los sistemas inteligentes permiten a los estudiantes aprender a su propio ritmo y de acuerdo a necesidades concretas, también es utilizada para crear juegos educativos y simulaciones interactivas, que ayudan a comprender conceptos matemáticos difíciles de una manera más visual y entretenida. A continuación, en la Tabla 5 se muestran algunas de las posibles aplicaciones:

Tabla 5

Aplicaciones de la IA en la enseñanza de Matemática

Aplicación	Descripción	Ejemplos de IA
Personalización del aprendizaje	La IA adapta el contenido y la metodología de enseñanza de la Matemática a las necesidades individuales de cada estudiante.	Plataforma de aprendizaje adaptativo como Khan Academy, que ofrece lecciones y ejercicios personalizados según el nivel de cada estudiante.
Generación automática de ejercicios y problemas	Los sistemas de IA crean una variedad de ejercicios matemáticos adaptados a diferentes niveles de dificultad y temáticas.	Mathway, una aplicación que genera ejercicios matemáticos personalizados en áreas como álgebra, cálculo, trigonometría, entre otras.
Tutoría virtual	Los estudiantes pueden recibir asistencia interactiva de tutoriales virtuales impulsados por IA, estos ofrecen respuestas a sus preguntas y brindan explicaciones detalladas sobre conceptos matemáticos paso a paso.	Chatbots educativos como Socratic, que pueden responder preguntas y guiar a los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos.
Retroalimentación instantánea	La retroalimentación inmediata sobre el progreso y los errores en la resolución de problemas matemáticos puede ser proporcionada a los estudiantes mediante la implementación de software que incluya IA.	Aplicaciones de corrección automática como Photomath, que escanea problemas matemáticos escritos a mano y proporciona soluciones y pasos detallados.

Aplicación	Descripción	Ejemplos de IA
Recursos educativos interactivos	Los recursos interactivos proporcionados por los sistemas de IA, tales como simulaciones y visualizaciones, tienen como objetivo facilitar la comprensión de conceptos matemáticos abstractos por parte de los estudiantes.	GeoGebra es una plataforma educativa que brinda a los estudiantes la posibilidad de explorar visualmente diversos conceptos matemáticos.
Detección de patrones de aprendizaje	La IA analiza los datos de los estudiantes y detecta patrones en su proceso de aprendizaje, proporcionando orientación individualizada.	Sistemas de gestión del aprendizaje (LMS) con análisis de datos, como Brightspace, que utilizan algoritmos de IA para identificar las fortalezas y debilidades de los estudiantes en Matemáticas.
Apoyo en la resolución de problemas complejos	Los sistemas de IA brindan apoyo a los estudiantes al enfrentarse a desafiantes situaciones matemáticas, proporcionando orientación, tácticas y ejemplificaciones.	Wolfram Alpha, un motor de conocimiento computacional que proporciona respuestas y soluciones detalladas a problemas matemáticos complejos.
Desarrollo de habilidades de pensamiento crítico	A través de la aplicación de la IA, los estudiantes se confrontan con situaciones matemáticas desafiantes que demandan habilidades de razonamiento lógico y análisis crítico.	Programas de competencias de pensamiento como ALEKS, ofrecen problemas matemáticos desafiantes y adaptados al nivel de cada estudiante.

Nota. La presente tabla recoge y da ejemplos sobre posibles aplicaciones de IA para enseñar Matemática.

La incorporación de la IA en la educación Matemática no solo posibilita el acceso a una educación de alta calidad, sino que también promueve el desarrollo del pensamiento crítico y el razonamiento lógico, generando nuevas perspectivas para transformar y mejorar los métodos de enseñanza y aprendizaje. Las aplicaciones de estos sistemas ofrecen soluciones innovadoras para mejorar el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos, convirtiéndose en un aliado valioso en el proceso educativo.

Ventajas y desventajas de la implementación de IA en Matemática

La implementación de la IA en la enseñanza de las Matemáticas presenta diversas ventajas y desventajas, como punto de referencia podemos partir de las aplicaciones que tienen estos sistemas inteligentes, algunas de estas pueden ser únicamente utilizadas en favor de una enseñanza más flexible y eficiente, mientras que otros aspectos pueden convertirse en limitaciones para el aprendizaje de los estudiantes según el manejo que le confieran. La implementación requiere un enfoque cuidadoso y reflexivo, siendo fundamental considerar tanto los beneficios potenciales como los desafíos o problemas relacionados, en la Tabla 6 se exponen los principales.

Tabla 6*Ventajas y desventajas de la implementación de IA en Matemática*

	Ventajas		Desventajas
Personalización del aprendizaje.	La IA posibilita la personalización del contenido y la metodología educativa en función de las necesidades particulares de los estudiantes, fomentando un proceso de aprendizaje más eficiente y adaptado a cada individuo.	Falta de interacción personal.	La implementación de la IA puede limitar la interacción directa entre estudiantes y profesores, lo que puede afectar la capacidad de los estudiantes para recibir orientación y retroalimentación personalizada.
Retroalimentación inmediata.	Los sistemas de IA pueden proporcionar retroalimentación instantánea y precisa a los estudiantes, permitiéndoles corregir errores y mejorar su comprensión de manera inmediata.	Limitaciones en la resolución de problemas.	Si solo ofrece soluciones y enfoques predefinidos, lo que puede limitar la capacidad de los estudiantes para explorar diferentes estrategias y desarrollar habilidades de resolución de problemas de manera independiente.
Mejora de la retención de conocimientos.	La IA puede ayudar a los estudiantes a retener mejor los conceptos matemáticos mediante el uso de técnicas de refuerzo.	Dificultad en la detección de errores conceptuales.	Puede tener dificultades para detectar y corregir errores conceptuales en el trabajo de los estudiantes, ya que se centra principalmente en la corrección de errores técnicos y matemáticos.
Enfoque en habilidades prácticas.	Puede enfocarse en habilidades prácticas que son importantes para la vida cotidiana y la carrera profesional.	Reemplazo de profesores.	La introducción de la IA en la educación matemática plantea la posibilidad de sustituir a los docentes, lo que podría tener un impacto en la interacción personal, el respaldo emocional y la atención a las necesidades de los estudiantes.
Aprendizaje colaborativo	Facilita el aprendizaje colaborativo al permitir a los estudiantes interactuar entre sí, fomentando la discusión y la resolución conjunta de problemas matemáticos.	Costo de implementación.	El costo de implementar y mantener sistemas de IA puede ser alto. Las aulas pueden requerir inversiones significativas en tecnología y capacitación.

Nota. La presente tabla recoge información de los trabajos de Mohamed et al. (2022), Owoc et al. (2021) y Zhai et al. (2021).

El uso adecuado de la IA implica encontrar un equilibrio entre la automatización y la interacción humana, aprovechando sus capacidades para personalizar el aprendizaje y proporcionar retroalimentación eficiente, sin descuidar la importancia de la interacción directa entre estudiantes y profesores asegurando un ambiente social adecuado, asimismo, se debe tener en cuenta el costo y la accesibilidad de la tecnología, asegurando que su implementación

no genere desigualdades educativas y que pueda ser desarrollada por todos los participantes, la clave está en considerarla una herramienta complementaria que promueva el desarrollo de habilidades matemáticas.

Implicaciones y Casos de estudio

Las implicaciones de la IA en la enseñanza de la Matemática plantean tanto oportunidades como desafíos que requieren consideración, por un lado, la IA puede ofrecer herramientas que respalden y mejoren el proceso de aprendizaje matemático, por otro lado, es crucial abordar aspectos como la selección adecuada de objetivos educativos, la integración curricular y la capacitación necesaria para implementar estos sistemas. Es esencial abordar estos aspectos de manera reflexiva y responsable, buscando un equilibrio entre la tecnología y la pedagogía con el fin de lograr un aprendizaje matemático efectivo.

Al implementar la IA en la enseñanza de la Matemática, es fundamental contar con los recursos técnicos y tecnológicos adecuados, en el estudio de Benjamín (2020) se resalta la importancia de disponer de herramientas y plataformas tecnológicas avanzadas que permitan aprovechar plenamente el potencial de la IA en el aula de clase, estos recursos incluyen hardware para su ejecución, software especializado, sistemas de aprendizaje y dispositivos que faciliten la interacción entre los estudiantes y la inteligencia artificial.

La integración curricular es un aspecto esencial para implementar la IA en la enseñanza, Arnau (2015) señala la importancia de considerar cuidadosamente los contenidos matemáticos adecuados para abordar con estas herramientas, garantizando su pertinencia y coherencia con el currículo, esto implica identificar los conceptos clave y las habilidades específicas que pueden ser mejoradas mediante la aplicación de la IA, y diseñar actividades y recursos educativos que promuevan un aprendizaje enriquecedor.

La formación docente es un componente crucial para llevar a cabo clases efectivas utilizando sistemas inteligentes. Orellana et al. (2021) destacan la necesidad de capacitar a los docentes en el uso de la IA, brindándoles las habilidades y competencias necesarias para aprovechar su potencial educativo, los profesores deben adquirir conocimientos sobre las herramientas y aplicaciones relacionadas con la IA, comprender sus capacidades, restricciones, y elaborar enfoques pedagógicos que permitan una integración eficaz de la IA en el proceso educativo de la enseñanza de la Matemática.

Al aplicar y utilizar la IA en la enseñanza de la Matemática, es vital considerar las limitaciones relacionadas con la privacidad de los datos y la ética, Flores y García (2023) advierten sobre la importancia de abordar estos aspectos de manera responsable y ética, protegiendo la privacidad de los estudiantes y asegurando un uso apropiado de los datos

recopilados en el contexto de la IA, es necesario establecer políticas y prácticas que salvaguarden la confidencialidad y seguridad de los datos recopilados, asegurando un uso apropiado de la IA en el contexto educativo.

En un contexto más preciso, la IA y la enseñanza de Matemáticas ya se ha puesto en marcha, prueba de ello es que algunos temas de esta área se han desarrollado, mayoritariamente se llevan a cabo mediante la implementación software que incluyen esta tecnología en sus utilidades, a continuación, revisamos algunas muestras de su aplicación.

Un ejemplo de esta práctica es la existencia de programas de software que utilizan IA para el aprendizaje adaptativo, este es el caso del estudio hecho por García (2014) donde mediante la plataforma Moodle se implementó una IA que estimula el aprendizaje personalizado basada en la estructura STI (Sistemas Tutorales Inteligentes) para enseñar funciones y graficas a estudiantes del Instituto de Educación Secundaria José Luis Castillo Puche de España, la plataforma realizaba un diagnóstico que ella misma procesaba y así colocaba al estudiante en un nivel acorde a sus respuestas, consecuentemente diseñaba un plan de estudio acorde a las necesidades detectadas con una interfaz y desarrollo más dinámico logrando una adaptación del contenido en base a los conocimientos, capacidades del estudiante y a la forma más adecuada para cada uno de ellos a la hora de aprender.

En su estudio, Morales y Jiménez (2013) examinaron el uso de las Cognitive Tutor Authoring Tools (CTAT) en el nivel medio de educación en Montevideo, enfocándose en el campo del álgebra, los investigadores descubrieron que existen alternativas digitales, como los sistemas tutores inteligentes, que ofrecen a los docentes un mejor apoyo para abordar las necesidades individuales de los estudiantes, destacando que estos sistemas no solo proporcionan atención personalizada, sino que también registran y analizan todas las interacciones de los estudiantes en repositorios de datos, los cuales se ponen a disposición del docente para facilitar la toma de decisiones informadas.

Otro tópico de matemáticas que ha sido enseñado con IA es la aritmética, como describe el estudio de Cárdenas (2017) en este proyecto utilizó la plataforma de aprendizaje adaptativo Smart Sparrow para crear actividades interactivas y personalizadas que permitían a los estudiantes de la institución Francisco Arango de Colombia practicar los conceptos y habilidades de la aritmética, Smart Sparrow hace uso de la IA para identificar patrones en el desempeño de los estudiantes y ajustar la secuencia de aprendizaje con el fin de mejorar la enseñanza, esta plataforma se basa en "Sistemas Basados en Conocimiento" (SBC), que se fundamenta en el uso de reglas y conocimientos de expertos para tomar decisiones.

El uso de la IA en la enseñanza de Matemática en el nivel de educación secundaria puede brindar numerosos beneficios y oportunidades para mejorar el proceso de aprendizaje, la integración de la IA en el currículo puede promover un enfoque más práctico y aplicado, sin embargo, es esencial examinar de manera exhaustiva los elementos vinculados a este tema, ya que al hacerlo, se puede optimizar al máximo el potencial de la IA para fomentar el aprendizaje y enriquecer la experiencia educativa en la enseñanza.

5. Metodología

La presente investigación se realizó en torno a un enfoque cualitativo, dado que este armoniza con la problemática planteada, debido a la disponibilidad y características de la información, el estudio se ejecutó con un carácter documental que posibilitó indagar los aspectos y los procesos metodológicos que se deben tener en cuenta para implementar la IA en la enseñanza de la Matemática. Asimismo, tiene un alcance descriptivo centrado en la revisión sistemática necesaria para conceptualizar los objetos de la investigación: Inteligencia Artificial y Enseñanza de la Matemática, y así analizar el uso de los sistemas inteligentes en la enseñanza de Matemática en el nivel de educación secundaria.

En cuanto a los métodos, se empleó principalmente la revisión documental dividida en tres fases para recolectar y analizar una gran variedad de fuentes de información relacionadas con el tema de estudio, estas se examinaron críticamente para realizar una síntesis de la información recopilada acorde a las características de la investigación. Se utilizó el método analítico-sintético para evaluar la aplicación de la IA en la enseñanza de Matemática, centrando el estudio de los aspectos y procedimientos metodológicos para lograr determinar cuáles de estos se deben tener en cuenta para insertar los sistemas inteligentes en la asignatura en el nivel de educación secundaria, además, se utilizó el método deductivo para establecer conclusiones con base en la información recopilada.

En la primera fase se realizó la búsqueda de información a través de una revisión bibliográfica utilizando documentos de bases de datos científicas ArXiv, Dialnet, Frontiers, ScienceDirect, ProQuest y repositorios de universidades, para la recopilación de textos se emplearon ecuaciones de búsqueda avanzada combinando palabras clave (inteligencia artificial, enseñar matemática, educación secundaria, entre otras) y operadores lógicos (“ ”, AND y OR). En la selección de investigaciones se tomó en cuenta los siguientes criterios: palabras clave, tipo de documento (artículos, libros, revistas, tesis de cuarto nivel o informes académicos), búsqueda por índices periodicidad de 10 años, búsquedas en español e inglés y que los textos converjan en cierta medida con los objetivos de investigación.

Para la segunda fase se buscó documentos que relacionaran las categorías conceptuales de inteligencia artificial y la enseñanza de Matemática, depurando los textos con los criterios anteriormente expuestos. Los trabajos que cumplían con las características deseadas fueron registrados en una bitácora de búsqueda (ver Anexo 2), para facilitar su manejo presenta la fecha de consulta, motor de búsqueda, ecuación de búsqueda, idioma (las investigaciones de otros idiomas fueron traducidas mediante la web DeepL para facilitar su estudio), referencia, enlace/DOI y el tipo de documento (experimental/documental).

En la bitácora de búsqueda se empleó las siguientes ecuaciones de búsqueda: "Inteligencia artificial" AND "enseñar matemática" AND "educación secundaria" AND ("estudio" OR "investigación" OR "documento") AND ("muestra" OR "población"), ("inteligencia artificial" OR "artificial intelligence") AND ("educación secundaria" OR "secondary education") AND ("enseñar matemática" OR "teaching mathematics") AND ("población" OR "population"). En este instrumento se revisaron 712 documentos provenientes de las bases de datos científicas expuestas, de estos se seleccionaron 48 trabajos (30 experimentales y 18 documentales) que investigaron y evaluaron la efectividad de diferentes IA en el contexto de la enseñanza de Matemática en el nivel de educación secundaria.

La tercera fase consistió en la construcción de resultados, para la presentación de los mismos se hizo uso de figuras y tablas que presentan información acerca de las características relevantes encontradas y gráficos de barras porcentuales realizados mediante el software Excel que representan las menciones hechas en los documentos revisados. En la Figura 2 ubicada en el apartado de resultados se analizó la aplicación de los diferentes tipos de IA para enseñar matemáticas en estudios de carácter experimental, categorizándolos según la función que desempeñan.

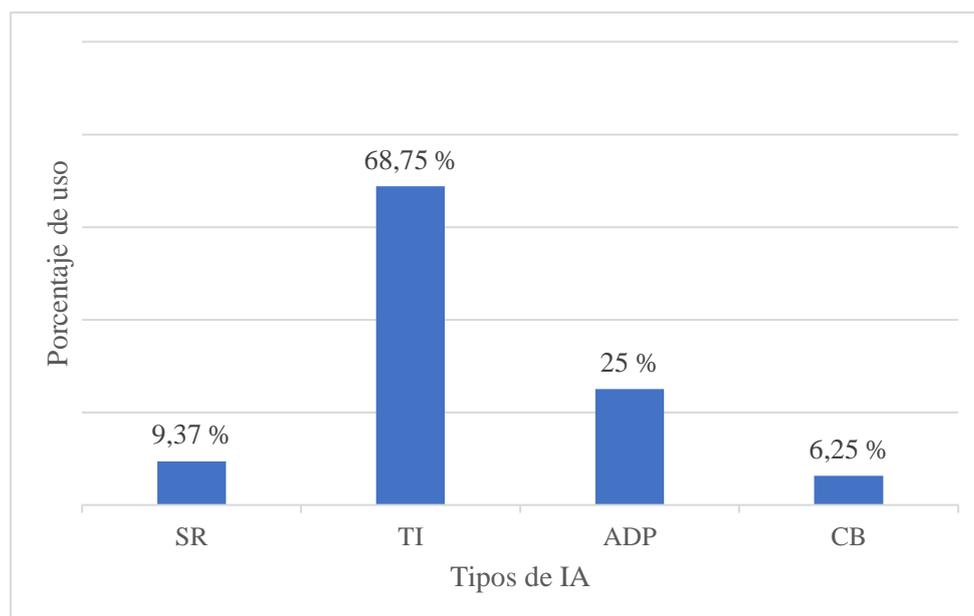
Referente al primer objetivo específico se revisó los 48 documentos propuestos en Anexo 2, considerando los aspectos que se deben tener en cuenta para implementar la IA en la enseñanza de la Matemática, el producto de ese análisis se presenta en la Tabla 6. En cuanto al segundo objetivo específico, entre los documentos recopilados se buscó los procesos metodológicos donde se insertó la IA en la enseñanza de Matemática, una vez identificados se recopiló la frecuencia en la que fueron empleadas en las distintas fases, consecuentemente se presentan en la Figura 4 detallando su porcentaje de inclusión. Los resultados de este proceso se muestran en el siguiente apartado.

6. Resultados

La figura presenta las distintas IA encontradas en los trabajos de tipo experimental revisados, agrupadas por tipos según su funcionalidad, los gráficos de barras que muestran los tipos de IA en el eje horizontal y el porcentaje de su uso en los documentos seleccionados en el eje vertical. Se utiliza las siguientes abreviaciones acerca de las diferentes categorías de inteligencia artificial: sistemas de recomendación: SR, tutores inteligentes: TI, análisis de datos y predicción: ADP, chatbots: CB.

Figura 2

Uso de los diferentes tipos de IA en la enseñanza de Matemática en secundaria



Nota. Se muestran las IA usadas para enseñar temas de Matemática agrupadas en sus tipos.

Los resultados muestran que, entre los diferentes tipos de IA investigados, los más utilizados fueron los tutores inteligentes con una frecuencia de uso del 68,75 %, le siguieron las IA de análisis de datos y predicción, con un 25 % de porcentaje, los sistemas de recomendación también fueron utilizados, aunque en menor medida, representando el 9,37 % de los casos, por otro lado, las IA destinadas al procesamiento del lenguaje natural o chatbots tuvieron una frecuencia de uso más baja con un 6,25 %.

1. Resultados sobre los aspectos para implementar la IA en la enseñanza de Matemática

La tabla está distribuida en columnas donde se presentan los aspectos a tener en cuenta, una descripción de las partes más esenciales para considerar en su implementación y la frecuencia en la cual la categoría se hizo presente en la literatura revisada. Tras examinar estos aspectos clave para implementar la IA en la enseñanza de Matemática en los 48 documentos presentados en la bitácora (ver Anexo 2) se obtuvieron los siguientes resultados.

Tabla 7*Aspectos para implementar la IA en la enseñanza de Matemática*

Aspectos	Descripción	Porcentaje
Recursos técnicos y tecnológicos	Entre los recursos esenciales se encuentra cualquier dispositivo electrónico que se pueda usar para acceder al contenido, espacios adecuados, internet, licencias o suscripciones al software que contenga la IA en caso de no ser de código abierto (Benjamín, 2020; Casey, 2022; Moya, 2021).	89,58 %
Integración curricular	Se debe integrar a un currículo flexible para que el plan de estudios pueda revisarse a medida que evoluciona la IA en clases, en su adaptación resalta su afinidad para ser enseñada en asignaturas de tecnología o Matemática, por lo cual, rediseñar los planes de estudio se convierte en una necesidad (Charles, 2021; Orellana et al., 2021; Zhou et al., 2022).	60,41 %
Contenidos	Para valorar los contenidos en relación con la inteligencia artificial, se determina la compatibilidad del programa o currículo, la adaptabilidad puede manifestarse en uno o diferentes aspectos, como el contenido, la evaluación y la consistencia. Los docentes organizan las materias en sesiones de aprendizaje considerando la funcionalidad del sistema inteligente. (González et al., 2021; Marienko et al., 2020; Marios, 2021).	52,08 %
Pedagógicos y didácticos	La aplicación de IA involucra el uso de estrategias pedagógicas adecuadas, la selección de métodos de enseñanza efectivos, la adaptación a las necesidades y la evaluación del aprendizaje, también se hace énfasis a la fácil adaptación se los sistemas inteligentes a la didáctica. Al considerar y aplicar estos aspectos, se promueve un proceso educativo más efectivo (Arнау, 2015; Haugsness, 2018; Mills, 2021; Morales y Jiménez, 2013).	45,83 %
Formación	Es crucial formar al profesorado y alumnado en ciencias computacionales, competencias informáticas para establecer marcos de trabajo en la IA valorando no solo aprender de las herramientas, sino también a partir de modelos pedagógicos de referencia que den sentido al desarrollo. Se debe promover la colaboración entre expertos en educación y en IA para explotar el potencial educativo de estas tecnologías (Benjamín, 2020; V. González et al., 2021; Orellana et al., 2021).	43,75 %
Ética y privacidad	Se busca lograr equidad, calidad y educación para todos, utilizando sistemas de inteligencia artificial de una forma responsable y ética. Las implicaciones en el uso de la IA deben llevarse desde la ética reflexionando sobre las practicas e implicaciones que conlleva, considerando las formas correctas de uso, y privacidad de los usuarios (Casey, 2022; Flores y García, 2023; Marios, 2021).	29,17 %

Nota. Se muestra el porcentaje de aparición de los aspectos en los 48 documentos revisados.

Los recursos técnicos y tecnológicos fueron mencionados en un 89,58 % de los documentos revisados, en este apartado se incluyó las herramientas, plataformas y software específicos que respaldan la integración de la IA en el entorno educativo, centrando las indicaciones de contar con los recursos para enseñar Matemática con los sistemas inteligentes.

