UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN

CARRERA DE FÍSICO MATEMÁTICAS

TÍTULO

El proyector digital como recurso didáctico para el aprendizaje de la línea recta en los estudiantes del primer año, del Bachillerato General Unificado, paralelo A, de la Unidad Educativa Anexa a la Universidad Nacional de Loja, de la ciudad de Loja, periodo 2013 – 2014

Tesis previa a la obtención de grado de Licenciado en Ciencias de la Educación, mención Físico Matemáticas.

AUTOR

Luis Vinicio Calva Alvarez

DIRECTOR

Dr. Manuel Lizardo Tusa Mg.Sc.

LOJA – ECUADOR

2015

CERTIFICACIÓN

Dr. Manuel Lizardo Tuza Mg. Sc.

DOCENTE DE LA CARRERA FÍSICO MATEMÁTICAS DEL ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA Y DIRECTOR DE TESIS.

CERTIFICA:

Haber asesorado y monitoreado con pertinencia y rigurosidad científica la ejecución del proyecto de tesis titulada EL PROYECTOR DIGITAL COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA EL APRENDIZAJE DE LA LÍNEA RECTA EN LOS ESTUDIANTES DEL PRIMER AÑO, DEL BACHILLERATO GENERAL UNIFICADO, PARALELO A, DE LA UNIDAD EDUCATIVA ANEXA A LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA, DE LA CIUDAD DE LOJA, PERIODO 2013 – 2014, de autoría de Luis Vinicio Calva Alvarez, estudiante del octavo módulo de la carrera de Físico Matemáticas.

Por lo que se autoriza su presentación, defensa y demás trámites correspondientes a la obtención del grado de licenciatura.

Loja, Marzo 03 de 2015

Dr. Manuel Lizardo Tuza Mg. Sc.
DIRECTOR DE TESIS

AUTORÍA

Yo, Luis Vinicio Calva Alvarez, declaro ser el autor de la presente tesis y eximo expresamente a la Universidad Nacional de Loja y a sus representantes jurídicos de posibles reclamos o acciones legales por el contenido de la misma.

Adicionalmente declaro y autorizo a la Universidad Nacional de Loja, la publicación de la misma en el Repositorio Institucional-Biblioteca Virtual.

Autor Luis Vinicio Calva Alvarez

Firma.....

Cédula: 1900552082

Fecha: Marzo 03 de 2015

CARTA DE AUTORIZACIÓN DE TESIS POR PARTE DEL AUTOR, PARA LA CONSULTA, REPRODUCCIÓN PARCIAL O TOTAL Y PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DEL TEXTO COMPLETO.

Yo, Luis Vinicio Calva Alvarez, declaro ser el autor de la presente tesis titulada **EL PROYECTOR DIGITAL COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA EL APRENDIZAJE DE LA LÍNEA RECTA EN LOS ESTUDIANTES DEL PRIMER AÑO, DEL BACHILLERATO GENERAL UNIFICADO, PARALELO A, DE LA UNIDAD EDUCATIVA ANEXA A LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA, DE LA CIUDAD DE LOJA, PERIODO 2013 – 2014**, como requisito para optar al grado de Licenciado en Ciencias de la Educación, Mención Físico Matemáticas; autorizo al Sistema Bibliotecario de la Universidad Nacional de Loja para que con fines académicos, muestre al mundo la producción intelectual de la Universidad, a través de la visibilidad de su contenido en el repositorio Digital Institucional.

Los usuarios pueden consultar el contenido de este trabajo en RDI, en las redes de la información del país y del exterior, con las cuales tenga convenio la Universidad.

La Universidad Nacional de Loja, no se responsabiliza por el plagio o copia de tesis que realice un tercero.

Para constancia de esta autorización, en la ciudad de Loja a los 03 días del mes de marzo del dos mil quince.

Firma.....