Los contenidos fueron mencionados en una proporción del 89,58 %, donde se evalúa la importancia de seleccionar y adaptar los contenidos de Matemática de acuerdo con la implementación de la IA, esto implica analizar áreas específicas donde los sistemas inteligentes se explique cómo adaptarlos en forma correcta.

La integración curricular tiene un 60,41 %, en este aspecto se analizó las partes que señalan la inclusión de la IA a los currículos, donde indican las implicaciones de alinear estos sistemas inteligentes con los planes de estudio y los programas educativos. Los aspectos pedagógicos y didácticos son considerados en el 45,83 % de los documentos, de los cuales se extrajo y analizó contenido referente a la compatibilidad entre los sistemas inteligentes empleados y las características trabajadas.

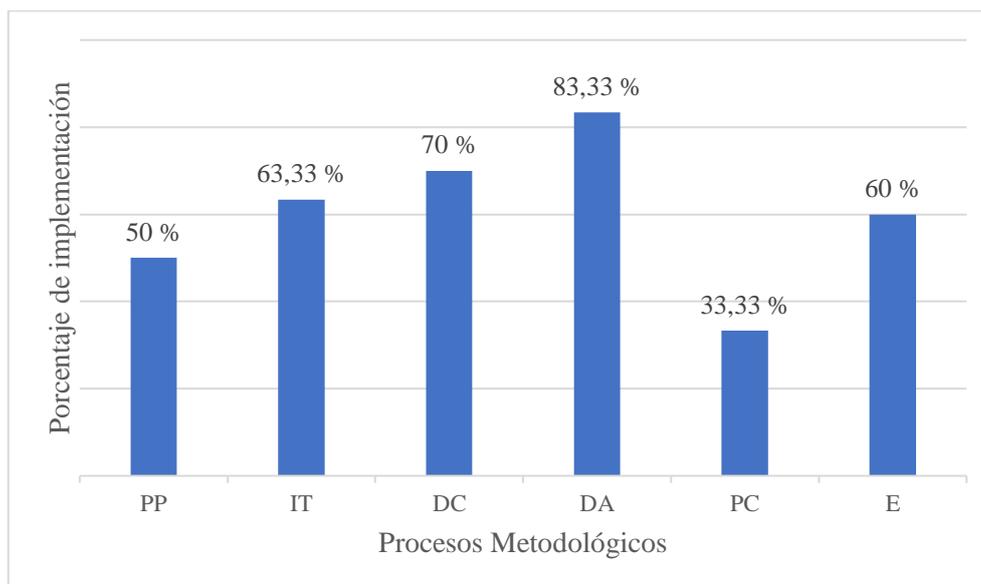
La formación es nombrada en un 43,75 %, aquí se estudió la necesidad de proporcionar a los actores educativos la capacitación y el apoyo adecuados para implementar la IA en la enseñanza de la Matemática, abordando aspectos técnicos y pedagógicos. Finalmente, la ética es mencionada un 29,17 %, opiniones que presentan referencias sobre considerar y abordar los aspectos morales y de privacidad en la implementación de la IA para la enseñanza, valorando alusiones sobre garantizar la protección de los datos, el uso responsable y la reflexión sobre las implicaciones éticas de la aplicación de sistemas inteligentes en el ámbito educativo.

2. Resultados respecto a los procesos metodológicos en la inserción de la IA en la enseñanza de Matemática.

Se evaluaron los procesos metodológicos donde en partes de este utilizaban o mediaban ciertas fases con IA, es decir, se trabajaron de manera transversal y no durante todo el proceso de enseñanza-aprendizaje. Esto permite inferir las fases comunes donde presentaban la aplicación en el proceso para incluir la IA en la enseñanza de Matemática. Los resultados se presentan con las siguientes abreviaturas para identificar cada una de las fases de los procesos metodológicos analizados: PP (Preparación previa), IT (Introducción a temas), DC (Desarrollo de conceptos), DA (Desarrollo de actividades), PC (Prácticas colaborativas) y E (Evaluación).

Figura 3

Fases de los procesos metodológicos donde se aplica la IA



Nota. Se muestra las IA seleccionadas de los documentos de carácter experimental mostrados en el Anexo 2.

En los procesos metodológicos analizados, se observa que la fase de desarrollo de actividades es la más utilizada en las investigaciones, con un porcentaje del 83.33 %, donde se evidenció el desarrollo de actividades diseñadas con la IA y ayuda en las actividades prediseñadas fungiendo como guía, la fase de desarrollo de conceptos presenta un porcentaje de uso del 70 %, en el cual se presentaban breves conceptos de temas donde se detectaban vacíos para orientar a los estudiantes, la introducción a los temas tiene un porcentaje de uso del 63.33 %, se destaca el uso de contenido y actividades previas para dinamizar el aprendizaje.

La evaluación presenta un porcentaje de uso del 60 %, fase mayoritariamente utilizada en tutores inteligentes donde era empleada para diseñar evaluaciones automáticamente en base a los contenidos programados durante el curso, la preparación previa tiene un porcentaje de uso del 50 %, considerando actividades y evaluaciones orientadas al diagnóstico de nivel de los estudiantes, por otro lado, la fase de prácticas colaborativas presenta la frecuencia de uso más baja con un porcentaje del 33.33 %, estas contemplan actividades donde había interacción o actividades entre alumnos.

La aplicación de la IA en la enseñanza de las matemáticas se usó para abordar diversos temas. Se ha encontrado que puede ser utilizada en el razonamiento matemático, la probabilidad, el álgebra y la geometría, dentro de los mismos se enfatiza el apoyo que brindan para facilitar la comprensión de conceptos y cálculos probabilísticos, la asistencia en la resolución de ecuaciones y simplificación de expresiones algebraicas, y su ayudar en la

visualización de propiedades y relaciones geométricas (Arnau, 2015; Cárdenas, 2017; Fontoura, 2020; García, 2014; Morales y Jiménez, 2013).

Durante la revisión de la literatura, se encontró un considerable número de investigaciones desarrolladas en Perú, figurando como el país de habla hispana con más ejemplos de la aplicación de sistemas inteligentes en la enseñanza de las Matemáticas en el contexto del presente trabajo, por otro lado, se identificó que Estados Unidos fue la principal fuente de los estudios en inglés sobre este tema. En ambos países se observó una clara preferencia por el uso de tutores inteligentes, siendo ALEKS el sistema más usado.

En cuanto a los resultados de aprendizaje desarrollados después de la aplicación de la IA a los distintos procesos metodológicos se destaca la contribución de estas herramientas al aprendizaje de los estudiantes, en el estudio de Auccahuasi et al. (2018) se resalta el uso de pretest y posttest donde hay un aumento del 30 % en cuanto al razonamiento matemático, en el trabajo de Cheung y Kai (2021) los resultados mostraron una correlación significativa entre la puntuación con la IA y el examen final mejorando su puntuación en un 22 %, la investigación de Waits (2020) reveló que el uso de una IA fue estadísticamente significativo en la mejora de la puntuación de Matemáticas de varios estudiantes, sin embargo un análisis de regresión muestra que la comprensión inicial de álgebra y geometría, juega un papel más importante que el uso del sistema inteligente en la consecución de conocimientos.

7. Discusión

La presente investigación analiza el uso de la inteligencia artificial en la enseñanza de Matemática en el nivel de educación secundaria, para lograrlo se llevó a cabo una revisión documental sistemática de 48 estudios relacionados con el tema de investigación.

La información revisada revela que los tutores inteligentes son las IA más utilizadas en la enseñanza de Matemática en este nivel (Mendoza, 2018; Mills, 2021; Waits, 2020), que el aspecto más considerado al momento de implementar los sistemas inteligentes es el de recursos técnicos y tecnológicos (Benjamín, 2020; Casey, 2022; Moya, 2021), además, se encontró que el desarrollo de actividades es la fase del proceso metodológico donde más se incluye a la IA (Benjamín, 2020; Charles, 2021; Nitkin et al., 2022; Zhou et al., 2022).

Los tutores inteligentes, como ALEKS, Khan Academy, Carnegie Learning o ArtiBos, fueron empleados para llevar una instrucción personalizada y adaptativa en la enseñanza de distintos tópicos de Matemática abordando conceptos, actividades, ejercicios y evaluaciones, los sistemas de recomendación, como Math Solver o Word Problem Solver, se emplearon para dar recomendaciones en temas de álgebra y geometría acerca de problemas y soluciones matemáticas, las IA de análisis de datos y predicción, como Desmos o Mathway, eran utilizadas para el análisis gráfico aportando al razonamiento matemático y probabilidad, en concreto a la visualización de propiedades y relaciones geométricas, los chatbots, como Assistant for Pupils and Teachers, eran empleados para brindar información personalizada, asistencia en la resolución de ecuaciones y ayuda con la simplificación de expresiones algebraicas.

Algo que llama la atención es la importancia que se le confiere a la ética en el uso de la IA en la educación, sin embargo, este es el aspecto menos recurrente en la literatura revisada (Casey, 2022; Marios, 2021), las causantes de esta situación pueden ser las regulaciones existentes en torno a esta tecnología, al apenas empezar a surgir no se conocen todas las capacidades, posibilidades y limitaciones de su implementación, por lo que no existen normas bien definidas acerca de su control (Abdala et al., 2019), por lo que es relevante retomar su estudio en años posteriores cuando se desarrollen las respectivas normativas.

Otro resultado imprevisto es el alto porcentaje de inclusión que tienen los sistemas inteligentes en la toma de evaluaciones (González, 2023; Özyurt et al., 2013), es llamativo cómo a pesar de la creciente preocupación mediática sobre el posible mal uso de la inteligencia artificial en la enseñanza de las Matemáticas, la evaluación destaca como uno de los procesos donde más se utiliza esta tecnología (Vivas, 2022; Yanes, 2023), la razón de esta cantidad se debe al tipo de sistema que la aplica, pues al ser en su mayoría tutores inteligentes están preparados para posibles situaciones de deshonestidad a diferencia de otros tipos de IA.

Por otro lado, destaca el bajo porcentaje respecto al aprendizaje colaborativo debido a la poca interacción que los software con IA generan entre alumnos, se puntualiza a este proceso como la característica donde deberían mejorar (Arnau, 2015; Benjamín, 2020). A esto lo complementa el acompañamiento docente, que en función del contexto de aprendizaje cambia su rol participativo, siendo los ambientes de enseñanza virtual los que reportan más interacción (Basantes, 2022; Flores y García, 2023; García, 2014), mientras que los contextos presenciales presentan una comunicación pasiva (Cárdenas, 2017; Charles, 2021).

La implementación de IA para enseñar Matemáticas en países como Perú se llevó de manera implícita al contar con sistemas inteligentes inmersos en software para educar, en Estados Unidos la implementación es mayoritariamente en forma de retroalimentación o refuerzo para sus estudiantes. En Ecuador, la aplicación de IA en la educación aún es limitada, pero se están dando avances en esa dirección, existe interés por aprovechar el potencial de la IA para mejorar los procesos educativos, los estudios de Basantes (2022) y Gutiérrez et al. (2019) son ejemplos que demuestran esta situación, empleando herramientas como ALEKS y Math Solver para mejorar el aprendizaje y el rendimiento de los estudiantes en Matemática o el estudio Játiva y Beltrán (2021) donde mediante la metodología STEAM motiva el uso de inteligencia artificial.

El estudio presenta algunas limitaciones por la cantidad de información y documentos revisados, si bien los 48 documentos representan una base sólida sobre la cual trabajar existen más trabajos que ejecutan proyectos similares a los cuales se tuvo un acceso limitado (resumen) debido a que están alojados en sitios de acceso suscrito. Al no disponer del espacio y tiempo para una revisión más extensa, la investigación se puede retomar desde varias perspectivas, principalmente se podría llevar a cabo un estudio experimental donde se aplique una IA para enseñar Matemática en el nivel de educación secundaria.

La aplicación de IA en la enseñanza de Matemática presento varios beneficios como la optimización de recursos, las evaluaciones diagnosticas para el desarrollo de cursos personalizados, actividades diseñadas para introducir y abordar contenidos, evaluaciones elaboradas automáticamente entorno a los temas seleccionados, sin embargo, se presentaron algunas desventajas, como las escasas prácticas colaborativas que se desarrollaron durante los cursos, ciertos estudios (Cárdenas, 2017; Fontoura, 2020; Mills, 2021) donde se determinó que la inclusión de los sistemas inteligentes no tuvo un impacto notorio en el rendimiento de los estudiantes o la falta de interacción personal por la individualización de la enseñanza.

8. Conclusiones

Luego de analizar los resultados obtenidos y los criterios de los diferentes autores en sus investigaciones se han establecido las siguientes conclusiones:

- La implementación de la inteligencia artificial en la enseñanza de la Matemática requiere considerar diversos aspectos, como los recursos técnicos y tecnológicos, los contenidos adecuados para impartir, la formación, la ética en su aplicación y la adaptación de los sistemas inteligentes al currículo educativo, estos elementos son fundamentales para garantizar una integración efectiva y beneficiosa de la IA en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- La inserción de la inteligencia artificial en la enseñanza de Matemáticas en la educación secundaria no sigue un proceso metodológico único, ya que no se implementan de manera consistente en toda su estructura, sin embargo, muestran una gran adaptabilidad en fases comunes presentes de forma inherente en los procesos revisados, en estas se puede aprovechar las capacidades de la IA para mejorar la educación, entre ellas se encuentran el desarrollo de actividades, contenidos, y evaluaciones siendo aspectos donde se corrobora una mayor aplicación y resultados beneficiosos, por otro lado, se observa una baja incorporación de prácticas colaborativas e interacción personal.
- El análisis del uso de la inteligencia artificial en la enseñanza de Matemática en el nivel de educación secundaria demuestra avances significativos, estos se orientan mayoritariamente a mejorar la eficiencia en el aprendizaje brindando opciones automatizables y personalizables con el desarrollo de tutores inteligentes especializados en la enseñanza y demás IA enfocadas al acompañamiento del estudiante, ambos casos respaldados por resultados porcentualmente favorables en su implementación.

9. Recomendaciones

Con base en las conclusiones establecidas se han planteado las siguientes recomendaciones para la aplicación de la IA en la enseñanza de Matemática:

- Tener en cuenta los siguientes aspectos en la implementación de la inteligencia artificial en la enseñanza de la Matemática: garantizar los recursos técnicos y tecnológicos para desarrollar las actividades, seleccionar los contenidos adecuados a impartir, brindar formación a los docentes, abordar éticamente la aplicación de la IA y adaptar los sistemas inteligentes a lo propuesto en el currículo educativo.
- Incentivar a los docentes a que aprovechen el potencial de la inteligencia artificial mediante la implementación de estos sistemas en el desarrollo de actividades, contenidos y evaluaciones, siendo estas las fases donde llega a ser más provechosa su inclusión, asimismo, se incita a contemplar una mayor inserción de prácticas colaborativas para mejorar la interacción con los estudiantes.
- Se recomienda a las autoridades nacionales elaborar normativas que regulen el uso y la creación de sistemas basados en inteligencia artificial para el ámbito educativo, con el objetivo de aprovechar el potencial de estas, concientizar a la ciudadanía sobre su aplicación, promover la ética en su utilización y proteger la privacidad de sus usuarios.

10. Bibliografía

- Abdala, M., Lacroix, S., y Soubie, S. (2019). *La política de la Inteligencia Artificial: sus usos en el sector público y sus implicancias regulatorias*. <https://www.cippecc.org/publicacion/la-politica-de-la-inteligencia-artificial-sus-usos-en-el-sector-publico-y-sus-implicancias-regulatorias/>
- Abeliuk, A., y Gutiérrez, C. (2021). Historia y evolución de la inteligencia artificial. *Revista Bits de Ciencia*, 21, 14–21. <https://revistasdex.uchile.cl/index.php/bits/issue/view/217>
- Arnau, D. (2015). Hacia profesores artificiales en la resolución algebraica de problemas verbales. *Investigación en Educación Matemática XIX*, 45–59. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5219282>
- Artigue, M. (2018). Epistemología y didáctica. *El Cálculo y su Enseñanza*, 11, 1–30. <https://recacym.org/index.php/recacym/issue/view/5>
- Aucahuasi, W., Bernardo, G., Bernardo, M., Vega, D., Urbano, R., y Oré, E. (2018). Herramienta interactiva en línea como instrumento para el aprendizaje de las matemáticas mediante las técnicas de programación, dirigido a alumnos de educación secundaria. *Proceedings of the 16th LACCEI International Multi-Conference for Engineering, Education, and Technology: "Innovation in Education and Inclusion"*. <https://doi.org/10.18687/LACCEI2018.1.1.573>
- Basantes, E. (2022). *Generación de estrategias didácticas virtuales para el mejoramiento en el proceso de enseñanza de sistemas de ecuaciones para los docentes- estudiantes de la Unidad Educativa Santa Mariana de Jesús Chimborazo-Riobamba*. [Máster universitario, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo]. <http://dspace.esepoch.edu.ec/handle/123456789/17292>
- Benjamín, R. (2020). *Perceptions of Adaptive Technology Usage in Secondary Math Classrooms* [Tesis Doctoral, Lynn University]. <https://spiral.lynn.edu/etds/354/>
- Blum, W., Borromeo, R., Kaiser, G., & Greefrath, G. (2013). Mathematisches Modellieren – Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. En *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule* (pp. 11–37). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-01580-0_1
- Bongcayao, N., Sobremisana, K., Ybañez, A., Tolosa, R., Ladroma, S., & Caparoso, K. (2023). Artificial Intelligence-Powered Calculator Application Usage in Mathematics Summative Assessments. *IRE Journals*, 6(10). <https://www.irejournals.com/paper-details/1704266>

- Calabuig, J., García-Raffi, L., y Sánchez-Pérez, E. (2021). Aprender como una máquina: introduciendo la Inteligencia Artificial en la enseñanza secundaria. *Modelling in Science Education and Learning*, 14(1), 5. <https://doi.org/10.4995/msel.2021.15022>
- Callejo, M., y Aranda, C. (2010). Diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje para la construcción del concepto de dependencia lineal. En *Investigación en educación matemática: actas del XIV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. 2010; p. 199-210. <http://hdl.handle.net/11162/47135>
- Cárdenas, G. (2017). *Efecto del uso de un recurso virtual de aprendizaje adaptativo en la enseñanza de la aritmética para estudiantes de sexto grado de la institución Francisco Arango de la Ciudad de Villavicencio* [Máster universitario, Universidad de la Sabana]. <http://hdl.handle.net/10818/31088>
- Casey, C. (2022). *Artificial Intelligence Curricula in Post-secondary Education: Are programs adequately preparing students for future technologies?* [Tesis Doctoral, Capitol Technology University]. <https://www.proquest.com/openview/b1efb425bed395e7c158b648c334bd62/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y>
- Charles, G. (2021). *The Implementation of Personalized Learning at Merryweather High School: A Case Study* [Tesis Doctoral, Manhattanville College]. <https://www.proquest.com/openview/1cc5a7185ceddbd3462e130b4881421c/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y>
- Cheung, Y., & Kai, Y. (2021). Application of the Educational Game to Enhance Student Learning. *Frontiers in Education*, 6. <https://doi.org/10.3389/feduc.2021.623793>
- Confrey, J., & Maloney, A. (2007). A Theory of Mathematical Modelling in Technological Settings. En *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 57–68). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_4
- Cousine, R. (2014). Qué es enseñar. *Memoria Académica*, 8(8), 1–5. <https://www.archivosdeciencias.fahce.unlp.edu.ar/article/view/Archivos08a08>
- Díaz, E. (2012). Estilos de Aprendizaje. *Eidos*, 5, 5. <https://doi.org/10.29019/eidos.v0i5.88>
- Díaz, L., y Careaga, M. (2021). Análisis acerca de la resolución de problemas matemáticos en contexto: estado del arte y reflexiones prospectivas. *Espacios*, 42(01), 131–145. <https://doi.org/10.48082/espacios-a21v42n01p11>
- Fernandes, J., y Manrique, A. (2021). Reflexiones emergentes de prácticas de un grupo colaborativo de profesores sobre los conocimientos necesarios para enseñar Matemática.

PARADIGMA, 269–290. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p269-290.id1015>

- Flores-Vivar, J., y García-Peñalvo, F. (2023). La vida algorítmica de la educación: Herramientas y sistemas de inteligencia artificial para el aprendizaje en línea. En *Desafíos y retos de las redes sociales en el ecosistema de la comunicación* (Vol. 1, pp. 109–121). McGraw-Hill. <https://repositorio.grial.eu/handle/grial/2871>
- Flores-Vivar, J., y García-Peñalvo, F. (2023). Reflexiones sobre la ética, potencialidades y retos de la Inteligencia Artificial en el marco de la Educación de Calidad (ODS4). *Comunicar*, 31(74), 37–47. <https://doi.org/10.3916/C74-2023-03>
- Fontoura, F. (2020). *Agente conversacional para auxiliar en la resolución de problemas de Matemática*. <http://repositorio.cfe.edu.uy/handle/123456789/1862>
- García-Soria, P. (2014). *Aprendizaje adaptativo online para matemáticas en alumnado de educación secundaria y bachillerato* [Máster universitario, Universidad Internacional de LA Rioja]. <https://reunir.unir.net/handle/123456789/3070>
- Godino, J. (2014). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *CIAEM*, 111–132. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14720>
- Goldin, G. (2020). Mathematical Representations. En *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 566–572). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_103
- Gómez-León, M. (2022). Development of empathy through Socioemotional Artificial Intelligence. *Papeles del Psicólogo - Psychologist Papers*, 43(3), 218. <https://doi.org/10.23923/pap.psicol.2996>
- González, C. (2023). Estrategias didácticas para evaluar los aprendizajes en un curso de matemática a nivel universitario. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 7(1), 5854–5467. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i1.4865
- González-Calatayud, V., Prendes-Espinosa, P., & Roig-Vila, R. (2021). Artificial Intelligence for Student Assessment: A Systematic Review. *Applied Sciences*, 11(12). <https://doi.org/10.3390/app11125467>
- Guerrero, C., Prieto, Y., y Noroña, J. (2018). La aplicación del aula invertida como propuesta metodológica en el aprendizaje de matemática. *Espíritu Emprendedor TES*, 2(1), 1–12. <https://doi.org/10.33970/eetes.v2.n1.2018.33>
- Haugsness, S. (2018). *Exploring Instructional Implementation Approaches of an Intelligent Tutoring System on Middle School Math Achievement* [Tesis doctoral, Grand Canyon

University].

<https://www.proquest.com/openview/798739c35996a76b466b0e3961fa0a0b/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750>

Huang, K. (2023). *Efecto ChatGPT: las universidades cambian sus formas de enseñanza.*

<https://www.nytimes.com/es/2023/01/18/espanol/chatgpt-plagio-universidad.html?smid=url-share>

Játiva, J., y Beltrán, J. (2021). Uso de la metodología STEAM para motivar a niños el uso de Inteligencia Artificial. *risti*, 42, 31–45.

<http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/25000/23616>

Kuz, A., Falco, M., Nahuel, L., y Giandini, R. (2016). Agent SocialMetric: herramienta de asistencia al docente para determinar el clima social y la estructura del aula. *Revista Iberoamericana de Informática Educativa*, 22, 16–29.

<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5162179>

Latorre, M. (2022). *Adaptación de la normativa europea de responsabilidad civil a la era digital y, en particular, a la inteligencia artificial: evaluación de la idoneidad de las nociones de producto, productor, defecto y daño contenidos en la Directiva 85/374/CEE* [Trabajo Final de Grado, Universidad Pompeu Fabra]. <http://hdl.handle.net/10230/53875>

Londoño-Valencia, A. (2016). Limits of Artificial Intelligence: a perspective from the psychobiological development. *Ventana Informática*, 35.

<https://doi.org/10.30554/ventanainform.35.1850.2016>

Luz, B., & Malbernat, L. (2021). Riesgos, dilemas éticos y buenas prácticas en inteligencia artificial. En *XXIII Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación* (1a ed., pp. 155–159). La Rioja. <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/119977>

Marienko, M., Nosenko, Y., & Shyshkina, M. (2020). *Personalization of learning using adaptive technologies and augmented reality.* <https://arxiv.org/abs/2011.05802>

Marín, F., y Fernández, G. (2020). Percepciones de estudiantes sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje asociado al uso guiado de la plataforma tecnológica Aleks en tiempos de pandemia. *Paideia. Revista de Educación*, 67, 89–116. <https://doi.org/10.29393/Pa67-3PESPX0003>

Marios, A. (2021). *Extracting Learning Analytics from Game Based Learning Sessions Generated by Multimodal Data Sources* [Master Universitario, Technological Institute of Crete]. <https://apothesis.lib.hmu.gr/handle/20.500.12688/9947>

- Martínez-García, D., Dalgo-Flores, V., Herrera-López, J., Analuisa-Jiménez, E., y Velasco-Acurio, E. (2019). Avances de la inteligencia artificial en salud. *Dominio de las Ciencias*, 5(3), 603. <https://doi.org/10.23857/dc.v5i3.955>
- Mendoza, I. (2018). *Plataforma virtual ALEKS y la influencia en el rendimiento académico de los estudiantes del curso de matemática básica de una Universidad Privada del ciclo 2018-01* [Tesis de Pregrado, Universidad Nacional del Callao]. <http://repositorio.unac.edu.pe/handle/20.500.12952/3836>
- Messer, D., Emily Cantrell, & Noelle Sweany. (2020). *Experiences of Secondary Math Teachers Implementing an Adaptive Personalized Learning Tool*. <https://oaktrust.library.tamu.edu/handle/1969.1/192489>
- Mills, N. (2021). ALEKS constructs as predictors of high school mathematics achievement for struggling students. *Heliyon*, 7(6), e07345. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2021.e07345>
- Ministerio de Educación de Ecuador. (2019). *Currículo de los Niveles de Educación Obligatoria*. [Documento en línea]. <https://educacion.gob.ec/curriculo/>
- Ministerio de Educación de Ecuador. (2021). Currículo priorizado con énfasis en competencias comunicacionales, matemáticas, digitales y socioemocionales. *República del Ecuador*, 1. [Documento en línea]. <https://educacion.gob.ec/curriculo-priorizado/>
- Mohamed, M., Hidayat, R., Suhaizi, N., Sabri, N., Mahmud, M., & Baharuddin, S. (2022). Artificial intelligence in mathematics education: A systematic literature review. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 17(3). <https://doi.org/10.29333/iejme/12132>
- Morales, I., y Jiménez, M. (2013). Educación Matemática a distancia online y el uso de los sistemas tutores inteligentes. *SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguaya*, 7, 6780–6787. <http://funes.uniandes.edu.co/19659/>
- Morales, M. (2023). *Herramientas dinámicas e inteligentes para innovación docente en el área de Matemáticas en la básica elemental de la escuela de educación básica “San Francisco de Asís”, de la ciudad de Riobamba* [Trabajo de Posgrado, Universidad Nacional de Chimborazo]. <http://dspace.unach.edu.ec/handle/51000/10351>
- Moreno, R. (2019). La llegada de la inteligencia artificial a la educación. *Revista de Investigación en Tecnologías de la Información*, 7(14), 260–270. <https://doi.org/10.36825/RITI.07.14.022>
- Moya, D. (2021). *Diseño de un modelo gratuito de preparación matemática pre-universitaria*. [Master Universitario, Universidad de Chile]. <https://repositorio.uchile.cl/handle/2250/181649>

- Nitkin, D., Ready, D. D., & Bowers, A. J. (2022). Using Technology to Personalize Middle School Math Instruction: Evidence from a Blended Learning Program in Five Public Schools. *Frontiers in Education*, 7. <https://doi.org/10.3389/feduc.2022.646471>
- Orellana, A., Chamba, L., y Daniel, R. (2021). Enseñanza-aprendizaje de la Inteligencia Artificial en primaria y secundaria. En *Investigación educativa en el Ecuador* (pp. 1–114). <http://repositorio.unae.edu.ec/handle/56000/2514>
- Owoc, M., Sawicka, A., & Weichbroth, P. (2021). *Artificial Intelligence Technologies in Education: Benefits, Challenges and Strategies of Implementation* (pp. 37–58). https://doi.org/10.1007/978-3-030-85001-2_4
- Özyurt, Ö., Özyurt, H., Baki, A., & Güven, B. (2013). Integration into mathematics classrooms of an adaptive and intelligent individualized e-learning environment: Implementation and evaluation of UZWEBMAT. *Computers in Human Behavior*, 29(3), 726–738. <https://doi.org/10.1016/j.chb.2012.11.013>
- Parra, H., y Villa, J. (2017). Vinculación de las matemáticas con la realidad. Implicaciones en la conformación del pensamiento profesional del docente. *Paradigma*, 38(1), 288–311. <https://hdl.handle.net/10495/8254>
- Peñaherrera, W., Cunuhay, Wi., Nata, D., y Moreira, L. (2022). Implementación de la Inteligencia Artificial (IA) como Recurso Educativo. *RECIMUNDO*, 402–413. <https://www.recimundo.com/index.php/es/article/view/1586>
- Pérez, D. (2015). *Caracterización de los estilos de aprendizaje en las matemáticas para la enseñanza del triángulo rectángulo* [Máster universitario, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey]. <https://repositorio.tec.mx/handle/11285/622462>
- Rodríguez, M. (2021). Sistemas de tutoría inteligente y su aplicación en la educación superior. *RIDE Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, 11(22). <https://doi.org/10.23913/ride.v11i22.848>
- Rouhiainen, L. (2018). *Inteligencia artificial: 101 cosas que debes saber hoy sobre nuestro futuro*. Editorial Planeta. <https://www.planetadelibros.com/libro-inteligencia-artificial/280581>
- Sebio, M. (2020). *Inteligencia Artificial y ética* [Grado en Administración y Dirección de Empresas y Grado en Relaciones Internacionales, Universidad Pontificia Comillas]. <http://hdl.handle.net/11531/37008>
- Sharma, L., & Garg, P. K. (2022). *Artificial Intelligence* (1a ed.). Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9781003140351>

- Sriraman, B. (2005). Theories of Mathematics Education: A global survey of theoretical frameworks/trends in mathematics education research. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(6), 450–456. <https://doi.org/10.1007/BF02655853>
- Taco, M. (2020). *Enseñanza de la Matemática: reformas curriculares 2010 – 2016 en Ecuador* [Máster universitario, Universidad Andina Simón Bolívar]. <http://hdl.handle.net/10644/7885>
- Tadapaneni, N. R. (2019). Artificial Intelligence in Finance and Investments. *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology*, 9(5). <https://philpapers.org/rec/TADAI-2>
- UNESCO. (2019). *Educación secundaria*. SITEAL. https://siteal.iiep.unesco.org/eje/educacion_secundaria
- UNESCO. (2021). *La Inteligencia Artificial en la Educación*. <https://es.unesco.org/themes/tic-educacion/inteligencia-artificial>
- Vivas, F. (2022). *2021: El año de la inteligencia artificial*. UDESA. <https://web.udesa.edu.ar/medios/2021-el-ano-de-la-inteligencia-artificial>
- Voskoglou, M., & Salem, A. (2020). Benefits and Limitations of the Artificial with Respect to the Traditional Learning of Mathematics. *Mathematics*, 8(4). <https://doi.org/10.3390/math8040611>
- Waits, P. (2020). *Does ALEKS Help with Mathematical Retention as Measured on the ACT* [Máster universitario, Shawnee State University]. https://digitalcommons.shawnee.edu/math_etd/19/
- Yanes, J. (2023). *La historia de la Inteligencia Artificial*. OpenMind BBVA. <https://www.bbvaopenmind.com/tecnologia/inteligencia-artificial/historia-de-la-inteligencia-artificial/>
- Zeba, G., Dabić, M., Čičak, M., Daim, T., & Yalcin, H. (2021). Technology mining: Artificial intelligence in manufacturing. *Technological Forecasting and Social Change*, 171, 120971. <https://doi.org/10.1016/j.techfore.2021.120971>
- Zhai, X., Chu, X., Chai, C., Jong, M., Istenic, A., Spector, M., Liu, J.-B., Yuan, J., & Li, Y. (2021). A Review of Artificial Intelligence (AI) in Education from 2010 to 2020. *Complexity*, 2021, 1–18. <https://doi.org/10.1155/2021/8812542>
- Zhou, H., Sulee, W., & Wang, Z. (2022). Curriculum Innovation and Students' Learning Ability: An Empirical Study in Primary and Secondary Schools in Guizhou, China. *Guizhou, China*. <https://conference.stamford.edu/2022-conference/>

11. Anexos

Anexo 1. Guía Didáctica

GUÍA DIDÁCTICA

Implementación de ALEKS en la enseñanza de Sistemas de Ecuaciones en el Décimo grado de Educación General Básica.

Presentado por: Pablo Fernando González Jiménez

Tutor: Fabricio Vladimir Vines Vines

Índice

Título de la propuesta	49
Presentación	50
Objetivos.....	51
Justificación.....	52
Planificación.....	53
Desarrollo de la propuesta	59
Resultados esperados.....	105
Bibliografía	106
Anexos.....	107

Título de la propuesta

Guía de trabajo sobre la implementación de ALEKS en la enseñanza de
Sistemas de Ecuaciones en el Décimo grado de Educación General Básica.

Presentación

La presente guía didáctica detalla el proceso de desarrollo de clases para la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales en el décimo año de Educación General Básica incluyendo en su diseño la herramienta con inteligencia artificial Assessment and LEarning in Knowledge Spaces (ALEKS), parte de una planificación con énfasis en competencias Matemáticas y Digitales contemplando los objetivos, destrezas, contenidos, recursos y evaluación.

Esta guía muestra la forma de uso de ALEKS para complementar la enseñanza de los métodos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales, incorporando contenido, ejercicios y problemas desarrollados con varios recursos informáticos. Para ello la guía didáctica cuenta con los siguientes elementos: portada, para la identificación; presentación, que exhibe los apartados a tratar; objetivos, a los que se pretende llegar; justificación, del por qué y cómo se elabora esta propuesta; desarrollo de la guía, que expone el contenido del tema tratado; resultados esperados, a partir de la ejecución del trabajo; bibliografía y anexos.

Objetivos

Objetivo general:

Fortalecer la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales en el décimo grado de Educación General Básica implementando ALEKS como software con inteligencia artificial.

Objetivos específicos:

- Fundamentar teóricamente los elementos de un sistema de ecuaciones lineales y sus métodos de resolución.
- Diseñar una secuencia de actividades para enseñar de sistemas de ecuaciones lineales en el décimo grado de Educación General Básica incluyendo a ALEKS.

Justificación

La investigación previa permitió identificar las herramientas con inteligencia artificial (IA) favorables para la enseñanza de Matemática, entre estas, los resultados demuestran que el aplicativo ALEKS tiene un índice de utilización mayor frente a los demás software revisados, razón por la cual la guía adapta esta IA para complementar el aprendizaje. Dentro de los procesos metodológicos se resaltan las fases de desarrollo de actividades y evaluación como recurrentes y favorables para el aprendizaje, por ello la IA se implementará dentro de estas dos.

Para la construcción del presente trabajo se contemplan los aspectos necesarios y uno de los procesos metodológicos más usados y con mejores resultados para la inserción de la IA en el nivel de educación secundaria, entre estos resalta la reiterada aparición del modelo ACC (Anticipación, Construcción y Consolidación) que es empleado como base para organizar los contenidos de la presente guía. El tema dispuesto a desarrollar surge de la necesidad de reforzar el octavo estándar de Matemática de quinto nivel (E.M.5.8.) que según los resultados presentados en el proceso Ser Estudiante 2021-2022, se obtuvo una valoración de “desempeño elemental” del 38,1 % y “necesita refuerzo” en un 53,6 %, este hace referencia a la resolución de sistemas de ecuaciones por varios métodos, consecuentemente se determina que el grado óptimo para desarrollar este contenido es el Décimo año de Educación General Básica.

Planificación

La planificación está enmarcada en el currículo con énfasis en competencias que el Ministerio de Educación del Ecuador actualmente promueve. Se desarrolla con base al tema de Sistemas de Ecuaciones Lineales para Décimo Año de Educación General Básica.



UNIDAD EDUCATIVA

Escudo de la
unidad educativa

Dirección: _____
Teléfono: _____

PLANIFICACIÓN MICROCURRICULAR POR PARCIAL 2022 – 2023

DATOS INFORMATIVOS					
Nombre del docente:		Área:	Matemática	Asignatura:	Matemática
Unidad didáctica:		Grandes ideas:	Ciencia, tecnología y sociedad	Números de semanas:	
Grado/Curso:	Decimo grado de EGB	Paralelos:		Fecha:	Del _____ al _____

APRENDIZAJE DISCIPLINAR

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:
Representar y resolver de manera gráfica (utilizando las TIC) y analítica sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, para aplicarlos en la solución de situaciones concretas. **REF. O.M.4.3.**

DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO	INDICADORES DE EVALUACIÓN	ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS ACTIVAS PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE	ACTIVIDADES EVALUATIVAS
<p>Clase 1 Fecha: M.4.1.54. Reconocer la intersección de dos rectas como la solución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.</p>	<p>I.M.4.3.5. Plantea y resuelve problemas que involucren sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ecuaciones de segundo grado y la aplicación de las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado; juzga la validez de las soluciones obtenidas en el contexto del problema.</p>	<p>Tema 1: Sistemas de ecuaciones lineales Evaluación diagnóstica en ALEKS Anticipación</p> <ul style="list-style-type: none"> Evaluación diagnóstica en ALEKS para identificar el nivel de conocimiento de los estudiantes sobre sistemas de ecuaciones. Explicar acerca del análisis y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en la vida real, destacando su importancia. 	<ul style="list-style-type: none"> - Consulta sobre los diferentes métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales y escribe tres ejemplos. - Evaluación diagnóstica ALEKS (Verificación inicial de conocimientos). - Actividades colaborativas - Trabajo en ALEKS



- Explicar qué son los sistemas de ecuaciones lineales y cómo permiten resolver situaciones con múltiples incógnitas bajo condiciones específicas.

Construcción

- Presentar las generalidades de los sistemas de ecuaciones lineales, como su notación y clasificación en compatibles, compatibles determinados, compatibles indeterminados e incompatibles.

Clase expositiva de:

- Resolución de sistemas por el método gráfico.
- Explicación de los métodos para resolver sistemas de ecuaciones: sustitución, reducción, igualación, regla de Cramer y método de Gauss.
- Explorar cómo se resuelven problemas similares en distintas disciplinas y contextos.

Consolidación

- Utilizar Geogebra para resolver los ejercicios planteados por el método gráfico.
- Asignar tareas o actividades en ALEKS para que los estudiantes resuelvan problemas adicionales sobre sistemas de ecuaciones utilizando la regla de Cramer y el método de Gauss.
- Evaluar el progreso de los estudiantes a través de evaluaciones en ALEKS sobre el tema.

<p>Clase 2 27 de junio al 01 de julio de 2023 M.4.1.55. Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica, utilizando los métodos de determinante (Cramer), de igualación, y de eliminación gaussiana.</p> 	<p>I.M.4.3.5. Plantea y resuelve problemas que involucren sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ecuaciones de segundo grado y la aplicación de las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado; juzga la validez de las soluciones obtenidas en el contexto del problema.</p> 	<p style="text-align: center;">Anticipación</p> <ul style="list-style-type: none"> • Hacer un breve repaso sobre el objetivo de resolver sistemas de ecuaciones y cómo se aplican en situaciones de la vida real. • Proporcionar un ejemplo para ilustrar su utilidad práctica. <p style="text-align: center;">Construcción</p> <p>Clase expositiva de:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Resolución de sistemas por el método de sustitución. • Resolución de sistemas por el método de reducción. • Resolución de sistemas por el método de igualación. <p>Actividades en casa.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Revisar los videos sobre los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. https://www.youtube.com/watch?v=LTfv1G2iYuQ https://www.youtube.com/watch?v=TR27etegq7g https://www.youtube.com/watch?v=i1pXpCNaKDe • En clase, realizar una breve sesión de preguntas y respuestas para asegurarse de que los estudiantes hayan comprendido el contenido presentado. <p style="text-align: center;">Consolidación</p> <p>Actividades en casa. Materiales: computadoras o dispositivos inteligentes con acceso a ALEKS.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Asignar tareas o actividades en ALEKS para que los estudiantes resuelvan problemas adicionales sobre sistemas de ecuaciones utilizando la regla de Cramer y el método de Gauss. • Evaluar el progreso de los estudiantes a través de evaluaciones en ALEKS sobre el tema. 	<ul style="list-style-type: none"> - Revisión sobre los contenidos propuestos en la guía. - Actividades asignadas en ALEKS
<p>Clase 2 27 de junio al 01 de julio de 2023 M.4.1.55. Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera</p>	<p>I.M.4.3.5. Plantea y resuelve problemas que involucren sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ecuaciones de segundo grado y la aplicación de las propiedades de las raíces de la</p>	<p style="text-align: center;">Anticipación</p> <ul style="list-style-type: none"> • Introducir el tema de resolución de sistemas de ecuaciones por la regla de Cramer y el método de Gauss. • Explicar brevemente la importancia de estos métodos en matemáticas y aplicaciones prácticas. 	<ul style="list-style-type: none"> - Revisión sobre los contenidos propuestos en la guía. - Actividades asignadas en ALEKS

<p>algebraica, utilizando los métodos de determinante (Cramer), de igualación, y de eliminación gaussiana.</p>  	<p>ecuación de segundo grado; juzga la validez de las soluciones obtenidas en el contexto del problema.</p>  	<p style="text-align: center;">Construcción</p> <p>Clase expositiva de:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Resolución de sistemas por la regla de Cramer: explicar cómo este método utiliza determinantes para encontrar las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales con el mismo número de ecuaciones y variables. • Resolución de sistemas por el método de Gauss: explicar cómo el método de Gauss utiliza operaciones elementales para transformar el sistema de ecuaciones en una forma triangular y luego despejar las incógnitas. • Mostrar ejemplos prácticos para cada método y resolverlos paso a paso en el pizarrón. <p style="text-align: center;">Consolidación</p> <p>Actividades en casa. Materiales: computadoras o dispositivos inteligentes con acceso a ALEKS.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Solicitar a los estudiantes que resuelvan problemas en grupos utilizando la regla de Cramer y el método de Gauss, supervisar y brindar asistencia cuando sea necesario. • Asignar tareas o actividades en ALEKS para que los estudiantes resuelvan problemas adicionales sobre sistemas de ecuaciones utilizando la regla de Cramer y el método de Gauss. <p>Evaluar el progreso de los estudiantes a través de evaluaciones en ALEKS sobre el tema.</p>	
--	---	---	--

<p>Clase 3 Fecha: M.4.1.56. Resolver y plantear problemas de texto con enunciados que involucren funciones lineales y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.</p> 	<p>I.M.4.3.5. Plantea y resuelve problemas que involucren sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ecuaciones de segundo grado y la aplicación de las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado; juzga la validez de las soluciones obtenidas en el contexto del problema.</p> 	<p>Anticipación</p> <ul style="list-style-type: none"> Recordar los conceptos clave y métodos aprendidos en la clase previa sobre la resolución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando diferentes técnicas (por ejemplo, sustitución, reducción, igualación, regla de Cramer y método de Gauss). <p style="text-align: center;">Construcción</p> <p>Clase expositiva de:</p> <ul style="list-style-type: none"> Ejemplos y aplicaciones con tecnología: Mostrar ejemplos prácticos de cómo utilizar software matemático y herramientas tecnológicas para resolver problemas más complejos, como sistemas de ecuaciones con un gran número de variables o ecuaciones no lineales. Discusión sobre aplicaciones en el mundo real: Facilitar una discusión sobre cómo la resolución de sistemas de ecuaciones complejas puede tener aplicaciones en campos como la ingeniería, la física, la economía, entre otros. <p style="text-align: center;">Consolidación</p> <ul style="list-style-type: none"> Realizar ejercicios utilizando la tecnología mencionada para resolver sistemas de ecuaciones complejas. Realizar una breve evaluación en ALEKS para medir la comprensión de los estudiantes sobre sistemas de ecuaciones lineales. 	<ul style="list-style-type: none"> Revisión sobre los contenidos propuestos en la guía. Actividades asignadas en ALEKS
--	--	--	--

Desarrollo de la propuesta

Consideraciones:

- El desarrollo de la propuesta se guía en los contenidos propuestos en el texto guía del décimo grado de Educación General Básica Superior.
- Varias de las imágenes presentadas están diseñadas por la IA [DreamStudio](#).
- Algunos ejercicios propuestos fueron generados por la IA [Conker](#).
- El apartado de consolidación está diseñado en base a [ALEKS](#), por lo que los contenidos y datos de los ejercicios pueden variar según el uso y respuestas que los estudiantes desarrollen dentro de la plataforma.
- Para el óptimo desarrollo de la guía se enfatiza considerar los aspectos necesarios para insertar la IA en la educación, haciendo hincapié en los recursos técnicos y tecnológicos. Se recomienda garantizar el acceso a los estudiantes a dispositivos inteligentes donde puedan interactuar con las herramientas y sitios recomendados.

Guía de colores que se presentan:

Actividades asíncronas	Contenido en línea	Recuento de contenidos
Datos adicionales	Historia e indicaciones	Definiciones
Objetivos		

Actividad Previa

Con el objetivo de practicar ecuaciones a continuación, se dispone de un recurso didáctico desarrollado en [Exelearning](#). 

Guías del recurso:

[Docente](#)

[Estudiantes](#)

? Completa la siguiente ecuación ^

Nota: Recuerda separar los signos matemáticos de las cantidades con un espacio, como por ejemplo $10x + 3$.

6 ✓ 0 ✗ 0 0 

$$2x + 4x + 9 = 39$$

=

=

x =

x =

? Completa la siguiente ecuación ^

Lee el texto y completa las palabras que faltan.

12 ✓ 0 ✗ 0 0 

$$2x + 4(3x - 7) = 28$$

=

=

=

=

=

=

=

? Rellenar huecos ^

Supongamos que tienes un presupuesto de \$500 y deseas comprar camisetas para tu equipo deportivo. Si cada camiseta tiene un costo de \$25, ¿Cuántas camisetas puedes comprar dentro de tu presupuesto?

Nota: Recuerda separar los signos matemáticos de las cantidades con un espacio, como por ejemplo $10 / 3$.

a) ¿Cuál es el presupuesto disponible y el costo de cada camiseta?

- El presupuesto disponible es de:
- El costo de cada camiseta es de:

b) ¿Cómo podemos expresar la relación entre el presupuesto, el costo de cada camiseta y la cantidad de camisetas que puedes comprar?