Autor: Luis Vinicio Calva Alvarez
Cédula: 1900552082
Dirección: Loja Correo electrónico: luchocapi@yahoo.com
Celular: 0981798174

DATOS COMPLEMENTARIOS:
Director de Tesis: Dr. Manuel Lizardo Tuza Mg. Sc.
Tribunal de Grado: Dra. Enriqueta Andrade Maldonado Mg. Sc. (Presidente)
Dr. Guido Benavides Criollo Mg. Sc. (Integrante)
Dra. Irene Mireya Gahona Mg. Sc. (Integrante)

AGRADECIMIENTO

Expreso mi sincero agradecimiento al Área de la Educación, el Arte y la Comunicación de la Universidad Nacional de Loja, especialmente a la Carrera de Físico Matemáticas por brindarme los conocimientos y la experiencia precisa para el desarrollo profesional en la vida cotidiana.

Al Director de Tesis Dr. Manuel Lizardo Tuza Mg. Sc., quien me guio y asesoró a través de sus conocimientos, sugerencias y habilidades que fueron pertinentes y necesarias para la concreción del presente trabajo de investigación.

Agradezco también a las autoridades, personal docente y estudiantes de la Unidad Educativa Anexa a la Universidad Nacional de Loja, de la ciudad de Loja, por su valiosa colaboración en la investigación de campo y en el desarrollo de los seminarios talleres constitutivos de la investigación.

El Autor

DEDICATORIA

Esta tesis la dedico a Dios quién supo guiarme por el buen camino, darme fuerzas para seguir adelante y no desmayar en los problemas que se presentaban, enseñándome a encarar las adversidades sin perder nunca la dignidad ni desfallecer en el intento.

A mis padres Luis Rogelio y María Yolanda, por ser el pilar más importante y por demostrarme siempre su cariño y apoyo incondicional, sin importar nuestras diferencias de opiniones; por sus consejos, comprensión, amor, ayuda en los momentos difíciles, y por ayudarme con los recursos necesarios durante mi carrera. Me han dado todo lo que soy como persona, mis valores y principios, mi carácter y empeño, mi perseverancia, coraje y responsabilidad para conseguir mis metas.

A mis hermanos Olger y su esposa Melida, a Marlene, Tania, Renan, Mary, Juan, Joffre y Jandry a mis sobrinos Jazmín, Dilan y Andy por estar siempre presentes, acompañándome para poderme realizar.

A mi abuelita Doraliza Jiménez por brindarme su amor y su apoyo en momentos difíciles de mi formación.

A Silvia, por acompañarme durante todo este arduo camino y compartir conmigo alegrías y fracasos.

A Ligia, por el apoyo y ayuda que me brindó al inicio de mi carrera.

Gracias a todas las personas que me ayudaron directa e indirectamente en mi formación profesional.

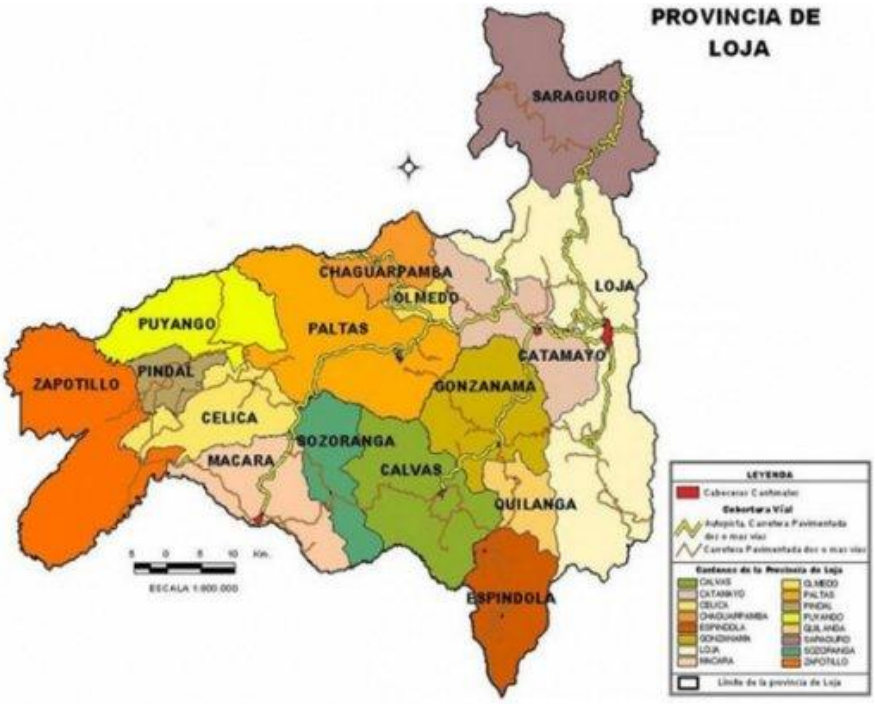
El Autor

MATRIZ DE ÁMBITO GEOGRÁFICO

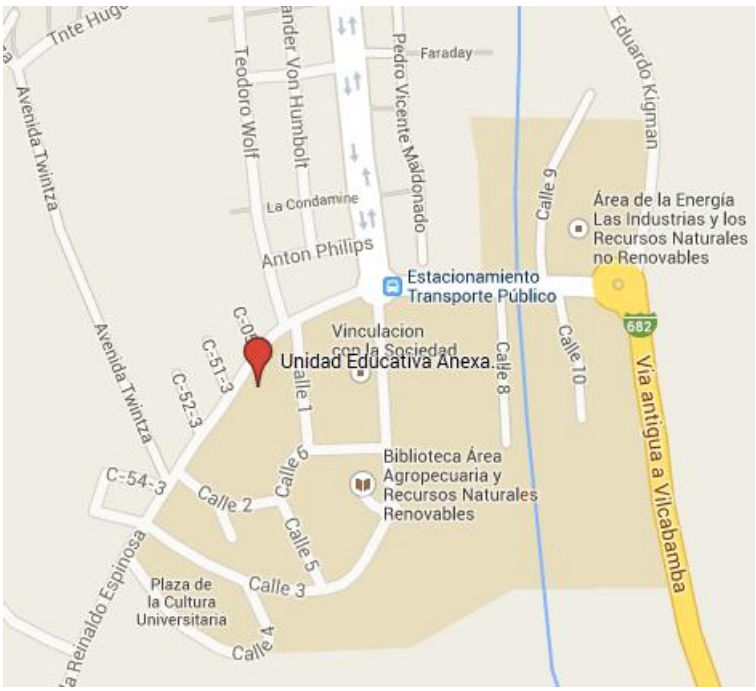
BIBLIOTECA: Área de la Educación el Arte y la Comunicación											
TIPO DE DOCUMENTO	AUTOR/NOMBRE DEL DOCUMENTO	FUENTE	FECHA AÑO	ÁMBITO GEOGRÁFICO						OTRAS DEGRADACIONES	NOTAS OBSERVACIONES
				NACIONAL	REGIONAL	PROVINCIA	CANTÓN	PARROQUIA	BARRIO COMUNIDAD		
TESIS	Luis Vinicio Calva Alvarez EL PROYECTOR DIGITAL COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA EL APRENDIZAJE DE LA LÍNEA RECTA EN LOS ESTUDIANTES DEL PRIMER AÑO, DEL BACHILLERATO GENERAL UNIFICADO, PARALELO A, DE LA UNIDAD EDUCATIVA ANEXA A LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA, DE LA CIUDAD DE LOJA, PERIODO 2013 – 2014	UNL	2014	ECUADOR	ZONA 7	LOJA	LOJA	SAN SEBASTIÁN	LA ARGELIA	CD	Licenciado en Ciencias de la Educación, mención Físico Matemáticas

MAPA GEOGRÁFICO Y CROQUIS

MAPA GEOGRÁFICO DEL SITIO DE INVESTIGACIÓN



CROQUIS DEL SECTOR DE INTERVENCIÓN



ESQUEMA DE TESIS

- **Carátula externa**
- **Hoja en blanco**
- **Carátula interna**
- **Certificación**
- **Autoría**
- **Carta de autorización**
- **Agradecimiento**
- **Dedicatoria**
- **Matriz de ámbito geográfico**
- **Mapa geográfico y Croquis**

a. **Título**
b. **Resumen en castellano y traducido al inglés**
c. **Introducción**
d. **Revisión de literatura**
e. **Materiales y métodos**
f. **Resultados**
g. **Discusión**
h. **Conclusiones**
i. **Recomendaciones**
j. **Bibliografía**
k. **Anexos**