- Podemos plantear la ecuación en base al presupuesto total y el costo de cada camiseta:

c) ¿Cuántas camisetas puedes comprar dentro del presupuesto establecido?

x =

x =

d) ¿Qué significa el número obtenido en términos de la cantidad de camisetas que puedes comprar dentro de tu presupuesto?

- Esto significa que podrás equipar a tu equipo deportivo con camisetas sin exceder tu presupuesto.

Desarrollo de clases

Clase 1	
Curso	10 año de EGB
Asignatura	Matemática
Tema	Sistemas de Ecuaciones
Recursos	Dispositivo con acceso a GeoGebra y ALEKS
Destreza	M.4.1.54. Reconocer la intersección de dos rectas como la solución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.  
Indicador de Evaluación:	I.M.4.3.5. Plantea y resuelve problemas que involucren sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ecuaciones de segundo grado y la aplicación de las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado; juzga la validez de las soluciones obtenidas en el contexto del problema.  
Ciclo de Aprendizaje	ACC

Anticipación

Objetivo: En esta fase se explora el tema de los sistemas de ecuaciones lineales y cómo se aplican en situaciones de la vida real, se percibe su importancia en distintos campos y se da a conocer cómo ayudan a resolver problemas con múltiples incógnitas.

Indicaciones:

los estudiantes serán recibidos y se presentará el tema.

Ejemplos:

en ingeniería, economía, administración, manufactura y química.

Ingeniería:

- Análisis de circuitos eléctricos: se utilizan para resolver circuitos complejos y determinar las corrientes y voltajes en cada componente.

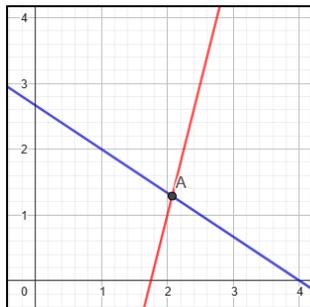
Economía:

- Planificación de inversiones: los sistemas de ecuaciones lineales pueden ayudar a optimizar la asignación de recursos y maximizar los rendimientos.

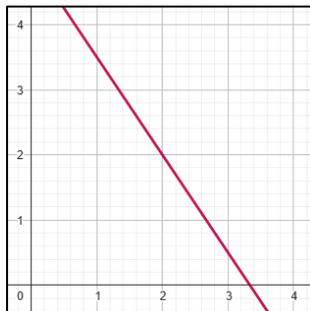
Administración:

- Gestión de inventario: los sistemas de ecuaciones lineales se utilizan para determinar los niveles óptimos de stock y minimizar costos de almacenamiento.

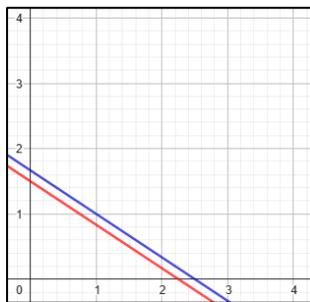
Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales



Compatible determinado



Compatible indeterminado



Incompatible

- Compatibles. Aquellos que tienen solución. Estos a su vez pueden ser:

- Compatibles determinados. Aquellos para los cuales hay una única solución.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$$

Este sistema tiene una única solución, porque las rectas solo se intersectan en un punto.

- Compatibles indeterminados. Aquellos que tienen infinitas soluciones.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 6x + 4y = 20 \end{cases}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones, ambas ecuaciones tienen múltiplos lineales una de la otra, se superponen sus rectas por lo que generan infinitos puntos de intersección.

- Incompatibles. Aquellos que carecen de solución.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 9 \end{cases}$$

Este sistema no tiene solución, ya que las ecuaciones son inconsistentes y no pueden ser satisfechas al mismo tiempo, sus rectas nunca se intersectan.

Resolución de un sistema de ecuaciones

Se trabajarán los métodos para solucionar sistemas de ecuaciones 2×2 , pero cabe anotar que varios de estos sirven además para solucionar los sistemas 3×3 y, con algunas variaciones, también para solucionar sistemas $m \times n$.

Métodos para solucionar un sistema de ecuaciones:

- Gráficas de las ecuaciones lineales
- Método de Igualación
- Método de Sustitución
- Regla de Cramer
- Método de Reducción
- Método de Gauss

Resolución de sistemas por el método gráfico

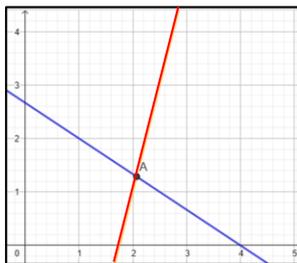
La resolución de sistemas por el método gráfico implica representar las ecuaciones como rectas en un plano, la o las soluciones se hallan en los puntos de intersección de estas, ofreciendo una visualización intuitiva de los resultados, adecuada principalmente para sistemas con dos variables.



1. Graficar cada ecuación. Exprese cada ecuación en una forma apropiada para la calculadora graficadora para despejar y en función de x . Grafique las ecuaciones en la misma pantalla.

●	ec1 : $2x + 3y = 8$
●	ec2 : $4x - y = 7$
●	A = Interseca(ec2, ec1) = (2.07, 1.29)
+	Entrada...

2. Hallar los puntos de intersección. Las soluciones son las coordenadas x y y de los puntos de intersección.



Ejemplo:

Para solucionar un sistema de ecuaciones lineales, cada una de las ecuaciones generales tiene que transformarse en ecuaciones de la forma $y = mx + b$ punto-pendiente.

Las ecuaciones son:

$$y = \frac{31}{2} - \frac{7x}{2} \qquad y = -\frac{4x}{3} + 9$$

Para la primera ecuación se tiene que: $m = -\frac{7}{2}$ y $b = \frac{31}{2}$

Para la segunda ecuación se tiene que: $m = -\frac{3}{4}$ y $b = 9$

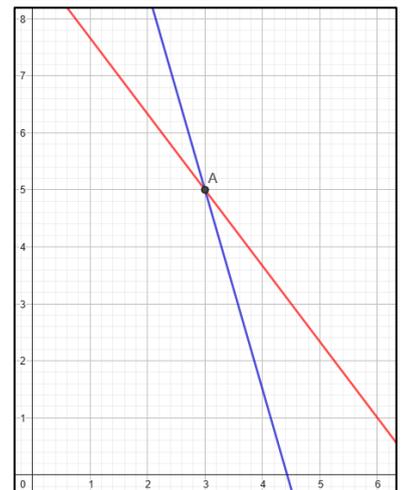
Ahora se grafican las ecuaciones, conservando una escala adecuada, y se busca el punto que las dos rectas tienen en común.

Se observa que el punto en el cual se intersecan las dos rectas es (3, 5); es decir la solución del sistema es $x = 3$; $y = 5$

Existen diversos software y sitios donde puedes graficar ecuaciones, el más común y fácil de manejar es GeoGebra:

<https://www.geogebra.org/classic>

●	ec1(x) = $\frac{31}{2} - \frac{7x}{2}$
●	ec2(x) = $-\frac{4x}{3} + 9$
●	A = Interseca(ec1, ec2) = (3, 5)



Otras graficadoras:

Desmos:
<https://www.desmos.com/calculator>

Wolfram Alpha:
<https://www.wolframalpha.com/>

Symbolab Graphing Calculator:
<https://www.symbolab.com/graphing-calculator>

Graphsketch:
<https://www.graphsketch.com/>



Pasos para resolver ecuaciones por el método gráfico

Paso 1: Escribir las ecuaciones en forma estándar, es decir, donde las variables están en el lado izquierdo de la igualdad y las constantes en el lado derecho. Asegúrate de que ambas ecuaciones estén en la forma " $y = mx + b$ " (ecuación de una recta).

Primera ecuación

$$-6x + \frac{y}{3} = 9$$

$$\frac{y}{3} = 6x + 9$$

$$\frac{3y}{3} = \frac{6x}{3} + \frac{9}{3}$$

$$y = 2x + 3$$

Segunda ecuación

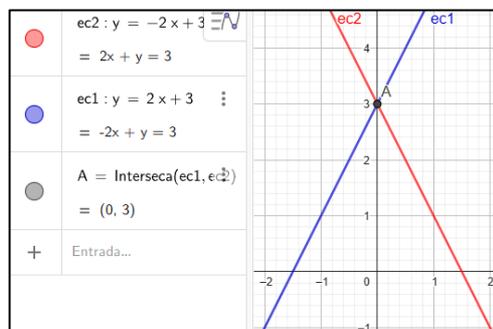
$$6x + \frac{y}{3} = 9$$

$$\frac{y}{3} = -6x + 9$$

$$\frac{3y}{3} = -\frac{6x}{3} + \frac{9}{3}$$

$$y = -2x + 3$$

Paso 2: Graficar las ecuaciones en un plano cartesiano (un sistema de coordenadas) en un papel o en una herramienta gráfica. Etiqueta los ejes x y y , luego grafica las dos ecuaciones en el plano cartesiano utilizando su pendiente y su intersección con el eje y .



x	y	x	y
3	9	3	-3
2	7	2	-1
1	5	1	1
0	3	0	3
-1	1	-1	5
-2	-1	-2	7
-3	-3	-3	9

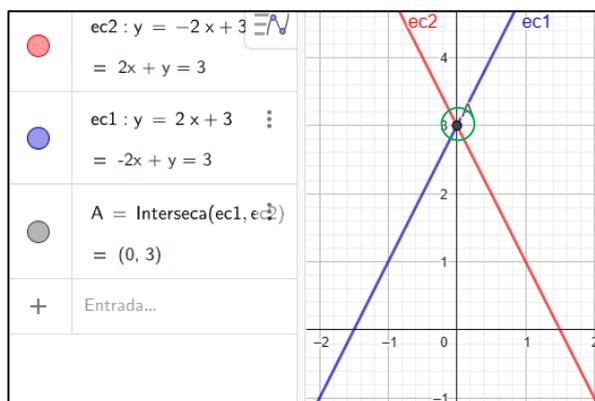
Recuerda:

Compatibles. Aquellos que tienen solución. Estos a su vez pueden ser:

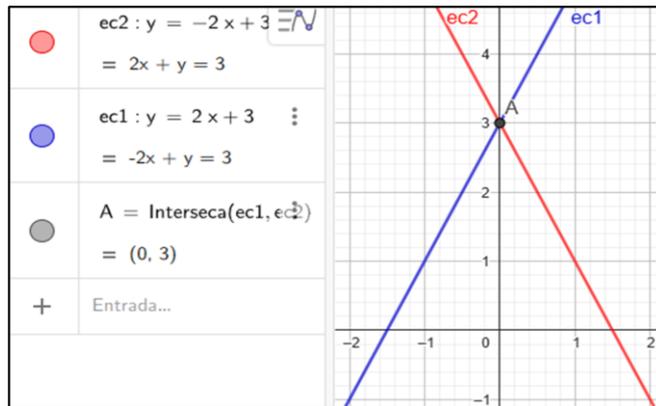
- Compatibles determinados. Aquellos para los cuales hay una única solución.
- Compatibles indeterminados. Aquellos que tienen infinitas soluciones.

Incompatibles. Aquellos que carecen de solución.

Paso 3: Busca el punto de intersección entre las dos rectas graficadas en el plano cartesiano. Este punto representa la solución del sistema de ecuaciones, si existe.



Paso 4: Determinar la solución del sistema Una vez que hayas encontrado el punto de intersección, identifica sus coordenadas (x, y) . Estas coordenadas representan las soluciones del sistema de ecuaciones lineales.



$$x = 0; \quad y = 3$$

Paso 5: Comprobar la solución (opcional), puedes comprobar que las coordenadas del punto de intersección satisfacen ambas ecuaciones originales del sistema. Si las coordenadas cumplen con ambas ecuaciones, entonces has encontrado la solución correcta.

$$y = 2x + 3$$

$$3 = (0)x + 3$$

$$3 = 0 + 3$$

$$3 = 3$$

$$y = -2x + 3$$

$$3 = -(0)x + 3$$

$$3 = 0 + 3$$

$$3 = 3$$

Actividad: Graficando Pares de Ecuaciones

Practicar el método gráfico y visualizar su solución.

Instrucciones:

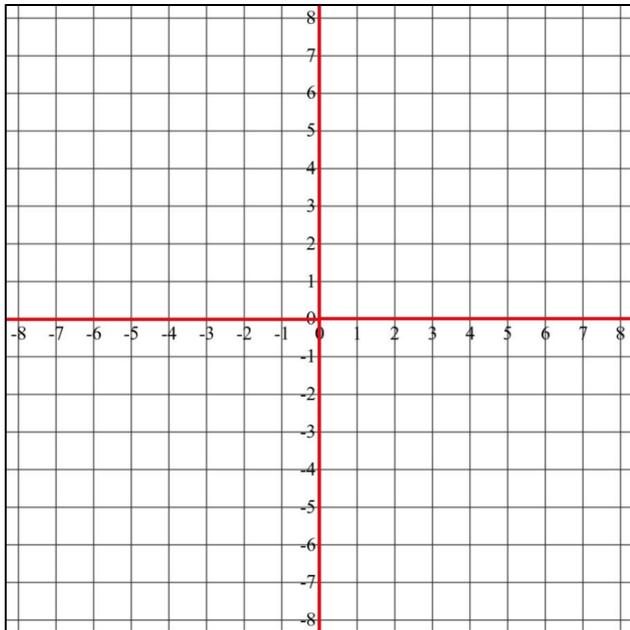
1. **Resuelve** el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método gráfico

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$$



El método gráfico para sistemas de ecuaciones lineales fue desarrollado por René Descartes, matemático francés del siglo XVII. Usó coordenadas cartesianas y representó cada ecuación como una línea en un plano, donde el punto de intersección de las líneas indicaba la solución del sistema. Su trabajo en geometría analítica sentó las bases para resolver problemas matemáticos mediante gráficos, siendo una herramienta valiosa que aún se utiliza en la actualidad. (Hoekenga et al., 2013)

2. **Grafica** la ecuación 1 y la ecuación 2 en un plano cartesiano utilizando papel cuadrado o una herramienta en línea.



3. Encuentra el punto de intersección de las líneas graficadas. Anota las coordenadas y los valores de las variables

4. **Verifica:** Sustituye las coordenadas del punto de intersección en ambas ecuaciones originales. ¿Las coordenadas satisfacen ambas ecuaciones?

Para practicar:

1. Resolver por el método gráfico

a)
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 5x - 2y = 10 \\ -x + 4y = 8 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

Actividades Adicionales

2 Resolución de sistemas por el método gráfico

Matemática TICS

Grafica sistemas de ecuaciones con **GeoGebra**

A continuación se presenta el procedimiento para graficar el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$$

- Primero, en el menú **Apariencias**, selecciona la opción **Álgebra y Gráficos**. Después de hacerlo, verás una pantalla como la que se muestra a la derecha.
- Luego, en la parte inferior de la ventana encontrarás una barra llamada **Entrada**. En este lugar se digita la ecuación de la función que vas a graficar.
- Al presionar la tecla **Enter**, aparece el plano y la ecuación correspondiente en el margen izquierdo.

Para determinar las coordenadas del punto con una cuadrícula a la ventana, selecciona en la parte superior **Preferencias**. Allí, elige **Vista gráfica**, **Mostrar cuadrícula** dando clic en la opción **Mostrar**.

- Repite el procedimiento para la segunda ecuación.

Bloque de Álgebra y funciones

Destaca con criterios de desempeño: Reconocer a la intersección de dos rectas cómo la solución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Grafica en el plano cartesiano las ecuaciones de cada sistema. Luego, determina su solución.

a.
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$$

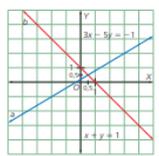
b.
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 0,2x + 0,5y = 0,1 \end{cases}$$

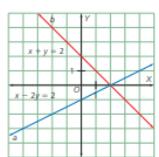
c.
$$\begin{cases} x = -1 + y \\ x + y = 1 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

Razonamiento

3 Determina la solución del sistema de ecuaciones en cada caso. Verifícala, reemplazándola en las ecuaciones.

a.  Figura 8

b.  Figura 9

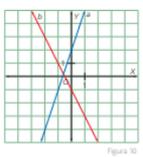
4 Propón una ecuación que forme un sistema de ecuaciones con $6x - 2y = -3$ de tal forma que sea:

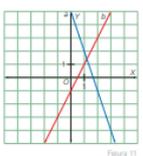
- Determinado
- Indeterminado
- Incompatible

Luego, representa la solución gráfica de cada uno de los sistemas que planteaste. Finalmente, explica las diferencias, tanto en las gráficas como en las ecuaciones, de los tres sistemas.

Comunicación

5 Determina la ecuación de las rectas del sistema dado. Luego, los valores aproximados para su solución.

a.  Figura 10

b.  Figura 11

Resolución de problemas

6 Plantea un sistema de ecuaciones que tenga la solución dada. Ubica dicho punto en el plano y grafica las rectas que forman el sistema que propusiste.

- $x = 2$ $y = 21$
- $x = 4,5$ $y = 2$
- $x = -2$ $y = -0,5$

El contenido presentado en el enlace tiene actividades relacionadas a la resolución de sistemas de ecuaciones por el método gráfico.

[Enlace](#)

Consolidación

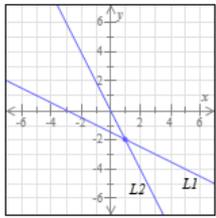
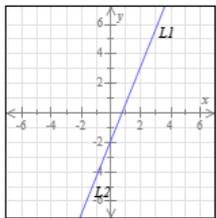
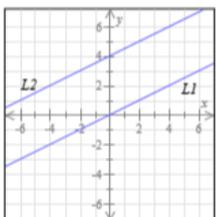
Materiales:

- Computadora o dispositivo con acceso a Geogebra (versión en línea o instalada) y ALEKS.
- Proyector o pizarra interactiva para mostrar Geogebra al grupo.
- Utilizar Geogebra para resolver los ejercicios planteados por el método gráfico.
- Asignar tareas o actividades en ALEKS para que los estudiantes resuelvan problemas adicionales sobre sistemas de ecuaciones lineales 

Actividad 1

Clasificar un sistema de ecuaciones lineales de gráficos
Eliminar tema

Para cada [sistema de ecuaciones lineales](#) a continuación, clasificar el sistema como "consistente dependiente," "consistente independiente," o "inconsistente." Luego, contestar la pregunta sobre las soluciones.

<p>Recta 1 : $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$</p> <p>Recta 2 : $y = -2x$</p> 	<p>Este sistema de ecuaciones es:</p> <p><input type="radio"/> inconsistente</p> <p><input type="radio"/> consistente independiente</p> <p><input type="radio"/> consistente dependiente</p>	<p>Esto significa que el sistema tiene:</p> <p><input type="radio"/> una solución única Solución: (,)</p> <p><input type="radio"/> no tiene solución</p> <p><input type="radio"/> soluciones infinitas</p>
<p>Recta 1 : $y = \frac{5}{2}x - 2$</p> <p>Recta 2 : $-5x + 2y = -4$</p> 	<p>Este sistema de ecuaciones es:</p> <p><input type="radio"/> inconsistente</p> <p><input type="radio"/> consistente independiente</p> <p><input type="radio"/> consistente dependiente</p>	<p>Esto significa que el sistema tiene:</p> <p><input type="radio"/> una solución única Solución: (,)</p> <p><input type="radio"/> no tiene solución</p> <p><input type="radio"/> soluciones infinitas</p>
<p>Recta 1 : $y = \frac{1}{2}x$</p> <p>Recta 2 : $y = \frac{1}{2}x + 4$</p> 	<p>Este sistema de ecuaciones es:</p> <p><input type="radio"/> inconsistente</p> <p><input type="radio"/> consistente independiente</p> <p><input type="radio"/> consistente dependiente</p>	<p>Esto significa que el sistema tiene:</p> <p><input type="radio"/> una solución única Solución: (,)</p> <p><input type="radio"/> no tiene solución</p> <p><input type="radio"/> soluciones infinitas</p>

Actividad 2

Resolver un sistema de ecuaciones lineales gráficamente

Eliminar tema

Trazar el gráfico del [sistema](#) siguiente y escribir su solución.

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$

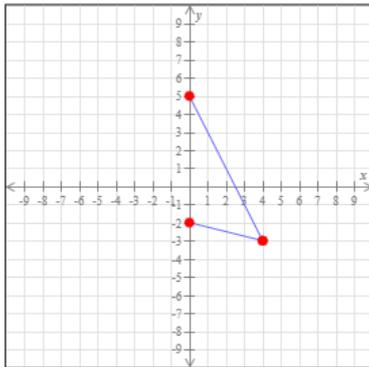
Observe que también se puede contestar "No tiene solución" o "Número infinito" de soluciones.

Trazar el gráfico del [sistema](#) siguiente y escribir su solución.

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Observe que también se puede contestar "No tiene solución" o "Número infinito" de soluciones.

Escribir un [sistema de ecuaciones lineales](#) para el siguiente gráfico.



$$\begin{cases} y = \square \\ y = \square \end{cases}$$

Nota: los contenidos extraídos de ALEKS están sujetos a cambios en función del avance de los estudiantes en la plataforma

Clase 2	
Curso	Matemática
Asignatura	10 año de EGB
Tema	Métodos para resolver sistemas de Ecuaciones
Recursos	Dispositivo con acceso a GeoGebra y ALEKS
Destreza	M.4.1.54. Reconocer la intersección de dos rectas como la solución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.  
Indicador de Evaluación:	I.M.4.3.5. Plantea y resuelve problemas que involucren sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ecuaciones de segundo grado y la aplicación de las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado; juzga la validez de las soluciones obtenidas en el contexto del problema.  
Ciclo de Aprendizaje	ACC

Anticipación

Objetivo: Explorar y comprender diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones (sustitución, reducción e igualación).

Indicaciones:

Conceptos básicos de sistemas de ecuaciones y su importancia en la resolución de problemas matemáticos.

Actividades en casa.

- Revisar los videos sobre los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

<https://www.youtube.com/watch?v=LTfv1G2iYuQ>

<https://www.youtube.com/watch?v=TR27etegq7g>

<https://www.youtube.com/watch?v=i1pXpCNaKDc>

En clase, realizar una breve sesión de preguntas y respuestas para asegurarse de que los estudiantes hayan comprendido el contenido presentado.

Preguntas:

Resolución por el método de sustitución:

- ¿En qué consiste el método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones lineales y cuál es el paso clave para su aplicación?
- ¿Cuál es la ventaja principal del método de sustitución sobre otros métodos de resolución de sistemas de ecuaciones?

Resolución por el método de reducción:

- ¿Qué ocurre si al sumar o restar las ecuaciones en el método de reducción, los coeficientes de una de las incógnitas son iguales, pero de signo opuesto?
- ¿Cuál es el número de soluciones posibles que puede tener un sistema de ecuaciones lineales cuando se resuelve por el método de reducción?

Resolución por el método de igualación:

- ¿Qué se logra al igualar las dos ecuaciones en este método y cómo se procede a resolver el sistema?
- ¿Cuál es la importancia de asegurarse de que la incógnita seleccionada tenga el mismo coeficiente en ambas ecuaciones para utilizar el método de igualación?

Los métodos de sustitución, eliminación y reducción son fundamentales en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Estas técnicas permiten abordar problemas matemáticos al encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen múltiples ecuaciones simultáneamente.