Índice

a. TÍTULO

EL PROYECTOR DIGITAL COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA EL APRENDIZAJE DE LA LÍNEA RECTA EN LOS ESTUDIANTES DEL PRIMER AÑO, DEL BACHILLERATO GENERAL UNIFICADO, PARALELO A, DE LA UNIDAD EDUCATIVA ANEXA A LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA, DE LA CIUDAD DE LOJA, PERIODO 2013 – 2014

b. RESUMEN

El trabajo de investigación tiene como título EL PROYECTOR DIGITAL COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA EL APRENDIZAJE DE LA LÍNEA RECTA EN LOS ESTUDIANTES DEL PRIMER AÑO, DEL BACHILLERATO GENERAL UNIFICADO, PARALELO A, DE LA UNIDAD EDUCATIVA ANEXA A LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA, DE LA CIUDAD DE LOJA, PERIODO 2013 – 2014. El objetivo de la investigación fue usar el proyector digital como recurso didáctico para mejorar el aprendizaje de la línea recta. Los métodos que se aplicaron en la investigación son en su orden los siguientes: deductivo, analítico – sintético, científico y cuantitativo – cualitativo. El proceso de investigación se estructuró en base a un diagnóstico para estudiar y determinar los problemas que influyen en el aprendizaje, planificar la solución pertinente a las dificultades encontradas; aplicar la alternativa de la investigación conducente a cumplir los objetivos planteados, y realizar la valoración correspondiente por medio de una técnica de contraste cuantitativa y cualitativa, Prueba Signo Rango de Wilcoxon, que sustenta la efectividad del uso del proyector digital para potenciar el aprendizaje de la línea recta. El principal hallazgo encontrado es que las carencias o necesidades cognitivas presentes en el aprendizaje de la línea recta se pueden disminuir con la aplicación del proyector digital como recurso didáctico de estudio.

SUMMARY

The research is titled THE DIGITAL PROJECTOR AS TEACHING LEARNING RESOURCE FOR STRAIGHT LINE IN FIRST YEAR STUDENTS, THE BACHELOR GENERAL UNIFIED, PARALLEL A, OF THE UNIDAD EDUCATIVA ANEXA A LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA CITY OF LOJA, PERIOD 2013-2014. The aim of the investigation was to use the digital projector as didactic resource to improve the learning of the straight line. The methods applied in research are in order as follows: deductive, analytical - synthetic, scientific and quantitative - qualitative. The research process was structured based on a diagnosis, to study and identify problems that influence learning; to then plan the pertinent solution to offset the found difficulties; Apply the alternative of the investigation leading to achieve the objectives set, and perform the valuation through a technique of contrast quantitative and qualitative, Wilcoxon rank sign, which supports the effectiveness of the use of digital projector to enhance the learning of the straight line. The principal finding that it is considered to be they are the lacks or cognitive present needs in the learning of the straight line can be reduced with the application of digital projector as a teaching resource in learning the straight line.

c. INTRODUCCIÓN

La educación general básica y el bachillerato general unificado constituyen en la presente época, políticas de Estado, subsistemas educativos destinados a formar con calidad y calidez talento humano que coadyuve desde la ciencia y la educación al buen vivir.

La educación es un proceso que tiende a capacitar al individuo para actuar conscientemente frente a las nuevas situaciones de la vida, teniendo en cuenta la integración, la continuidad y el progreso social.

Frente a este contexto tuvo lugar la presente investigación titulada: El proyector digital como recurso didáctico para el aprendizaje de la línea recta en los estudiantes del primer año, del bachillerato general unificado, paralelo A, de la Unidad Educativa Anexa a la Universidad Nacional de Loja, de la ciudad de Loja, periodo 2013 – 2014.

El problema de investigación que se planteó fue ¿De qué manera el proyector digital como recurso didáctico mejora el aprendizaje de la línea recta en los estudiantes del primer año, paralelo A, del bachillerato general unificado de la Unidad Educativa Anexa a la Universidad Nacional de Loja, de la ciudad de Loja, periodo 2013 – 2014?

Posteriormente frente a los problemas encontrados se fijó el objetivo general que oriento la investigación:

- Usar el proyector digital como recurso didáctico para mejorar el aprendizaje de la línea recta en los estudiantes del primer año de bachillerato general unificado, paralelo A de la unidad educativa anexa a la Universidad Nacional de Loja, de la ciudad de Loja, periodo académico 2013 – 2014.

Los objetivos específicos que guiaron la investigación fueron:

- Comprender el aprendizaje de la línea recta.
- Diagnosticar las dificultades, obstáculos, obsolescencias y necesidades que se presentan en el aprendizaje de la línea recta.
- Diseñar la alternativa a través del proyector digital como recurso didáctico para el aprendizaje de la línea recta.
- Aplicar la alternativa propuesta del proyector digital como recurso didáctico para el aprendizaje de la línea recta.
- Valorar la efectividad de la misma para determinar su funcionalidad correcta en la educación, para su implementación y así potenciar el aprendizaje de la línea recta.

Consecutivamente se aplicaron, en su orden, los métodos: deductivo, porque se partió de ideas generales para llegar a características particulares; analítico–sintético, porque se estudió cada una de las partes del fenómeno en forma individual para luego hacer un estudio integral; científico, por el conjunto de procedimientos, instrumentos o técnicas utilizadas para dar solución al conjunto de problemas de investigación; y cuantitativo-cualitativo; para analizar los datos estadísticos en forma numérica y determinar sus efectos en la investigación.

El informe de investigación está estructurado en coherencia con lo dispuesto en el Art. 151 del Reglamento de Régimen Académico de la Universidad Nacional de Loja en vigencia y comprende: título; resumen en castellano y traducido al inglés; introducción; revisión de literatura; materiales y métodos; resultados; discusión; conclusiones; recomendaciones; bibliografía; anexos e índice.

Para efectuar la presente investigación se tomó una población de 29 estudiantes del primer año de Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa Anexa a la Universidad Nacional de Loja, respectivamente el docente de Matemática de ese curso; y padres de familia de los estudiantes.

Los resultados obtenidos por medio de la prueba en cada uno de los talleres fueron contrastados por medio de la Prueba Signo Rango de Wilcoxon, lo que determinó que hubo un cambio en el aprendizaje de los estudiantes.

En base a los resultados obtenidos por medio de las encuestas y pruebas se plantearon las conclusiones a las que se llegó en el proceso investigativo, en las cuales se evidencia que los estudiantes:

- Poseen carencias de conocimiento para definir científicamente a la línea recta.
- No pueden diferenciar entre la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares o paralelas.
- Tienen deficiencias teóricas para encontrar la ecuación general de una línea recta.
- Tienen deficiencias para encontrar la distancia entre dos puntos.
- No saben representar gráficamente e identificar la fórmula para calcular la pendiente de una línea recta.

Finalmente se plantearon recomendaciones a partir de las conclusiones obtenidas:

- Los estudiantes deben prestar más atención a los fundamentos teóricos que el docente imparte en el salón de clase.
- El docente debe buscar nuevas técnicas de enseñanza para despertar el interés de sus alumnos en el aprendizaje de la línea recta.
- Los estudiantes deben conocer cuál es la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares o paralelas entre sí, para así poder diferenciarlas y que se facilite la resolución de ejercicios.

d. REVISIÓN DE LA LITERATURA

1. LÍNEA RECTA

1.1. Historia de la línea recta

Según Zapata (2013), la Geometría proviene del griego *geo*, que significa tierra y *metrein*, medir, es una rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades del espacio. En su forma más elemental, la Geometría se preocupa de problemas métricos como el cálculo del área y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos. Otros campos de la Geometría son la Geometría Analítica, Geometría Descriptiva, Topología, Geometría de Espacios con cuatro o más dimensiones, Geometría Fractal, y Geometría no euclidiana.

La Geometría desarrollada por Euclides, parte de los términos primitivos como son: el punto, la recta, las relaciones de incidencia, orden y congruencia tienen un contenido material e intuitivo evidente. La vida de Euclides es poco conocida, salvo que vivió en Alejandría (actualmente Egipto) durante el reinado de Ptolomeo I. Fue un matemático y geómetra griego (325 - 265 a.C.) Se le conoce como, el Padre de la Geometría.

Euclides, en el siglo III a.C. configuró la Geometría en forma axiomática, tratamiento que estableció una norma a seguir durante muchos siglos.