Construcción

Resolución de sistemas por el método de sustitución.

Una manera de solucionar un sistema de ecuaciones se basa en el principio lógico de la sustitución, en el cual se propone escribir una incógnita en términos de la otra para una de las ecuaciones y, después, sustituir esta expresión en la otra ecuación.



Para aplicar el método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones lineales, considera lo siguiente:

- Asegúrate de tener un sistema de ecuaciones con al menos dos ecuaciones e incógnitas.
- Elige una ecuación donde puedas despejar una variable de manera sencilla.
- Si las ecuaciones son demasiado complejas para un despeje sencillo, considera otros métodos alternativos.

Pasos para resolver sistemas de ecuaciones lineales por el método de sustitución:



El método de sustitución

es una técnica de resolución de sistemas de ecuaciones. Se basa en despejar una variable en una de las ecuaciones y luego sustituirla en la otra ecuación. Esto reduce el sistema a una sola variable, que puede ser resuelta. Fue utilizado en la antigua matemática babilónica y egipcia. Su formalización en la matemática moderna se atribuye al matemático islámico Al-Khwarizmi en el siglo IX. El método de sustitución sigue siendo una herramienta fundamental para resolver sistemas de ecuaciones lineales y no lineales. (Hoekenga et al., 2013)

1. Identificar las ecuaciones y las incógnitas:

Primera ecuación

$$-6x + \frac{y}{3} = 9$$

Segunda ecuación

$$3x + \frac{y}{3} = -9$$

2. Escriba las ecuaciones del sistema, generalmente en la forma " $y = mx + b$ " o " $ax + by = c$ ", donde "x" y "y" son las incógnitas a resolver.

$$-6x + \frac{y}{3} = 9$$

$$3x + \frac{y}{3} = -9$$

$$\frac{y}{3} = 6x + 9$$

$$\frac{y}{3} = -3x - 9$$

$$\frac{3y}{3} = \frac{6x}{3} + \frac{9}{3}$$

$$\frac{3y}{3} = -\frac{3x}{3} - \frac{9}{3}$$

$$y = 2x + 3$$

$$y = -x - 3$$

3. Escoger una de las ecuaciones y despejar una de las incógnitas:

$$y = 2x + 3, \quad (1)$$

4. Seleccione una de las ecuaciones del sistema y elija una de las incógnitas para despejarla en términos de la otra incógnita.

$$y = -x - 3, \quad (2)$$

5. Sustituir la variable despejada en la otra ecuación, toma el valor de la variable despejada en el paso anterior y reemplázelo en la otra ecuación del sistema, dejando una ecuación con una sola incógnita

$$y = 2x + 3$$

$$(-x - 3) = 2x + 3$$

$$-x - 3 = 2x + 3$$

6. Resuelva la ecuación obtenida en el paso anterior para encontrar el valor de la primera incógnita.

$$-x - 3 = 2x + 3$$

$$3x = 6$$

$$x = -2$$

7. Sustituir el valor encontrado en una de las ecuaciones originales:

$$y = -x - 3$$

$$y = -(-2) - 3$$

$$y = 1$$

8. Verificar la solución: Sustituya los valores encontrados para ambas incógnitas en ambas ecuaciones originales para asegurarse de que sean soluciones válidas para el sistema.

$$y = 2x + 3$$

$$y = -x - 3$$

$$-1 = 2(-2) + 3$$

$$-1 = 2 - 3$$

$$-1 = -1$$

$$-1 = -1$$

Resolución de sistemas por el método de reducción.

Al solucionar un sistema de ecuaciones por el método de reducción, se intenta eliminar una de las incógnitas en el sistema de ecuaciones para resolver inicialmente una ecuación de primer grado, con esta solución, se despeja el valor faltante en una de las ecuaciones.



1. Asegurate que las ecuaciones estén en forma estándar, es decir, con los términos semejantes alineados en el mismo lado y las incógnitas con sus coeficientes. Si alguna ecuación no está en esta forma, debes reorganizarla antes de continuar.

$$-6x + \frac{y}{3} = 9$$

$$\frac{y}{3} = 6x + 9$$

$$\frac{3y}{3} = \frac{6x}{3} + \frac{9}{3}$$

$$y = 2x + 3$$

$$3x + \frac{y}{3} = -9$$

$$\frac{y}{3} = -3x - 9$$

$$\frac{3y}{3} = -\frac{3x}{3} - \frac{9}{3}$$

$$y = -x - 3$$

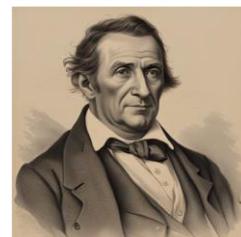
2. Multiplica las ecuaciones para igualar los coeficientes, identifica una variable que al multiplicar una de las ecuaciones, haga que el coeficiente de esa variable en ambas ecuaciones sea igual o el opuesto. El objetivo es que, al sumar o restar las ecuaciones, se elimine una de las variables.

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -x - 3, (-1) \end{cases}$$

3. Suma o resta las ecuaciones. Una vez que hayas multiplicado las ecuaciones y los coeficientes de una variable sean iguales o el opuesto, suma o resta ambas ecuaciones. Esto eliminará una de las variables y te permitirá encontrar el valor de la otra.

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ -y = x + 3 \\ \hline 0 = 3x + 6 \end{cases}$$

4. Resuelve la ecuación resultante, después de sumar o restar las ecuaciones, tendrás una ecuación con una sola variable. Resuelve esta ecuación para encontrar el valor de esa variable.



El método de reducción, también conocido como el método de eliminación, es una técnica para resolver sistemas de ecuaciones. Consiste en manipular las ecuaciones sumando o restando múltiplos de ellas para eliminar una de las variables, lo que reduce el sistema a una ecuación con una sola variable. Este enfoque se ha utilizado históricamente en matemáticas antiguas, pero su formalización y desarrollo moderno se atribuyen a matemáticos como Gauss. El método de reducción sigue siendo esencial para resolver sistemas de ecuaciones lineales en la actualidad. (González y González, 2014)

Además de los métodos tradicionales existen otras técnicas y enfoques más especializados para resolver sistemas de ecuaciones:

- Método de la inversa de la matriz
- Método de iteración
- Métodos numéricos
- Método de descomposición
- Métodos de optimización
- Métodos simbólicos
- Métodos basados en inteligencia artificial.

$$0 = 3x + 6$$

$$3x = -6$$

$$x = -\frac{6}{3}$$

$$x = -2$$

5. Sustitución inversa, una vez que hayas encontrado el valor de una variable, sustitúyelo en cualquiera de las ecuaciones originales para hallar el valor de la otra variable.

$$y = 2x + 3$$

$$y = 2(-2) + 3$$

$$y = -4 + 3$$

$$y = -1$$

6. Comprueba la solución, sustituye los valores encontrados para ambas variables en ambas ecuaciones originales y verifica que ambas ecuaciones sean verdaderas.

$$y = 2x + 3$$

$$-1 = 2(-2) + 3$$

$$-1 = -1$$

$$y = -x - 3$$

$$-1 = 2 - 3$$

$$-1 = -1$$

7. Si el sistema tiene más variables, repite los pasos anteriores para eliminar una variable más, hasta que encuentres todos los valores de las incógnitas.

Resolución de sistemas por el método de igualación.

El método de igualación para solucionar sistemas de ecuaciones consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones y luego, aplicando la transitividad de las igualdades, se igualan y se despeja la otra incógnita.



Despejar la variable y en las ecuaciones de un sistema, permite que las ecuaciones queden presentadas como ecuaciones canónicas de las rectas.

1. Identifica el sistema de ecuaciones, escribe el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en la forma estándar.

$$-6x + \frac{y}{3} = 9$$

$$\frac{y}{3} = 6x + 9$$

$$\frac{3y}{3} = \frac{6x}{3} + \frac{9}{3}$$

$$y = 2x + 3$$

$$3x + \frac{y}{3} = -9$$

$$\frac{y}{3} = -3x - 9$$

$$\frac{3y}{3} = -\frac{3x}{3} - \frac{9}{3}$$

$$y = -x - 3$$

2. Asegúrate que ambos coeficientes de una de las incógnitas (x o y) sean iguales en ambas ecuaciones. Si no lo son, multiplique una o ambas ecuaciones por constantes adecuadas. El objetivo es que un coeficiente sea igual en ambas ecuaciones para que al igualar las expresiones.

$$y = 2x + 3$$

$$y = -x - 3$$

3. Igualar las expresiones de las dos ecuaciones (asegurándose de que la incógnita seleccionada tenga el mismo coeficiente en ambas ecuaciones). Esto resultará en una nueva ecuación con una sola incógnita.

$$2x + 3 = -x - 3$$

4. Resolver la ecuación resultante

$$2x + 3 = -x - 3$$

$$3x = -6$$

$$x = -\frac{6}{3}$$

$$x = -2$$

5. Usa el valor de la incógnita que encontramos en el paso anterior para determinar el valor de la otra incógnita, para ello sustituye el valor encontrado en una de las ecuaciones originales

$$y = 2x + 3$$

$$y = 2(-2) + 3$$

$$y = -4 + 3$$

$$y = -1$$

6. Verificar la solución Sustituya los valores encontrados de " x " e " y " en ambas ecuaciones originales para verificar que sean soluciones válidas, si las ecuaciones se satisfacen, entonces los valores son la solución correcta del sistema de ecuaciones.

$$y = 2x + 3$$

$$-1 = 2(-2) + 3$$

$$-1 = -1$$

$$y = -x - 3$$

$$-1 = 2 - 3$$

$$-1 = -1$$



El método de igualación es otra estrategia para resolver sistemas de ecuaciones. Consiste en manipular ambas ecuaciones para que tengan la misma variable aislada. Luego, igualas las expresiones de ambas ecuaciones y resuelves la ecuación resultante para encontrar el valor de la variable. Este enfoque se utilizaba en la antigua Grecia y Mesopotamia para resolver problemas geométricos. Si bien su formalización en matemáticas modernas no está atribuida a un individuo específico, el método de igualación sigue siendo útil para resolver sistemas de ecuaciones en diversos contextos. (Hoekenga et al., 2013)

Actividades Adicionales

Bloque de Álgebra y funciones

Destaca con criterios de desempeño: Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica utilizando los métodos de determinante (Cramer), método de igualación y método de eliminación gaussiana.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de sustitución.

a. $\begin{cases} x - 5y = 8 \\ -7x + 8y = 25 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5m - 2n = 13 \\ m + 3n = 6 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2u + 5z = -24 \\ 8u - 3z = 19 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 7a - 9b = 8 \\ 15a + 11b = 32 \end{cases}$

3 Con el método de sustitución, resuelve cada sistema. Luego, reemplaza la letra correspondiente al sistema y completa la frase.

Completa esta frase solo con el valor de la solución en la incógnita y .

a. $\begin{cases} \frac{x-1}{4} + y = 2 \\ 1 + \frac{x}{2} = y - 1 \end{cases}$ Letra N

b. $\begin{cases} \frac{x}{7} - \frac{2y}{4} = 7 \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{6} = 0 \end{cases}$ Letra I

c. $\begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{8} \\ \frac{x}{15} - 1 = \frac{y}{3} \end{cases}$ Letra L

d. $\begin{cases} \frac{y}{6} - \frac{5x}{6} = 2 \\ \frac{2x}{3} - \frac{3y}{4} = 1 \end{cases}$ Letra A

e. $\begin{cases} 12x + 5y = -6 \\ \frac{5x}{3} - \frac{7y}{6} = -12 \end{cases}$ Letra S

Para solucionar problemas de matemáticas es necesario desarrollar la capacidad de

-4 3 -4 12 -8 6 -8 6

Bloque de Álgebra y funciones

Destaca con criterios de desempeño: Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica, utilizando el método de reducción.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Grafica, en el plano cartesiano, las ecuaciones de cada sistema. Luego, determina su solución aplicando el método de reducción.

a. $\begin{cases} 4x + 3y = 18 \\ 5x - 6y = 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + 8y = 34 \\ 5x + 3y = 19 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 4y = 15 \end{cases}$

Razonamiento

3 Relaciona cada sistema de ecuaciones pendiente gráfica. Luego, resuélvelo a todo de reducción:

a. $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 6x + 7y = 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 8x - 15y = -30 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$

Modelación

4 Inventa para cada caso una nueva ecuación con la cual puedas formar un sistema de ecuaciones que cumpla las condiciones dadas:

$7x - 3y = 27$

Para solucionar problemas de matemáticas es necesario desarrollar la capacidad de

Bloque de Álgebra y funciones

Destaca con criterios de desempeño: Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica, utilizando el método de igualación.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve los siguientes sistemas con el método de igualación.

a. $\begin{cases} 3x = -4y \\ 5x - 6y = 38 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5a + 2b = 15 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} w - 2z = 10 \\ 2w + 3z = -8 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3s + 4t = 15 \\ 2s + t = 5 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = -\frac{7}{12} \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = -\frac{1}{2} \end{cases}$

f. $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 6 \\ 3x - 4y = 4 \end{cases}$

Razonamiento

3 Descubre el error en el proceso y justifica por qué los valores dados no son la solución del sistema planteado.

a. $\begin{cases} 7m + 4n = 13 \\ 5m - 2n = 19 \end{cases}$

$4n = 13 - 7m$ $5m - 2n = 19$

$n = \frac{13 - 7m}{2}$ $n = \frac{19 + 5m}{2}$

$\frac{13 - 7m}{2} = \frac{19 + 5m}{2}$

$13 - 7m = 19 + 5m$

$26 - 14m = 76 + 20m$

$-14m - 20m = 76 - 26$ $-34m = 50$

$m = -\frac{50}{34} = -\frac{25}{17}$

Reemplazando para n se tiene que:

$n = \frac{13 - 7(-\frac{25}{17})}{2} = \frac{99}{17}$

De este modo $m = -\frac{25}{17}$ y $n = \frac{99}{17}$.

b. $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$

$x = 10 - 2y$ $x = \frac{5 - 4y}{2}$

$10 - 2y = \frac{5 - 4y}{2}$ $20 - 2y = 5 - 4y$

$-2y + 4y = 5 - 20$ $y = -\frac{15}{2}$

Reemplazando para x se tiene que:

$x = \frac{5 - 4(-\frac{15}{2})}{2} = \frac{35}{2}$

De este modo $x = \frac{35}{2}$ y $y = -\frac{15}{2}$.

Razonamiento

4 Utiliza las siguientes ecuaciones para plantear dos sistemas de ecuaciones incompatibles, dos compatibles indeterminados y dos compatibles determinados.

$2x - y = 1$ $x + y = 5$

$x - y = 12$ $x + y = 100$

$-2y + 5x = 10$ $2y - x = -3$

$2x - y = -3$ $2x + 10y = 40$

$3x - 30y = 15$ $3x + 3y = 15$

$-8y + 20x = 40$ $2y - x = 1$

5 Reúnete con cuatro compañeros más y solucionen el siguiente sistema de ecuaciones a partir de los cinco métodos trabajados en la unidad.

$\begin{cases} 1,5x - 2y = 1 \\ 2,5x - 3y = 6 \end{cases}$

Cada uno elegirá uno de los métodos. Al terminar, comparen sus soluciones y evalúen cuál es el método más efectivo para este sistema.

Resolución de problemas

6 Halla dos números tales que si se divide el primero entre 3 y el segundo entre 4, la suma sea 15; mientras que si se multiplica el primero por 2 y el segundo por 5, la suma sea 174.

7 Un número consta de dos cifras cuya suma es 9. Si se invierte el orden de las cifras el resultado es igual al número dado más 9 unidades. Halla dicho número.

8 Un número está formado por dos cifras cuya suma es 15. Si a la cuarta parte del número se le suma 45, el resultado es el número con las cifras invertidas. ¿Cuál es el número?

Enlace

El contenido presentado en el enlace tiene actividades relacionadas a los métodos de sustitución, reducción e igualación

Consolidación

Actividades en casa.

Materiales: computadoras o dispositivos inteligentes con acceso a ALEKS.

- Asignar tareas o actividades en ALEKS para que los estudiantes resuelvan problemas adicionales sobre sistemas de ecuaciones utilizando los métodos de sustitución, reducción e igualación. 

Actividad 3

Método de sustitución

Introducción al uso de la sustitución para resolver una ecuación lineal Eliminar tema

Resolver para x .

$$y = x - 5$$
$$y = 6$$

[Simplificar](#) su respuesta tanto como sea posible.

Resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizando sustitución: Problema tipo 2 Eliminar tema

Resolver el [sistema de ecuaciones](#).

$$y = 3x + 20$$
$$y = 7x$$

Resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizando sustitución Eliminar tema

Utilizar la [sustitución](#) para resolver el [sistema](#).

$$y = 2x - 11$$
$$-5x + 2y = -25$$

$x = \square$

$y = \square$

Actividad 4

Método de reducción

Resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizando eliminación con suma Eliminar tema

Resolver el siguiente [sistema de ecuaciones](#).

$$3x + 5y = -6$$
$$-3x + 2y = 27$$

Resolver un sistema de ecuaciones lineales por medio de la eliminación con multiplicación y suma Eliminar tema

Resolver el siguiente [sistema de ecuaciones](#).

$$-3x + 8y = 1$$
$$8x - 5y = -19$$

Actividad 5

Método de igualación

Identificar las operaciones utilizadas para crear un sistema de ecuaciones equivalente

Eliminar tema

Considerar los siguientes tres [sistemas de ecuaciones lineales](#).

Sistema A	Sistema B	Sistema C
$\begin{cases} -4x - 9y = 9 & \text{[A1]} \\ 3x + 5y = 2 & \text{[A2]} \end{cases}$	$\begin{cases} -12x - 27y = 27 & \text{[B1]} \\ 3x + 5y = 2 & \text{[B2]} \end{cases}$	$\begin{cases} -7y = 35 & \text{[C1]} \\ 3x + 5y = 2 & \text{[C2]} \end{cases}$

Contestar las preguntas a continuación.

Para cada uno, elegir la transformación y luego llenar el blanco con el número correcto.

La flecha (\rightarrow) significa que la expresión a la izquierda se convierte en la expresión a la derecha.

¿Cómo transformamos el sistema A en el sistema B?

- × Ecuación [A1] \rightarrow Ecuación [B1]
- × Ecuación [A2] \rightarrow Ecuación [B2]
- × Ecuación [A1] + Ecuación [A2] \rightarrow Ecuación [B2]
- × Ecuación [A2] + Ecuación [A1] \rightarrow Ecuación [B1]

¿Cómo transformamos el sistema B en el sistema C?

- × Ecuación [B1] \rightarrow Ecuación [C1]
- × Ecuación [B2] \rightarrow Ecuación [C2]
- × Ecuación [B1] + Ecuación [B2] \rightarrow Ecuación [C2]
- × Ecuación [B2] + Ecuación [B1] \rightarrow Ecuación [C1]

Nota: los contenidos extraídos de ALEKS están sujetos a cambios en función del avance de los estudiantes en la plataforma

Clase 3	
Curso	Matemática
Asignatura	10 año de EGB
Tema	Sistemas de Ecuaciones utilizando los métodos de determinante (Cramer), de igualación, y de eliminación gaussiana
Recursos	Dispositivo con acceso a GeoGebra y ALEKS
Destreza	M.4.1.55. Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica, utilizando los métodos de determinante (Cramer), de igualación, y de eliminación gaussiana.  
Indicador de Evaluación:	I.M.4.3.5. Plantea y resuelve problemas que involucren sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ecuaciones de segundo grado y la aplicación de las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado; juzga la validez de las soluciones obtenidas en el contexto del problema.  
Ciclo de Aprendizaje	ACC

Anticipación

Objetivo: Explorar y comprender diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones (Regla de Cramer y Método de Gauss).

Indicaciones:

- La Regla de Cramer: descripción del método y su aplicabilidad en sistemas de ecuaciones lineales.
- El Método de Gauss: explicación paso a paso y su eficiencia en la resolución de sistemas lineales.

Refuerza tus conocimientos en:



La Regla de Cramer

<https://www.youtube.com/watch?v=feBxABepi-o>

El Método de Gauss

https://www.youtube.com/watch?v=OE8e70VO_CE

Construcción

Resolución de sistemas por la regla de Cramer

Matriz

Una matriz es la disposición de números reales que se asocia con un sistema de ecuaciones. Los números de dicha matriz son los coeficientes numéricos de las incógnitas. Se llama matriz ampliada a la disposición que, además de incluir los coeficientes numéricos, incluye las constantes del sistema.



Se tiene que:

Sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 \\ a_2x + b_2y = d_2 \end{cases}$$

Matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Matriz de términos independientes

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz es el número que resulta de

$$a_1 \times b_2 - a_2 \times b_1$$



Refuerza tus conocimientos en resolución de matrices:

<https://www.youtube.com/watch?v=bSUVmeqsdY>

Resolución de sistemas 2x2 por la regla de Cramer

Es posible asignar a una matriz un número real llamado determinante de la matriz. Para un sistema de ecuaciones 2x2, en el cual los coeficientes son a_1 y b_1 en la primera ecuación, a_2 y b_2 en la segunda ecuación y los términos independientes son d_1 y d_2 respectivamente.



La regla de Cramer es una fórmula basada en los determinantes que pueden plantearse así

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{d_1b_2 - d_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 d_2 - a_2 d_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$x = \frac{|D_x|}{|D|}$$

$$y = \frac{|D_y|}{|D|}$$

Pasos para resolver sistemas de ecuaciones lineales por la regla de Cramer



La regla de Cramer es un método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando determinantes y matrices. Fue desarrollado por el matemático suizo Gabriel Cramer en el siglo XVIII. El método se basa en expresar cada variable en términos de determinantes y luego calcularlos para obtener los valores de las incógnitas. Aunque es elegante, la regla de Cramer puede volverse ineficiente y numéricamente inestable para sistemas grandes debido a la necesidad de calcular múltiples determinantes. (González y González, 2014)

$$\begin{cases} -18x + y = 27 \\ 9x + y = -27 \end{cases}$$

1. Primero, evaluamos los determinantes que aparecen en la Regla de Cramer. Observe que D es la matriz de coeficiente y que D_x y D_y se obtienen sustituyendo las primeras columnas, y segundas de D por los términos constantes.

$$|D| = \begin{vmatrix} -18 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|D_x| = \begin{vmatrix} 27 & 1 \\ -27 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|D_y| = \begin{vmatrix} -18 & 27 \\ 9 & -27 \end{vmatrix}$$

2. Operamos las matrices resultantes

$$\begin{aligned} |D| &= \begin{vmatrix} -18 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = (-18)(1) - (9)(1) \\ &= -18 - 9 \\ &= -27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |D_x| &= \begin{vmatrix} 27 & 1 \\ -27 & 1 \end{vmatrix} = (27)(1) - (-27)(1) \\ &= 27 + 27 \\ &= 54 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |D_y| &= \begin{vmatrix} -18 & 27 \\ 9 & -27 \end{vmatrix} = (-18)(-27) - (9)(27) \\ &= 486 - 243 \\ &= 243 \end{aligned}$$

3. Reemplazamos en las formulas basadas en los determinantes

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{54}{-27} = -2$$

$$y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{243}{-27} = -9$$

4. Para verificar la solución sustituye los valores encontrados de x y y en ambas ecuaciones originales para verificar que sean soluciones válidas.

$$-18x + y = 27$$

$$9x + y = -27$$

$$-18(-2) + (-9) = 27$$

$$9(-2) + (-9) = -27$$

$$36 - 9 = 27$$

$$-18 - 9 = -27$$

$$27 = 27$$

$$-27 = -27$$

Resolución de sistemas por el método de Gauss

Un sistema de ecuaciones es escalonado cuando en una de las ecuaciones solo existe una incógnita y en las otras ecuaciones, las otras incógnitas van apareciendo progresivamente.