En la geometría euclidiana descrita en el libro «Los Elementos», se encuentra una definición de la línea recta recogida por su autor: *Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella*, conjuntamente se encuentran los siguientes postulados propuestos por Euclides:

- Una línea recta puede ser dibujada uniendo dos puntos cualesquiera.
- Un segmento de línea recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.

- Dado un segmento de línea recta, puede dibujarse un círculo con cualquier centro y distancia.
- Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
- Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela.

Además de ésta supuesta definición recogida en Elementos de Euclides, a lo largo de la historia otros pensadores han dado definiciones como:

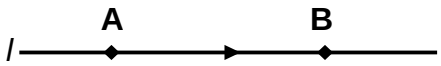
- Línea recta es la línea en la cual sus puntos intermedios hacen sombra a sus extremos (Platón, 427-347).
- Es el conjunto de puntos que permanecen invariantes cuando un cuerpo gira alrededor de dos de sus puntos (Leibniz, 1646-1716).
- Es el camino más corto entre dos puntos (Legendre, 1752-1833).
- Es la línea que, trazada de un punto a otro, no se vuelve ni a la derecha ni a la izquierda, y es la más corta que puede trazar entre esos dos puntos (Simpson, 1710-1761).
- La recta es una serie de puntos, cada uno de los cuales equidista de tres puntos dados (Fourier, 1768-1830).
- Es una línea homogénea, es decir, cuyas partes, tomadas indiferentemente, son semejantes entre sí y no difieren más que en su longitud (Delboeuf, 1831-1896).
- Es una línea indefinida tal que por dos puntos dados no se puede hacer pasar más que una (Duhamel, 1797-1872).

La Geometría avanzó muy poco desde el final de la era griega hasta la edad media. El siguiente paso importante en esta ciencia lo dio el filósofo y matemático francés René Descartes, cuyo tratado El Discurso del Método, publicado en 1637, hizo época. Este trabajo fraguó una conexión entre la Geometría y el Álgebra al demostrar cómo aplicar los métodos de una disciplina en la otra. Éste fundamento daría paso a lo que se conoce hoy en día como Geometría Analítica, que precisamente es la rama de la matemática que fusiona el estudio de la Geometría Euclidiana con el

Álgebra, en el análisis de las líneas y figuras por medio de expresiones algebraicas. Se llama Analítica a esta geometría porque implica un análisis estricto, lógico y racional para consignar en un plano de referencia los elementos geométricos básicos y luego hallar sus correspondencias en fórmulas y propiedades algebraicas. El principal referente es el plano cartesiano, llamado así en memoria a este gran hombre de la matemática y la filosofía. Es pues de esta manera como se convierte la línea recta en la introducción y parte de la Geometría Analítica.

1.2. Segmento rectilíneo dirigido

Un segmento AB es generado por un punto que se mueve a lo largo de la recta l de A hacia B. Lehmann (1994) afirma: "La porción de una línea recta comprendida entre dos de sus puntos se llama segmento rectilíneo o simplemente segmento" (p.1). Entonces podemos decir que el segmento AB está dirigido de A a B, e indicamos esto por medio de una flecha como se lo muestra en la figura siguiente.



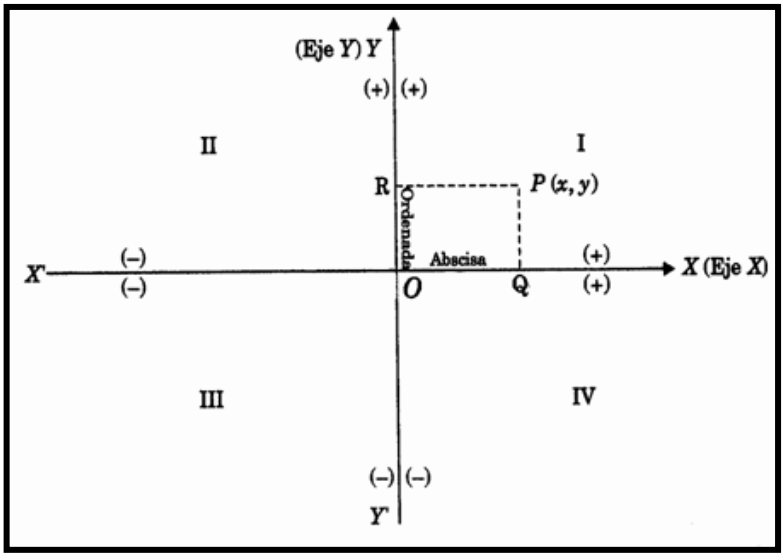
Así para la recta l, AB es un segmento cuyos extremos son A y B. La longitud del segmento AB se representa por $\overline{AB}$.