Los sistemas lineales que tienen esta forma, reciben el nombre de sistemas escalonados y su resolución es muy sencilla, de manera que no es necesario utilizar los métodos conocidos.

El método de reducción se puede generalizar con el método de Gauss, que consiste en transformar un sistema de ecuaciones en un sistema escalonado.

Ejemplo

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \rightarrow \text{primera ecuación} \\ x - y = -6 \rightarrow \text{segunda ecuación} \end{cases}$$

1. Se mantiene la primera ecuación y se elimina x de la segunda ecuación

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x - y = -6 \quad (-3) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -6 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ -3x + 3y = 18 \\ 0 + 5y = 20 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 20 \end{array} \right)$$

Versatilidad de los Métodos

Alternativos: a medida que los sistemas se vuelven más grandes y complejos, otros métodos como la eliminación gaussiana o la descomposición LU son generalmente más eficientes para resolverlos que la regla de Cramer.



Método de Gauss:

https://www.youtube.com/watch?v=OE8e70VO_CE&t=38s

Aplicaciones en Ciencias y Computación: El Método de Gauss tiene aplicaciones en diversos campos, desde resolver sistemas de ecuaciones en física e ingeniería hasta ser la base de algoritmos numéricos utilizados en la solución de sistemas lineales en computación.



El método de Gauss, desarrollado por Carl Friedrich Gauss, resuelve sistemas de ecuaciones lineales transformándolos en una forma escalonada mediante operaciones elementales. Esto simplifica el sistema y encuentra soluciones. Es esencial en matemáticas, física e ingeniería, automatizable con computadoras. Transforma ecuaciones en una matriz escalonada mediante operaciones para encontrar soluciones y desempeña un papel crucial en resolver sistemas en diversas disciplinas. (González y González, 2014)

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 5y = 20 \end{cases}$$

2. Como se ha obtenido un sistema escalonado se opera normalmente

$$5y = 20$$

$$y = \frac{20}{5}$$

$$y = 4$$

$$3x + 2y = 2$$

$$3x + 2(4) = 2$$

$$3x + 8 = 2$$

$$3x = -6$$

$$x = -2$$

3. Para verificar la solución sustituye los valores encontrados de x y y en ambas ecuaciones originales para verificar que sean soluciones válidas.

$$3x + 2y = 2$$

$$3(-2) + 2(4) = 2$$

$$-6 + 8 = 2$$

$$2 = 2$$

$$x - y = -6$$

$$(-2) - (4) = -6$$

$$-2 - 4 = -6$$

$$-6 = -6$$

Actividad: Método de Cramer

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$$

a. Calcula los determinantes " D ", " D_x " y " D_y " utilizando los coeficientes de las ecuaciones.



b. Usa la fórmula $x = \frac{Dx}{Dy}$ $y = \frac{Dy}{D}$ para encontrar los valores de las variables.



c. Sustituye los valores de las variables en ambas ecuaciones originales. ¿Las ecuaciones se cumplen?



Actividad: Método de Gauss

$$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$$

a. Escribe el sistema de ecuaciones ampliado con sus coeficientes y términos independientes.



b. Aplica operaciones elementales (multiplicación, suma/resta de filas) para convertir el sistema en una matriz



c. Resuelve la matriz triangular superior para obtener los valores de las variables.



d. Sustituye los valores de las variables en las ecuaciones originales. ¿Las ecuaciones se cumplen?



Actividades Adicionales

El contenido presentado en el enlace tiene actividades relacionadas a la Regla de Cramer y el Método de Gauss

[Enlace](#)

Sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo 1
Resolver el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera Algebraica, utilizando el método de eliminación de Gauss.

$$\begin{cases} -x + 2y = -3 & (1^{\text{a}} \text{ ecuación}) \\ 2x - 3y = 9 & (2^{\text{a}} \text{ ecuación}) \end{cases}$$

Solución:
Se mantiene la primera ecuación $(1^{\text{a}}) \rightarrow (1^{\text{a}}) \begin{cases} -x + 2y = -3 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases}$
Se elimina x de la segunda ecuación $2(1^{\text{a}}) + (2^{\text{a}}) \rightarrow (2^{\text{a}}) \begin{cases} -x + 2y = -3 \\ y = -15 \end{cases}$

El valor de y se reemplaza en la $(1^{\text{a}}) -x + 2(-15) = -3$, por lo que $x = -27$
Por lo tanto, el conjunto solución de este sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es $x = -27$ y $y = -15$.

Actividad adicional
Ejercitación
(1) Obtener la solución del sistema:
$$\begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ -x - 3y = 4 \end{cases}$$

Solución:
 $(1^{\text{a}}) \rightarrow (1^{\text{a}}) \begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ -x - 3y = 4 \end{cases} \rightarrow y = -1$
 $(1^{\text{a}}) + 2(2^{\text{a}}) \rightarrow (2^{\text{a}}) \begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ -10y = 10 \end{cases} \rightarrow y = -1$

El valor de y se reemplaza en la $(1^{\text{a}}) 2x - 4(-1) = 2 \rightarrow 2x = -10$
El conjunto solución de este sistema es $x = -5$ y $y = -1$.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación
(1) Resuelve los siguientes sistemas escalonados:

- $\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \end{cases}$
- $\begin{cases} y = 4 \\ y - 2 = -7 \end{cases}$
- $\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ -y = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} x - y = -7 \\ 2y = 8 \end{cases}$

(2) Aplica el método de Gauss para resolver los siguientes sistemas:

- $\begin{cases} x - y = 7 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} 3x + 4y - 1 = 0 \\ 5x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$

Modificación
(1) Plantea un problema cuya representación algebraica sea el sistema de ecuaciones dado y resuélvelo por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

Consolidación

Materiales: computadoras o dispositivos inteligentes con acceso a ALEKS.

- Solicitar a los estudiantes que resuelvan problemas en grupos utilizando la regla de Cramer y el método de Gauss, supervisar y brindar asistencia cuando sea necesario.
- Asignar tareas o actividades en ALEKS para que los estudiantes resuelvan problemas adicionales sobre sistemas de ecuaciones utilizando la regla de Cramer y el método de Gauss. 

Actividad 4

Regla de Cramer

Determinante de una matriz 2x2 Eliminar tema

Calcular el siguiente [determinante](#).

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

Utilizar la regla de Cramer para resolver un sistema 2x2 de ecuaciones lineales Eliminar tema

Utilizar la [regla de Cramer](#) para hallar la solución del siguiente [sistema de ecuaciones lineales](#).

$$\begin{aligned} -9x + 6y &= 4 \\ 2x + y &= 6 \end{aligned}$$

Utilizar la regla de Cramer para resolver un sistema 2x2 de ecuaciones lineales Agregar tema

Utilizar la [regla de Cramer](#) para hallar la solución del siguiente [sistema de ecuaciones lineales](#).

$$\begin{aligned} 3x - 8y &= 1 \\ 4x - 8y &= 5 \end{aligned}$$

Actividad 5

Método de Gauss.

Eliminación de Gauss-Jordan con una matriz 2x2Agregar tema

Considere el siguiente [sistema de ecuaciones lineales](#).

$$\begin{aligned} -5x + 20y &= -35 \\ -6x + 28y &= -62 \end{aligned}$$

Resuelva este sistema mediante los siguientes pasos para producir una matriz de [forma escalonada por filas reducida](#).

R_1 y R_2 indican la primera y la segunda fila, respectivamente. La notación de flecha (\rightarrow) significa que la expresión/matriz de la izquierda se convierte en la expresión/matriz de la derecha una vez que se realizan las operaciones de la fila.

(a) Introduzca la matriz aumentada. $\left[\begin{array}{cc|c} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{array} \right]$

(b) En cada paso a continuación, ingrese el coeficiente para la operación de fila y las entradas que faltan en la matriz resultante.

1.º paso:

$$\square \cdot R_1 \rightarrow R_1 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{array} \right]$$

2.º paso:

$$\square \cdot R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \square & \square \\ 0 & \square & \square \end{array} \right]$$

3.º paso:

$$\square \cdot R_2 \rightarrow R_2 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \square & \square \\ 0 & 1 & \square \end{array} \right]$$

4.º paso:

$$\square \cdot R_2 + R_1 \rightarrow R_1 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \square \\ 0 & 1 & \square \end{array} \right]$$

(c) Indique la solución.

$x = \square$ $y = \square$

Nota: los contenidos extraídos de ALEKS están sujetos a cambios en función del avance de los estudiantes en la plataforma

Clase 4	
Curso	Matemática
Asignatura	10 año de EGB
Tema	Sistemas de Ecuaciones utilizando los métodos de determinante (Cramer), de igualación, y de eliminación gaussiana
Recursos	Dispositivo con acceso a GeoGebra y ALEKS
Destreza	M.4.1.56. Resolver y plantear problemas de texto con enunciados que involucren funciones lineales y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.  
Indicador de Evaluación:	I.M.4.3.5. Plantea y resuelve problemas que involucren sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ecuaciones de segundo grado y la aplicación de las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado; juzga la validez de las soluciones obtenidas en el contexto del problema.  
Ciclo de Aprendizaje	ACC

Anticipación

- Recordar la función que tienen los sistemas de ecuaciones lineales en diferentes contextos.
- Recordar los conceptos clave y métodos aprendidos en la clase previa sobre la resolución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando diferentes técnicas (sustitución, reducción, igualación, regla de Cramer y método de Gauss).
- Introducción a problemas con sistemas de ecuaciones



Cómo plantear y resolver un problema con un sistema de ecuaciones lineales de 2x2:

<https://www.youtube.com/watch?v=1N18S7rqOAo>

Construcción

René Descartes y la Geometría

Analítica: El matemático y filósofo René Descartes fue pionero en el uso de coordenadas cartesianas para relacionar la geometría y el álgebra. Su trabajo permitió la resolución de ecuaciones algebraicas a través de representaciones gráficas.

Método de Cramer y Determinantes: El método de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales se basa en determinantes. Sin embargo, para sistemas con muchas ecuaciones o variables, el cálculo de determinantes puede volverse complejo y poco eficiente.

Consideraciones para resolver problemas con sistemas de ecuaciones lineales

Resolver problemas con sistemas de ecuaciones lineales requiere enfoque y atención a los detalles. Aquí hay algunas consideraciones clave que debes tener en cuenta al abordar este tipo de problemas:

1. Identificar el tipo de sistema:

Reconoce si el sistema tiene una solución única, infinitas soluciones o ninguna solución. Esto te guiará en la elección del método de resolución más adecuado.

2. Seleccionar el método adecuado:

Elije el método de resolución que mejor se adapte a la situación: gráfico, sustitución, reducción, igualación, Cramer, Gauss u otros métodos avanzados según sea necesario.

3. Escritura de ecuaciones:

Traduce la información del problema en ecuaciones matemáticas. Asigna variables a las incógnitas y formula ecuaciones para representar las relaciones entre ellas.

4. Simplificar y reorganizar:

Simplifica las ecuaciones si es posible. Despeja variables y reorganiza términos para facilitar la resolución.

5. Verificación:

Una vez que obtengas las soluciones, verifica que satisfacen todas las ecuaciones originales del sistema. Esto asegura que tus resultados sean correctos.

6. Entender el contexto del problema:

Interpreta el significado de las soluciones en el contexto del problema.

¿Tienen sentido las respuestas dentro del contexto de la situación planteada?

7. Representación gráfica:

Si es apropiado, utiliza gráficos para visualizar las ecuaciones y la solución. Esto puede proporcionar una comprensión más clara y verificar tus resultados.

8. Comprobación alternativa:

Si es posible, verifica tus resultados utilizando diferentes métodos.

Si los resultados coinciden, aumentará tu confianza en la solución.

Problema:

En una tienda de ropa, Ana compró 3 camisetas y 2 pantalones por un total de \$70. Juan compró 2 camisetas y 4 pantalones por un total de \$90. Determina el costo de una camiseta y el costo de un pantalón.

Solución:

Paso 1: escritura de ecuaciones

Denotemos el costo de una camiseta como " x " y el costo de un pantalón como " y ". Podemos establecer el siguiente sistema de ecuaciones basado en la información dada:

$$\text{Para Ana: } 3x + 2y = 70$$

$$\text{Para Juan: } 2x + 4y = 90$$

Paso 2: selección del método

Este problema puede resolverse mediante el método de reducción (eliminación) ya que ambas ecuaciones tienen variables con coeficientes que se pueden igualar.

Paso 3: operaciones elementales

Para igualar los coeficientes de " x " en ambas ecuaciones, multiplicaremos la ecuación de Juan por 3 para que los coeficientes de " x " coincidan

$$\begin{cases} 3(2x + 4y) = 3(90) \\ 6x + 12y = 270 \end{cases}$$

Paso 4: suma o resta de ecuaciones

Restamos la ecuación de Ana de la ecuación ajustada de Juan para eliminar la variable " x "

$$\begin{aligned} (6x + 12y) - (3x + 2y) &= 270 - 70 \\ 3x + 10y &= 200 \end{aligned}$$

Paso 5: resolución de ecuación resultante

Despejamos " C " de la ecuación resultante

$$3x = 200 - 10y$$

$$x = \frac{200 - 10y}{3}$$

Donde se aplican los sistemas de ecuaciones:

Simulaciones en Videojuegos:

En el desarrollo de videojuegos y gráficos por computadora, los sistemas de ecuaciones lineales se utilizan para simular comportamientos físicos, como colisiones y movimiento de personajes en un entorno virtual.

Predicción del Clima:

Los modelos climáticos utilizan sistemas de ecuaciones lineales para simular y predecir patrones climáticos y cambios en el clima global.

Biología y Genética:

En la biología y la genética, los sistemas de ecuaciones lineales se aplican en el análisis de redes metabólicas y la interpretación de datos genéticos para comprender procesos biológicos complejos.

Recordatorio para Identificar Sistemas de Ecuaciones

Utiliza el método de **sustitución** cuando una de las ecuaciones ya está despejada para una variable. Escoge este método si una ecuación te permite expresar una variable en función de la otra.

Opta por el método de **reducción** cuando las ecuaciones tienen coeficientes que se pueden cancelar al sumar o restar. Busca coeficientes de variables que, al sumar o restar las ecuaciones, eliminen una de las incógnitas.

Emplea el método de **igualación** cuando ambas ecuaciones ya están despejadas para la misma variable. Asegúrate de que las expresiones despejadas sean iguales en ambas ecuaciones.

Paso 6: sustitución en la ecuación original

Sustituimos el valor de "x" en la primera ecuación de Ana

$$\begin{aligned}3x + 2y &= 70 \\3\left(\frac{200 - 10y}{3}\right) + 2y &= 70 \\200 - 10y + 2y &= 70 \\-8y &= -130 \\y &= 16.25\end{aligned}$$

Paso 7: cálculo de x

Sustituimos el valor de "y" en la ecuación para obtener "x"

$$\begin{aligned}x &= \frac{(200 - 10y)}{3} \\x &= \frac{(200 - 10(16.25))}{3} \\x &= 14.17\end{aligned}$$

Verificación: sustituimos los valores de "x" y "y" en ambas ecuaciones originales para verificar si las ecuaciones se cumplen. Ambas ecuaciones deben resultar en los totales de compra mencionados (\$ 70 y \$ 90).

$$\begin{array}{ll}3x + 2y = 70 & 2x + 4y = 90 \\3(14.17) + (16.25) = 70 & 2(14.17) + 4(16.25) = 90 \\70 = 70 & 90 = 90\end{array}$$

Conclusión: El costo de una camiseta es aproximadamente \$ 14.17 y el costo de un pantalón es \$ 16.25, lo que cumple con las condiciones de compra de Ana y Juan.



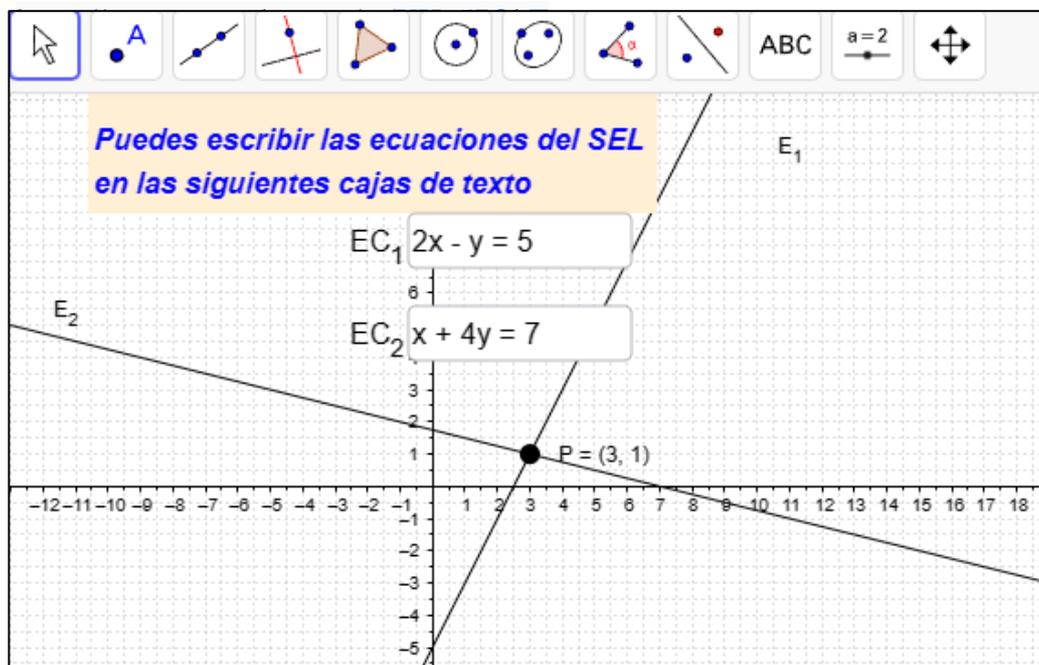
Introducción a GeoGebra, Symbolab y WolframAlpha, estos pueden utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones complejas con un gran número de variables o ecuaciones no lineales. 

GeoGebra

Siempre es posible graficar las dos ecuaciones y encontrar la solución por el método gráfico, ingresando las ecuaciones y reconociendo el punto de corte

(<https://www.geogebra.org/>)

En GeoGebra puedes utilizar este apartado diseñado por Juan Pablo Caro Quintero para ingresar las ecuaciones y encontrar la solución al sistema:



También puede utilizar las herramientas que disponen para resolver matrices y basarte en los métodos de Cramer y Gauss

Para ello debes:

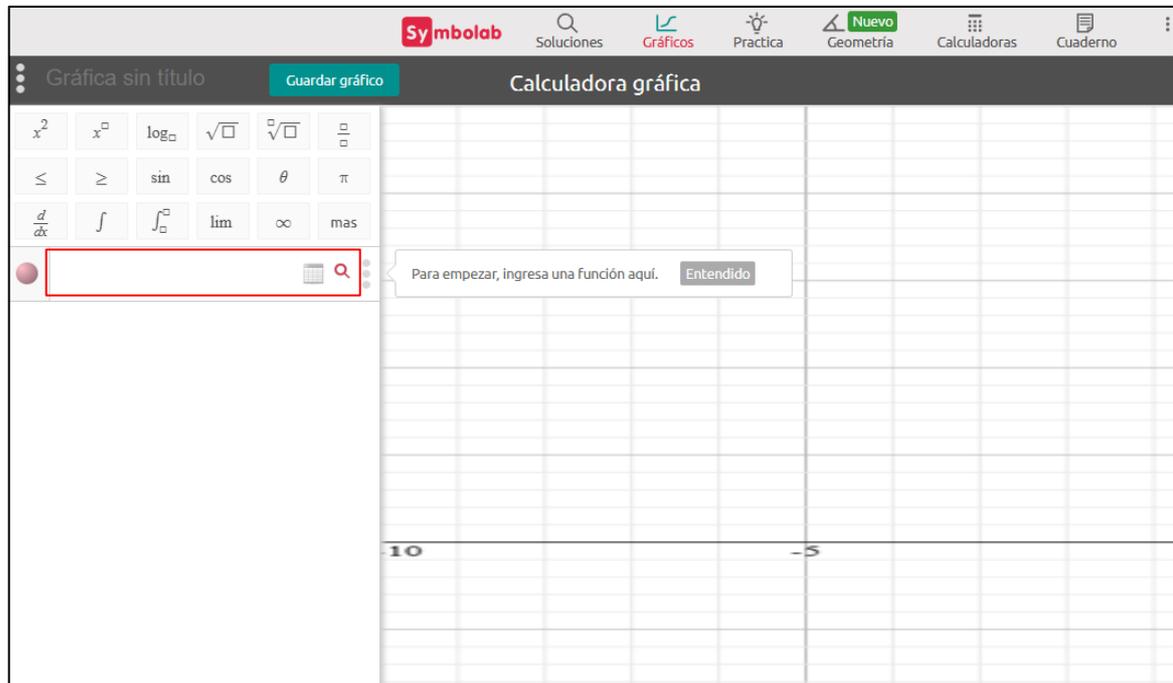
1. Ir a opciones (...) ubicado sobre la barra para ingresar datos
2. En Funciones Matemáticas seleccionar "Vector y Matriz"
3. Elige la opción que requieras
4. Personaliza filas y columnas



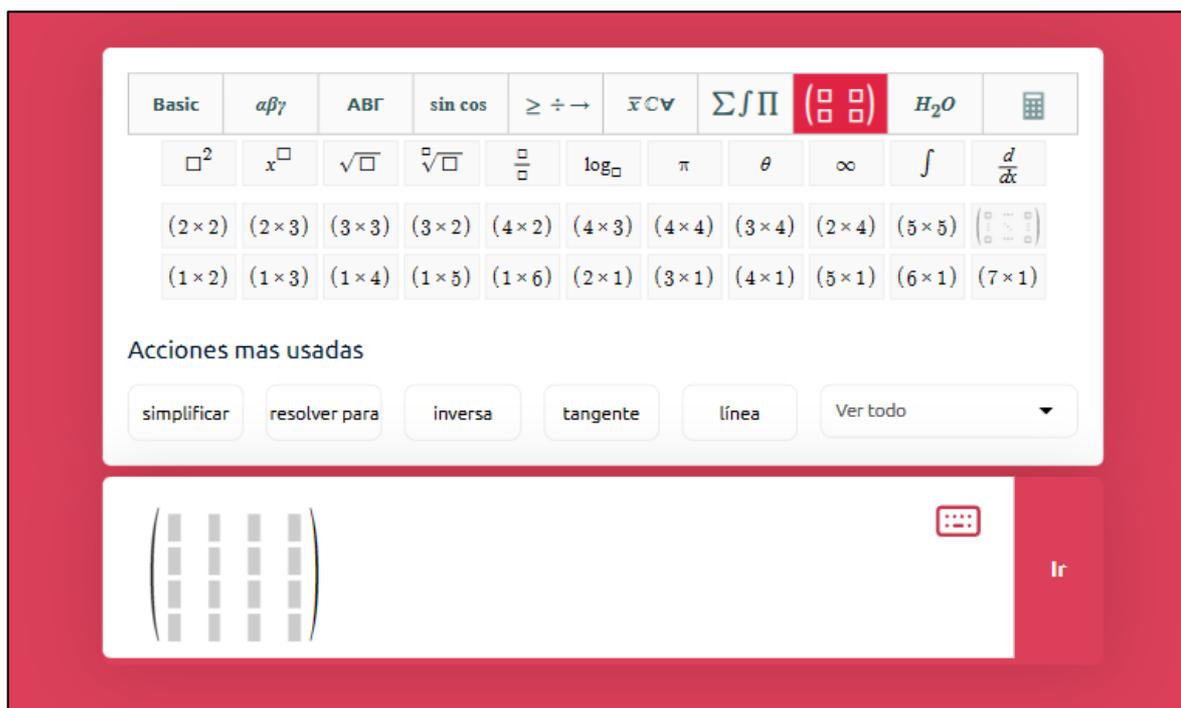
Symbolab

<https://es.symbolab.com/solver/>

Puedes resolver los sistemas de ecuaciones graficando las funciones, solamente debes ingresarla en el campo que aparece en el costado izquierdo de la web

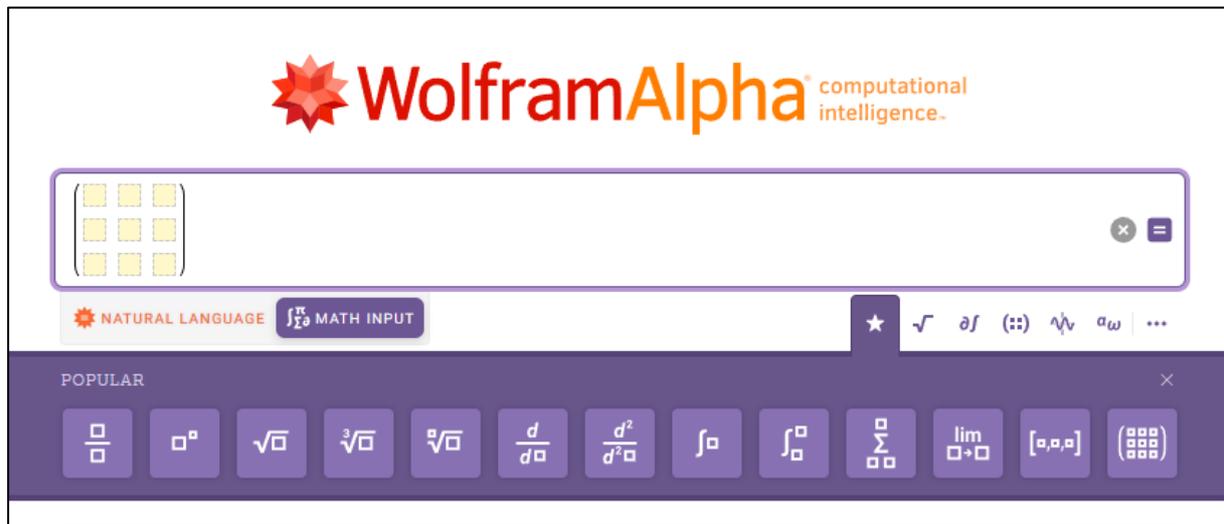


O usar sus herramientas para operar mediante matrices



WolframAlpha

Similar a Symbolab presenta un apartado para resolver matrices



Cuando ingresas ecuaciones brinda respuestas con gráficas, por lo que también puede ser empleado para soluciones gráficas.

Realizar una ronda de preguntas y respuestas para que los estudiantes compartan sus experiencias con el uso de la tecnología para resolver los ejercicios.

Pregunta sobre los desafíos que enfrentaron y cómo la tecnología les ayudó a resolver los problemas de manera más eficiente y precisa.

Consolidación

- Realizar ejercicios utilizando la tecnología mencionada para resolver sistemas de ecuaciones complejas.

1. El problema de los tres cuerpos de Newton es uno de los más grandes y fundamentales en las matemáticas, este ha tenido un impacto significativo en diversas áreas científicas, consiste en determinar las trayectorias y posiciones de tres cuerpos masivos que interactúan gravitacionalmente entre sí, sin suposiciones simplificadoras.

Enlaces donde puedes reforzar este contenido:



<https://www.youtube.com/watch?v=QneirebYckY>

https://addi.ehu.es/bitstream/handle/10810/30537/TFG_Garcia_Ribote_Iker.pdf;jsessionid=6D1E9E2DB991EA5228598F9D6A15CA70?sequence=1

El problema de los tres cuerpos restringido, donde un cuerpo es mucho más masivo que los otros dos, se ha usado para estudiar sistemas Tierra-Luna-Sol, sin embargo, el problema general requiere métodos numéricos y técnicas matemáticas para aproximaciones y soluciones específicas. Este estudio ha sido fundamental para entender la dinámica orbital, estabilidad de órbitas y fenómenos de resonancia en sistemas planetarios.

Se utilizan sistemas de ecuaciones diferenciales para describir la dinámica de los tres cuerpos masivos que interactúan gravitacionalmente entre sí, estas son conocidas como ecuaciones de movimiento y son fundamentales para determinar las trayectorias y posiciones de los cuerpos en función del tiempo.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales se utilizan para describir la interacción gravitacional de los cuerpos y determinar sus movimientos y trayectorias en función del tiempo. Resolver estas ecuaciones es esencial para comprender y predecir la dinámica de sistemas complejos como planetas, satélites y estrellas.



Para ello se valen de:

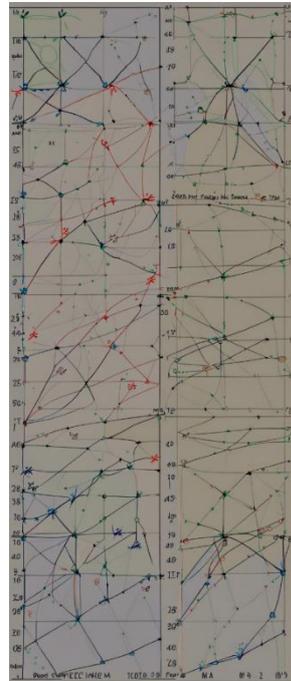
1. Software especializado: Existen programas de simulación y modelado específicos diseñados para resolver problemas de mecánica celeste, algunos ejemplos de software utilizados son GMAT (General Mission Analysis Tool), REBOUND y SWIFT.
2. Supercomputadoras: Dada la complejidad y la cantidad de cálculos involucrados en el problema de los tres cuerpos, a menudo se utilizan supercomputadoras o clústeres de computadoras para realizar simulaciones de alta precisión y resolución.

2. Los autovectores o vectores propios, también conocidos como eigenvectors, son vectores que no cambian su dirección cuando se les aplica una transformación lineal, como una rotación o una reflexión, solo su módulo.

Los autovalores o valores propios, también conocidos como eigenvalues, son escalares que se utilizan para representar la magnitud de la transformación que se aplica a los autovectores, es decir, un autovalor es el factor por el que el módulo de un autovector se multiplica cuando se le aplica una transformación lineal. Cada autovector se asocia con un autovalor, y juntos forman una pareja eigenvalue-eigenvector. Los autovalores se pueden usar para describir cómo cambia la magnitud de un autovector cuando se le aplica una transformación lineal.

Para encontrar los autovectores y autovalores de una matriz, primero debemos determinar cuáles son los valores propios de la matriz. Los valores propios son los valores que hacen que la ecuación $(A - \lambda I)$ sea singular (no invertible), donde A es la matriz en cuestión e I es la matriz identidad. Una vez que hayamos encontrado los valores propios, podemos resolver la ecuación $(A - \lambda I)x = 0$ para encontrar los autovectores asociados a cada uno de ellos.

Otra aplicación importante de los autovectores y autovalores es en el cálculo de las matrices de rotación y reflexión en el espacio. Estas matrices se pueden usar para rotar y reflexionar objetos en el espacio, lo que es muy útil en aplicaciones como la ingeniería y la visualización de datos.



Un **autovector** (también conocido como eigenvector en inglés) es un concepto importante en el ámbito de la álgebra lineal y las matemáticas aplicadas. Los autovectores tienen diversas aplicaciones en diferentes campos, incluyendo matemáticas, física, ingeniería, ciencias de la computación y más.

La utilidad principal de los autovectores radica en la capacidad de simplificar problemas complicados y comprender las propiedades de las transformaciones lineales o matrices, algunas aplicaciones destacadas incluyen:

- Diagonalización de matrices: permiten diagonalizar matrices, lo que simplifica muchos cálculos y análisis de sistemas lineales.
- Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales: son fundamentales para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
- Análisis de sistemas dinámicos: en ciencias e ingeniería se utilizan para entender el comportamiento de sistemas que cambian en el tiempo, como en la teoría de control y la mecánica cuántica.

Así se observa un enginevector resuelto en Symbolab

eigenvectors

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 2 \\ 6 & 12 & 11 & 2 & -4 \\ 9 & 20 & 10 & 10 & -6 \\ 15 & 28 & 14 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Ir

Pasos
Ejemplos

eigenvectors

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 2 \\ 6 & 12 & 11 & 2 & -4 \\ 9 & 20 & 10 & 10 & -6 \\ 15 & 28 & 14 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Pasos de solución

Un paso a la vez

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 2 \\ 6 & 12 & 11 & 2 & -4 \\ 9 & 20 & 10 & 10 & -6 \\ 15 & 28 & 14 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

📄 Vectores propios de una matriz
⌵

Para encontrar los vectores propios η , resolver $(A - \lambda I)\eta = 0$ para cada valor propio λ

Encontrar los valores propios de $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 2 \\ 6 & 12 & 11 & 2 & -4 \\ 9 & 20 & 10 & 10 & -6 \\ 15 & 28 & 14 & 5 & -3 \end{pmatrix}$: $\lambda = 3$

con multiplicidad de 2, $\lambda = 5$ con multiplicidad de 2, $\lambda = 7$

Vectores propios de $\lambda = 3$: $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vectores propios de $\lambda = 5$: $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vectores propios de $\lambda = 5$: $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



Vectores propios de $\lambda = 7$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$



Los vectores propios de $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 2 \\ 6 & 12 & 11 & 2 & -4 \\ 9 & 20 & 10 & 10 & -6 \\ 15 & 28 & 14 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Existen eigenvectos mucho más complejos como este:

eigenvectors $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 9 & 65 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 23 & 45 & 56 & 6 & 8 & 8 & 5 & 56 \\ 6 & 8 & 9 & 6 & 5 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 23 & 5 & 4 & 5 & 5 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 0 & 8 & 7 & 7 & 5 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 6 & 34 & 6 & 4 & 4 & 6 & 4 \\ 6 & 46 & 2 & 43 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 & 42 \\ 34 & 4 & 2 & 4 & 2 & 65 & 56 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 6 & 86 & 8 & 68 & 6 & 7 & 0 & 86 & 7 \\ 8 & 67 & 8 & 6 & 8 & 67 & 0 & 45 & 4 & 5 \end{pmatrix}$



Ir

Pasos Ejemplos



eigenvectors $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 9 & 65 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 23 & 45 & 56 & 6 & 8 & 8 & 5 & 56 \\ 6 & 8 & 9 & 6 & 5 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 23 & 5 & 4 & 5 & 5 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 0 & 8 & 7 & 7 & 5 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 6 & 34 & 6 & 4 & 4 & 6 & 4 \\ 6 & 46 & 2 & 43 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 & 42 \\ 34 & 4 & 2 & 4 & 2 & 65 & 56 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 6 & 86 & 8 & 68 & 6 & 7 & 0 & 86 & 7 \\ 8 & 67 & 8 & 6 & 8 & 67 & 0 & 45 & 4 & 5 \end{pmatrix}$



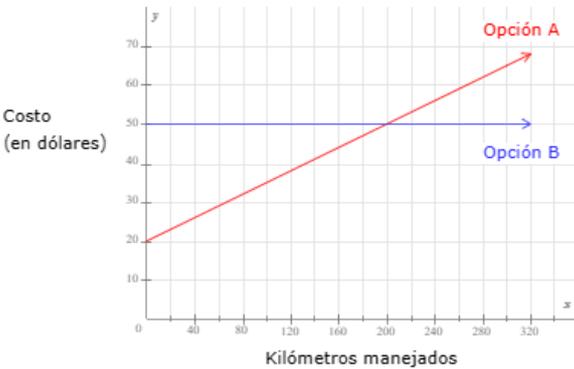
Solución

- Realizar la evaluación programada 1 en ALEKS para medir la comprensión de los estudiantes sobre sistemas de ecuaciones lineales. 

Eliminar tema

Interpretar los gráficos de dos funciones

Ariana va a alquilar un auto por un día. La compañía ofrece dos opciones: la Opción A y la Opción B. Para cada opción, el costo (en dólares) depende de los kilómetros manejados, como se muestra a continuación.



(a) Si Ariana maneja el auto alquilado 300 kilómetros, ¿Cuál opción cuesta más? ¿Cuánto más cuesta que la otra opción?

(b) ¿Para qué número de kilómetros manejados las dos opciones cuestan lo mismo? Si Ariana maneja más de esta cantidad, ¿cuál opción cuesta menos?

Eliminar tema

Resolver un problema verbal que involucra una suma y otra relación simple utilizando un sistema de ecuaciones lineales

Una clase de drama tiene un total de 42 estudiantes. El número de mujeres es 8 menos que el número de hombres. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres están en la clase?

Eliminar tema

Resolver un problema verbal utilizando un sistema de ecuaciones lineales de la forma $Ax + By = C$

Un mes Santiago alquiló 5 películas y 6 juegos de video con un costo total de US\$47. El próximo mes él alquiló 3 películas y 2 juegos de video con un costo total de US\$19. Hallar el costo de alquiler de cada película y de cada juego de video.

Actividades Adicionales

El contenido presentado en el enlace tiene actividades relacionadas a problemas que involucran sistemas de ecuaciones.

[Enlace](#)

Práctica Más

Sistemas de ecuaciones

Comunicación

- Determina los sistemas de ecuaciones en cada situación.
 - A un teatro asistieron 82 personas entre niños y adultos. El costo de la entrada de los adultos es \$12 y la de los niños, \$6. La taquilla recaudó \$782.
 - En una granja hay 90 animales entre gallinas y vacas. En total hay 248 patas.
 - En una panadería venden 65 unidades de cupcakes de fresa y de chocolate por \$813. Los de chocolate cuestan \$12 y los de fresa, \$13.
- Verifica que los siguientes valores son la solución de los sistemas de ecuaciones.

$a. x = 5y - 2$ $\begin{cases} x + y = 3 \\ -2x + 6y = -17 \end{cases}$	$b. x = 3y - 7$ $\begin{cases} 2x + y = 13 \\ -4x + 6y = 45 \end{cases}$
$c. x = -5y - 4$ $\begin{cases} 4x + 3y = -32 \\ -2x - 3y = 13 \end{cases}$	$d. x = 2y - 1$ $\begin{cases} 2x + 8y = 23 \\ y - x = -6 \end{cases}$

Resolución gráfica de sistemas

Comunicación

- Halla la solución a los sistemas de ecuaciones mediante gráficas.
 - $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 3x + 6y = 9 \\ x + y = 5 \end{cases}$

Resolución de Problemas

Estrategia: Combinar operaciones

Problema

Hace 5 años, la edad de Camila era la tercera parte de la de su abuela y dentro de 13 años la edad de la abuela será el doble de la de Camila. ¿Cuántos son las edades actuales de Camila y de su abuela?

- Comprende el problema
 - ¿Cuáles son los datos que proporciona el problema?
 - ¿La relación de hace 5 años entre la edad de Camila y la de su abuela o entre sus edades dentro de 13 años?
 - ¿Qué debes averiguar?
 - ¿La edad actual de Camila y de su abuela?
- Crear un plan
- Ejecuta el plan
- Comprueba la respuesta

Resuelve otros problemas

- La suma de dos números es 40 mientras que $\frac{1}{5}$ de su diferencia es dos. ¿Cuáles son los dos números?
- Para ingresar a un parque de diversiones, una familia de 3 niños y 2 adultos paga \$100 por las entradas, y otra, conformada por 2 niños y 3 adultos, paga \$100. ¿Cuánto cuesta la entrada de los niños y cuánto la de los adultos?
- Observa el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x - 5 = \frac{1}{2}(y - 1) & (1) \\ 3x + 2y = 6 & (2) \end{cases}$$
 Resuélvelo con el método gráfico y determina cuál es su solución.
 

Formula problemas

- Inventa un problema en el que se incluya la información de la gráfica y resuélvelo.
 
- Comprueba la respuesta
 - Verifica que la edad actual de la abuela es 59 años.

Resultados esperados

La Guía Didáctica para la Implementación de ALEKS espera facilitar la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales a través de un enfoque personalizado de ALEKS adaptado a las necesidades individuales de los estudiantes, fomentando la autodirección en su proceso de aprendizaje, asimismo, pretende fortalecer el pensamiento crítico y capacidad para abordar desafíos matemáticos enfrentando situaciones de manera lógica y razonada.

Se espera que al finalizar la implementación de la Guía Didáctica los estudiantes adquieran un sólido entendimiento de los conceptos fundamentales relacionados con sistemas de ecuaciones lineales, esto incluye la comprensión profunda de los diferentes métodos de resolución, tales como sustitución, reducción, igualación, Regla de Cramer y Método de Gauss, demostrando competencias en la aplicación efectiva de los métodos aprendidos para encontrar soluciones, además, podrán aplicar estos conocimientos en situaciones del mundo real.

Bibliografía

- ALEKS Corporation. (2021). ALEKS: Assessment and Learning in Knowledge Spaces [Software]. McGraw-Hill. <https://www.aleks.com/>
- Conker. (2023). Conker for AI powered quizzes and more. <https://app.conker.ai/>
- DreamStudio. (2023). DreamStudio. URL: <https://beta.dreamstudio.ai/generate>
- GeoGebra. (2021). GeoGebra Clásico [Software]. <https://www.geogebra.org/>
- González, J., y González, D. (2014). Las matrices, un avance tecnológico en el estudio de las ecuaciones. Especialización tesis, Universidad Pedagógica Nacional. <http://funes.uniandes.edu.co/12162/>
- Hoekenga, C., Carpi, A. y Egger, A. (2013) Ecuaciones Lineales en la Ciencia. *Visionlearning* vol. MAT (1). <https://www.visionlearning.com/es/library/Biologia/2/Ecuaciones-Lineales-en-la-Ciencia/194/reading>
- Ministerio de Educación [MINEDUC]. (2018). Matemática 10mo Grado. Don Bosco. <https://www.educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2016/08/Matematica10v2.pdf>
- Ministerio de Educación del Ecuador. (2019). Currículo de los Niveles de Educación Obligatoria. Educación General Básica. Subnivel Superior. https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2021/12/Curriculo-priorizado-con-enfasis-en-CC-CM-CD-CS_Superior.pdf
- Stewart, J., Watson, S., y Redlin, L. (2017). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo*.
- Symbolab. (2023). Solucionador matemático Symbolab - calculadora paso a paso. <https://es.symbolab.com/solver/>
- Wolfram Alpha. (2023). Wolfram|Alpha: Computational Intelligence. <https://www.wolframalpha.com>

Anexos

Anexo 1. Crear una clase en ALEKS

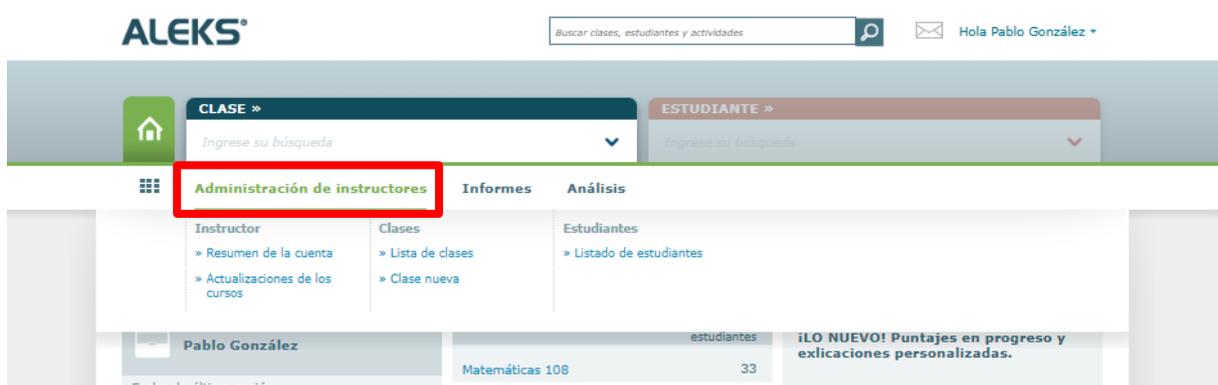
1. Regístrese/Inicie sesión en la plataforma.



2. Elija el mercado que más se adapte a sus intereses.



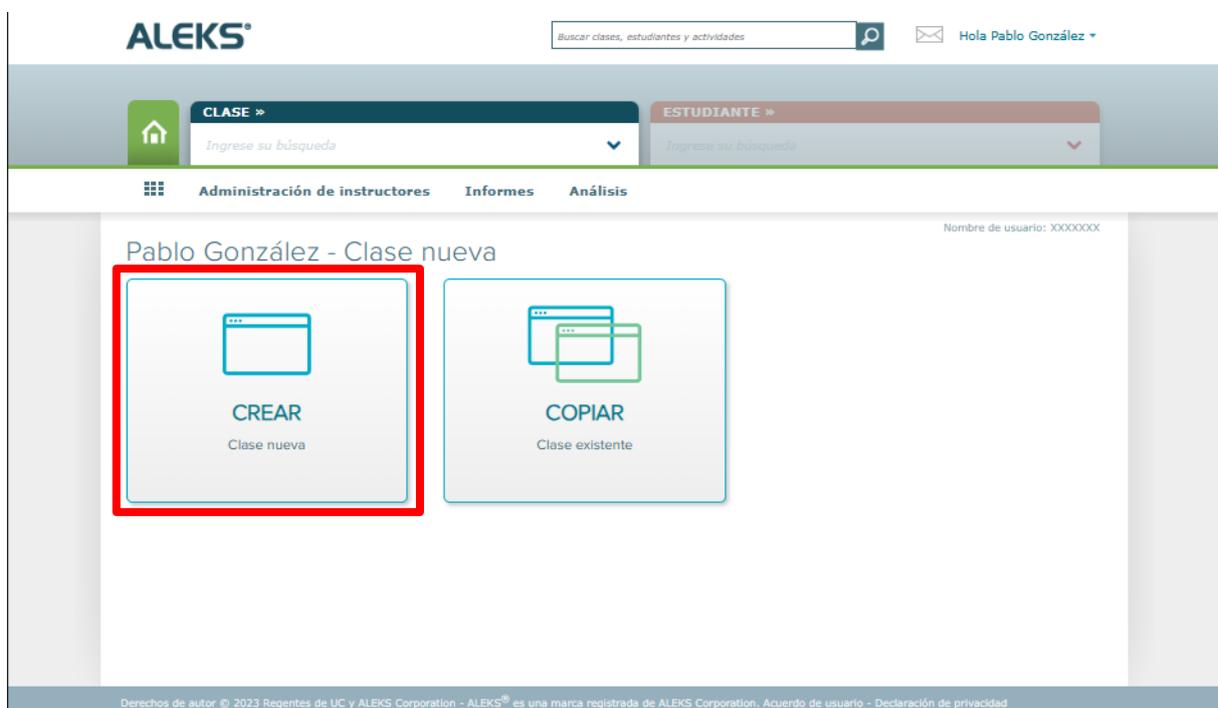
3. Una vez en el menú principal seleccionar **Administración de instructores** en la parte superior izquierda.



4. Se desplegará una citan de opciones de las cuales debe seleccionar la que dice **clase nueva**.



5. Seleccionar **Crear Clase nueva**.



6. Rellenar los datos de **Información de la clase** y **Contenido de la clase**.

1 Información y contenido de la clase **2** Opciones de la clase

Pablo González - Nueva clase

Información de la clase

Título de la clase

Periodo/Sección (opcional)

Fechas de clase Inicio — Fin

Archivar esta clase automáticamente después de la fecha final.

Contenido de la clase

Curso en ALEKS

Tipo de licencia

7. Clickear en siguiente y elegir las opciones de clase acorde a lo que requieras.

Estudiantes entrantes

Seleccione una opción para estudiantes que se transfieren entre clases compatibles de ALEKS

Transferir el progreso: el progreso del estudiante se transfiere a la nueva clase.

Calcular las calificaciones obtenidas en los módulos en función del progreso en la clase anterior.

Requerir una verificación de conocimientos exhaustiva.

Todos los estudiantes entrantes.

Solo estudiantes que no hayan completado la primera verificación de conocimientos por:

días o más.

Máx. 365

No transferir el progreso: los estudiantes recibirán otra primera verificación de conocimientos.

Estudiantes dados de baja

Seleccione una opción para estudiantes que fueron dados de baja en listas, paneles de control, informes y calificaciones.

Mostrar estudiantes que fueron dados de baja

Ocultar estudiantes que fueron dados de baja

QuickTables

Incluir QuickTables

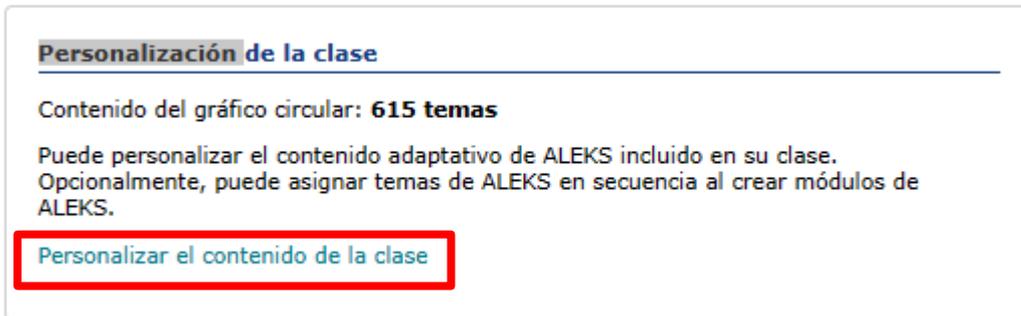
No configurar QuickTables en este momento

Configuración específica del curso

Calculadora gráfica

Proporcionar la calculadora gráfica de ALEKS a los estudiantes en este curso

8. Una vez creada la clase debes personalizar los contenidos prioritariamente, para ello, damos click en personalizar contenido de la clase en la sección de **Personalización de la clase**.

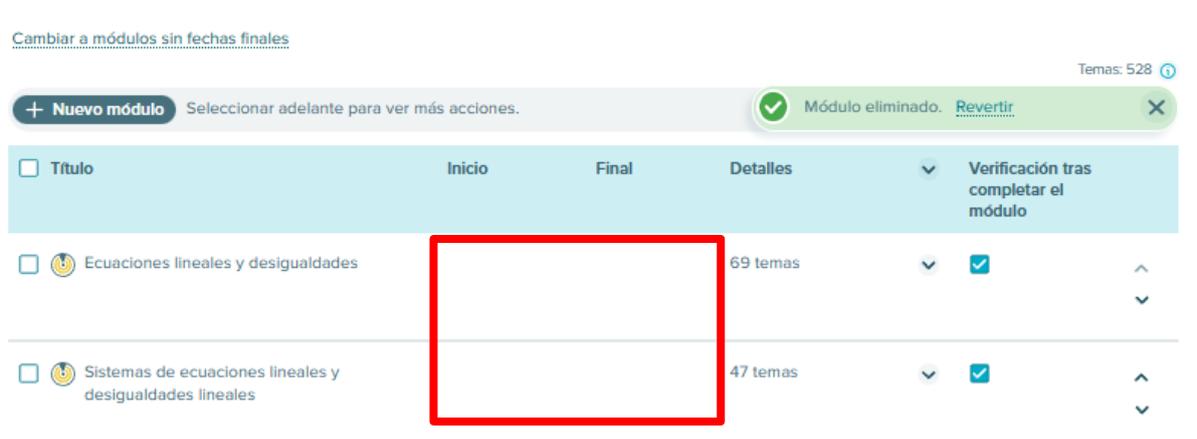


9. Dentro de este apartado puedes elegir dos opciones, una para crear los módulos adaptados a temas en específico y otro enfocado en el ritmo propio basándose en contenidos predefinidos. Si deseas tener más control sobre los contenidos elige la primera, si quieres que el aplicativo diseñe el plan de contenido elige la segunda.

Matemáticas 107 / Matemáticas 9.º grado - Contenido de la clase



10. Seleccionando módulos te aparecerán las siguientes opciones, módulos basados en ALEKS y opciones para crear tus propios módulos, puedes elegir cualquiera, presentan contenidos similares. Una vez dentro de alguna marca o desmarca los contenidos que quieres que se presenten en la plataforma. Debes asignar fechas límite para poder proseguir.



11. A continuación, ALEKS te ofrecerá contenidos complementarios en forma de introducción hacia los temas que seleccionaste, puedes omitir su inclusión o tomarlos.

Eliminar todos los temas recomendados

Título	Detalles
Exponentes y polinomios	103 temas 26 agregados
<input checked="" type="checkbox"/> Mover al módulo de preparación	Eliminar
<input checked="" type="checkbox"/> Identificar soluciones de una ecuación lineal de un paso: Problema tipo 2	
<input checked="" type="checkbox"/> Exponentes y fracciones	
<input checked="" type="checkbox"/> Exponentes y enteros: Problema tipo 1	
<input checked="" type="checkbox"/> Exponentes y fracciones con signo	
<input checked="" type="checkbox"/> Evaluar una expresión cuadrática: Enteros	

12. Una vez que guardes tu configuración sobre los temas, ALEKS generará diversas actividades acerca de lo seleccionado, empezará con una Verificación inicial de conocimientos, pruebas, tareas y evaluaciones programadas automáticamente, desde este menú puedes reasignar algunos parámetros de estas como la fecha, el tipo, preguntas, detalles y ver los informes generados de acuerdo a el progreso de los estudiantes en las actividades.

+ Nueva actividad Seleccionar adelante para ver más acciones.

Nombre	Tipo	Comienzo	Vence	Estado	Detalles	Informe
<input type="checkbox"/> Verificación inicial de conocimientos	Verificación de conocimientos	-	-	Abierta		
<input type="checkbox"/> Prueba 1	Prueba	21/01/2023 12:00 AM	04/02/2023 12:00 AM	Cerrada	15 preguntas	
<input type="checkbox"/> Tarea 1	Tarea	27/01/2023 12:00 AM	10/02/2023 12:00 AM	Cerrada	15 preguntas	
<input type="checkbox"/> Tarea 2	Tarea	02/02/2023 12:00 AM	16/02/2023 12:00 AM	Cerrada	15 preguntas	
<input type="checkbox"/> Prueba 2	Prueba	09/02/2023 12:00 AM	23/02/2023 12:00 AM	Cerrada	15 preguntas	
<input type="checkbox"/> Tarea 3	Tarea	16/02/2023 12:00 AM	02/03/2023 12:00 AM	Cerrada	15 preguntas	
<input type="checkbox"/> Prueba 3	Prueba	28/02/2023 12:00 AM	14/03/2023 12:00 AM	Cerrada	15 preguntas	
<input type="checkbox"/> Evaluación programada 1	Verificación de conocimientos programada	13/03/2023 8:00 AM	20/03/2023 11:59 PM	Cerrada	10,0	

Anexo 2. Bitácora de búsqueda

Fecha	Motor de Repositorio	búsqueda-BDC/	Ecuación de búsqueda	Resultados	Idioma	Resultados más relevantes	Observación
20/5/2023	Google Académico	ACM Digital Library	"Inteligencia artificial" AND "enseñar matemática" AND "educación secundaria" AND ("estudio" OR "investigación" OR "documento") AND ("muestra" OR "población")	122	Español	2018_Auccahuasi_Herramienta interactiva en línea como instrumento para el aprendizaje de las matemáticas.	<u>Experimental</u>
22/5/2023		ECOS			Español	2016_Gutiérrez_Uso del software Aleks como complemento en la asignatura de Fundamentos de Matemática	<u>Experimental</u>
23/5/2023		Repositorio de la Universidad Nacional del Callao			Español	2018_Mendoza_Plataforma virtual ALEKS y la influencia en el rendimiento académico de los estudiantes	<u>Experimental</u>
25/5/2023		Repositorio de la Universidad César Vallejo			Español	2022_Guadalupe_Khan Academy para resolver problemas matemáticos	<u>Experimental</u>
26/5/2023		Repositorio de la Universidad Central del Ecuador			Español	2021_Játiva_Uso de la metodología STEAM para motivar a niños el uso de Inteligencia Artificial	<u>Experimental</u>
26/5/2023		Dialnet			Español	2015_Arnau_Hacia profesores artificiales en la resolución algebraica de problemas verbales	<u>Documental</u>
28/5/2023		Repositorio de la Universidad de los Andes			Inteligencia artificial AND enseñanza matemáticas AND educación secundaria	60	Español
28/5/2023	Repositorio de la Universitat Politècnica de València	Español	2021_Calabuig_Aprender como una máquina: introduciendo la Inteligencia Artificial en la enseñanza secundaria	<u>Documental</u>			
28/5/2023	Repositorio de la Universidad Nacional de Educacion	Español	2022_Orellana_Enseñanza-aprendizaje de la Inteligencia Artificial en primaria y secundaria	<u>Documental</u>			

Fecha	Motor de Repositorio	búsqueda-BDC/	Ecuación de búsqueda	Resultados	Idioma	Resultados más relevantes	Observación
28/5/2023		Repositorio de la Universidad de Salamanca			Español	2023_Flores_Herramientas y sistemas de inteligencia artificial para el aprendizaje en línea	<u>Documental</u>
30/5/2023	Google Académico	ProQuest	("inteligencia artificial" OR "artificial intelligence") AND ("educación secundaria" OR "secondary education") AND ("enseñar matemática" OR "teaching mathematics") AND ("población" OR "population")	271	Inglés	2022_Isgandarli_ALEKS y el rendimiento de estudiantes	<u>Experimental</u>
30/5/2023		SpringerLink			Inglés	2021_Rebolledo_Tutoría inteligente matemática	<u>Experimental</u>
30/5/2023		Repositorio de la Universitat Politècnica de València			Español	2017_Albarraçin_Videojuegos e IA para matemática	<u>Experimental</u>
30/5/2023		ScienceDirect			Inglés	2013_Özyurt_e-learning para aprender probabilidad con UZWEBMAT	<u>Experimental</u>
30/5/2023		Repositorio de la Universidad de Brighton			Inglés	2022_Jancarik_asistente IA para matemática	<u>Experimental</u>
6/6/2023		ProQuest			Inglés	2022_Casey_currículos de IA en educación	<u>Documental</u>
6/6/2023		KYOBO BOOK			Coreano	2021_Myounghee_materiales con IA para matemática	<u>Documental</u>
6/6/2023		MDPI			Inglés	2020_Voskoglou_Beneficios y limitaciones de la IA para aprender matemáticas	<u>Documental</u>
6/6/2023		MDPI			Inglés	2021_González_ IA para evaluar ara evaluar los aprendizajes en un curso de matemática	<u>Documental</u>
6/6/2023		Repositorio de la Universidad de Chiñe			Español	2021_Moya_Preparacion matemática basada en IA	<u>Documental</u>
6/6/2023	ProQuest	Inglés	2020_Messer_ Experiencias de profesores con aprendizaje personalizado mediante IA	<u>Documental</u>			

Fecha	Motor de Repositorio	búsqueda-BDC/	Ecuación de búsqueda	Resultados	Idioma	Resultados más relevantes	Observación
6/6/2023		Repositorio de la Universidad Helénica Mediterránea			Inglés	2021_Marios_ Extracting Learning Analytics from Game Based Learning Sessions	<u>Documental</u>
6/6/2023		Repositorio de la Universidad Stanford			Inglés	2022_Zhou_Innovacion del currículo con IA en China	<u>Documental</u>
10/6/2023		ProQuest			Inglés	2019_Glaze_matemáticas y el uso del sistema de tutoría inteligente Desmos	<u>Experimental</u>
10/6/2023	Google Académico	Repositorio de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo	("inteligencia artificial" OR "artificial intelligence") AND ("educación secundaria" OR "secondary education") AND ("población" OR "population") AND ("Desmos")	40	Español	2022_Basantes_Math Solver para enseñar sistemas de ecuaciones	<u>Experimental</u>
10/6/2023		Repositorio de la Universidad de Valladolid			Español	2022_Martínez_Fomento de la creatividad y pensamiento Desmos	<u>Experimental</u>
10/6/2023		Repositorio de la Universidad de Lynn			Inglés	2020_Benjamín_Percepciones del uso de IA adaptativas	<u>Documental</u>
10/6/2023		ScienceDirect			Inglés	2015_Miyami_Word Problem Solver System Using Artificial Intelligence	<u>Experimental</u>
10/6/2023	ScienceDirect	ProQuest	("inteligencia artificial" OR "artificial intelligence") AND ("educación secundaria" OR "secondary education") AND ("población" OR "population") AND ("Mathway")	10	Inglés	2020_Estrella_Acciones recomendadas a colegios para emplear IA	<u>Experimental</u>
10/6/2023		IRE Journals			Inglés	2023_Booc_Usos de calculadoras con IA	<u>Documental</u>
10/6/2023	Google Académico	Repositorio de la Universidad Internacional de La Rioja	("inteligencia artificial" OR "artificial intelligence") AND ("educación secundaria")	52	Español	2014_García_Aprendizaje adaptativo online para matemáticas	<u>Experimental</u>

Fecha	Motor de Repositorio	búsqueda-BDC/	Ecuación de búsqueda	Resultados	Idioma	Resultados más relevantes	Observación
10/6/2023		Repositorio de la Univerdidad de La Sabana	OR "secondary education") AND ("población" OR "population") ("DreamBox")		Español	2017_Cárdenas_Uso del aprendizaje adaptativo en la enseñanza de la aritmética	<u>Experimental</u>
10/6/2023		Frontiers			Inglés	2022_Niktin_Tecnología para personalizar la instrucción matemática en secundaria	<u>Experimental</u>
10/6/2023		DergiPark			Inglés	2019_Kürşat_Uso de la IA ArtiBos en secundaria	<u>Experimental</u>
10/6/2023		Repositorio de la UTS			Inglés	2022_UTS_Loble_IA y la tecnología educativa para abordar la brecha de aprendizaje	<u>Documental</u>
10/6/2023	ProQuest	ProQuest		15	Inglés	2018_Crowley_El impacto del aprendizaje adaptativo en el logro matemático	<u>Experimental</u>
10/6/2023		ProQuest			Inglés	2016_Barton_Intervención matemática usando tutores Carnegie y Odyssey	<u>Experimental</u>
10/6/2023		ProQuest			Inglés	2021_Charles_La implementación del aprendizaje personalizado en secundaria	<u>Documental</u>
11/6/2023	Google Académico	SEMANTIC	("inteligencia artificial" OR "artificial intelligence") AND ("educación secundaria" OR "secondary education") AND ("población" OR "population") ("ALEKS")	139	Inglés	2016_Math_Reporte de un tutor cognitivo para matemática	<u>Experimental</u>
11/6/2023		ScienceDirect			Inglés	2021_Mills_ALEKS para estudiantes con dificultades	<u>Experimental</u>
11/6/2023		Repositorio de la Universidad Estatal de Shawnee			Inglés	2020_Waits_ALEKS y la retención matemática	<u>Experimental</u>
11/6/2023		ProQuest			Inglés	2018_Haugsness_Tutoría inteligente sobre el rendimiento matemático de la escuela intermedia	<u>Experimental</u>

Fecha	Motor de Repositorio	búsqueda-BDC/	Ecuación de búsqueda	Resultados	Idioma	Resultados más relevantes	Observación
11/6/2023		Repositorio de la Universidad de Baker			Inglés	2020_Basadre_Tutor Cognitivo en el rendimiento de los estudiantes de décimo grado en matemáticas	<u>Experimental</u>
11/6/2023		Frontiers			Inglés	2021_Yin_ Juegos educativos secundaria	<u>Experimental</u>
11/6/2023		Repositorio de la Universidad del Sur de California			Inglés	2019_Oueini_Enseñan geometría con tutores inteligentes	<u>Experimental</u>
11/6/2023		Repositorio de la Universidad Tecnológica del Uruguay			Español	2023_Fontoura_auxiliar en la resolución de problemas de Matemática	<u>Experimental</u>
		Repositorio de la Universidad Nacional de La Plata			Español	2022_Pezzini_Tutores inteligentes en educación secundaria	<u>Documental</u>
11/6/2023	Arxiv	Arxiv			Inglés	2020_Marienko_Personalizaión del aprendizaje con tecnologías adaptativas	<u>Documental</u>

Anexo 3. Informe de pertinencia



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE LOJA

FACULTAD DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN
CARRERA DE PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS
EXPERIMENTALES: MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA

Loja, 25 de abril de 2023

Ph.D.
Ángel Klever Orellana Malla
DIRECTOR CARRERA DE PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES:
MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA
Ciudad

De mi consideración:

Me dirijo a su autoridad para presentar el informe de revisión del proyecto del trabajo de integración curricular, presentado por el estudiante **Pablo Fernando González Jiménez**, bajo el tema:

Uso de la Inteligencia Artificial en la enseñanza de Matemática en el nivel de educación secundaria

Luego de haber analizado la estructura, coherencia y pertinencia de los elementos del mencionado proyecto y confirmado la incorporación de correcciones y sugerencias por parte del estudiante, me permito emitir el **informe favorable** a fin de que se continúe con el trámite respectivo.

Sin otro particular, me suscribo de usted.

Atentamente,



FABRICIO VLADIMIR
VINCES VINCES

Lic. Fabricio Vladimir Vinces Vinces. Mg. Sc.
DOCENTE ASESOR DEL PROYECTO
DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR

Ciudad Universitaria "Guillermo Falconí Espinosa" Casilla letra "S"
Teléfono: 2547 – 496
dirección.cfm@unl.edu.ec – secretaria.cfm@unl.edu.ec

Anexo 4. Oficio de designación del director de TIC



UNL

Universidad
Nacional
de Loja

Carrera de Pedagogía de las
Ciencias Experimentales:
Matemáticas y la Física

Memorando Nro.: UNL-FEAC-CPCEMF-2023-0110

Loja, 02 de mayo del 2023

Licenciado.

Fabrizio Vladimir Vences Vences. Mg. Sc.

**DOCENTE DE LA CARRERA DE PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES:
MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA DE LA FACULTAD DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA
COMUNICACIÓN.**

Presente.-

Me es honroso dirigirme a usted con el fin de expresar un atento saludo y desear éxitos en las labores a usted encomendadas.

Tengo a bien indicar que luego de receptor el informe favorable de pertinencia del proyecto denominado: **Uso de la Inteligencia Artificial en la enseñanza de Matemática en el nivel de educación secundaria**. De autoría del **Sr. González Jiménez Pablo Fernando**, estudiante del Ciclo VIII de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y la Física, me permito informar que se ha procedido a designarla como **Director del trabajo de integración curricular**, del mencionado proyecto para que se dé estricto cumplimiento a las directrices del Reglamento de Régimen Académico de la Universidad Nacional de Loja, a fin de proceder con los trámites de graduación correspondientes, a partir de la fecha el aspirante laborará en las tareas investigativas para desarrollar la investigación bajo su asesoría y responsabilidad, de acuerdo al cronograma establecido.

Particular que informo para los fines legales pertinentes.

Atentamente,



ÁNGEL KLEVER
ORELLANA MALLA

PhD. Ángel Klever Orellana Malla.
**DIRECTOR DE LA CARRERA DE PEDAGOGÍA
DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES: MATEMÁTICAS Y LA FÍSICA**

c.c. archivo de la carrera
Elaboración Lcdo. Alberto Miguel Carrión.

Educamos para **Transformar**

Anexo 5. Certificación de traducción del resumen



Loja, 07 de agosto de 2023

Lenin Oswaldo Jiménez Jiménez

LICENCIADO EN PEDAGOGÍA DEL IDIOMA INGLÉS

CERTIFICO:

Que el resumen del Trabajo de Integración Curricular cuyo título es: **Uso de la Inteligencia Artificial en la enseñanza de Matemática en el nivel de educación secundaria**, del aspirante **Pablo Fernando González Jiménez**, con cédula de identidad Nro. **1150072229** ha sido traducido al inglés y cumple con las características propias del idioma extranjero.

Resumen:

La inteligencia artificial tiene el potencial para convertirse en una herramienta valiosa para enseñar. La presente investigación tiene como objetivo analizar el uso de inteligencia artificial en la enseñanza de Matemática en el nivel de educación secundaria. Para llevar a cabo el trabajo se realizó un estudio documental sistemático de alcance exploratorio-descriptivo, sobre el que se fundamentaron teóricamente los objetos de investigación, además, se examinó la información de 48 textos donde se evaluó la aplicación de sistemas inteligentes para enseñar la asignatura mencionada. Los resultados mostraron que las IA más empleadas en educación son los tutores inteligentes, también revelaron que el principal aspecto a considerar para implementar estos sistemas son los recursos técnicos y tecnológicos, y que la inserción de la IA en la educación no sigue un proceso metodológico único, sin embargo, se acopla a distintas fases de estos. Finalmente se concluyó que los sistemas inteligentes mejoran la eficiencia del aprendizaje brindando opciones para automatizar y personalizar la enseñanza.

Palabras clave: inteligencia artificial, enseñar Matemática, educación secundaria, guía didáctica.



UNL

Universidad
Nacional
de Loja

Abstract:

Artificial intelligence has the potential to become a valuable tool for teaching. The present research aims to analyze the use of artificial intelligence in the teaching of Mathematics at the secondary school level. In order to carry out this work, a systematic documentary study was conducted with an exploratory-descriptive scope, on which was theoretically based the research objects. In addition, the information from 48 literary sources where the application of intelligent systems to teach the mentioned subject was evaluated. The results showed that the most used AI in education is intelligent tutors; they also revealed that the main aspect to consider for the implementation of these systems is technical and technological resources and that the insertion of AI in education does not follow a single methodological process, but it is coupled to different phases of these. Finally, it was concluded that intelligent systems improve learning efficiency by providing options to automate and personalize teaching.

Keywords: Artificial Intelligence, Mathematics teaching, Secondary education, Didactic guide.

Lo certifico en honor a la verdad.

Lenin Oswaldo Jiménez Jiménez

LICENCIADO EN PEDAGOGÍA DEL IDIOMA INGLÉS

Educamos para Transformar