En este caso, el punto A se llama origen o punto inicial y el punto B extremo o punto final. También podemos obtener el mismo segmento dirigiéndolo de B a A; entonces B es el origen y A el extremo, y el segmento se designa por $\overline{BA}$. El sentido de un segmento dirigido se indica siempre escribiendo primero el origen o punto inicial. (Aguilar, 2010)

1.3. Sistema coordenado en el plano

Este sistema también se denomina *plano cartesiano* en honor a René Descartes, por haber sido quien lo unió al estudio del Álgebra y la Geometría Plana para dar lugar a la Geometría Analítica. Además éste se llama *sistema coordenado-bidimensional* o *plano.* El más importante, es el *sistema coordenado rectangular.* "Consta de dos rectas dirigidas, llamadas ejes de coordenadas, perpendiculares entre sí. La recta horizontal es el eje de las *abscisas o* eje de las x*;* la recta vertical es el eje de las *ordenadas* o eje de las y" (Zambrano, 2012, p.6).

Usando un segmento unidad conveniente, se divide cada eje de manera que los números enteros positivos queden a la derecha del origen sobre el eje x, y arriba del origen sobre el eje y. Los enteros negativos quedan a la izquierda del origen sobre el eje x, y abajo del origen sobre el eje y. A la abscisa y a la ordenada de un punto se les llaman *coordenadas del punto* y se escriben como un par de números dentro de un paréntesis separado por una coma; el primero de estos números representa siempre a la abscisa y el segundo a la ordenada.



En general, un punto cualquiera por ejemplo el punto P, cuya abscisa es x y la ordenada y, se designa mediante la notación $P(x, y)$.

Los ejes de coordenadas dividen al plano cartesiano en cuatro cuadrantes lo cuales se numeran con números romanos **I, II, III, IV** como se indica en la figura anterior.

"El sistema coordenado rectangular en el plano establece una correspondencia biunívoca entre cada punto y un par ordenado de números reales" (Lehmann, 1994, p.6).

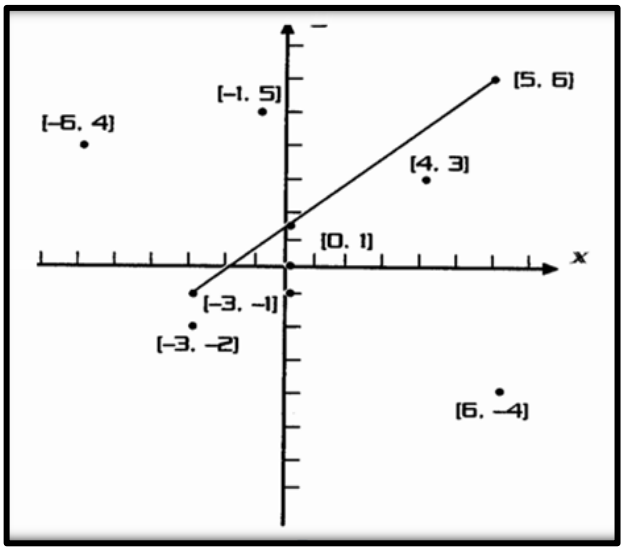
1.3.1. Representación de un par ordenado en el plano cartesiano

De acuerdo al libro de Matemática de noveno año, del Ministerio de Educación del Ecuador (2010). Para representar un par ordenado en el plano cartesiano, utilizamos el sistema cartesiano de coordenadas, el mismo que consta de dos ejes perpendiculares, el eje de las x y el eje de las y, los cuales se cortan en un punto O llamado origen.

En el sistema de coordenadas rectangulares hay una relación que establece que a cada par de números reales (x, y) le corresponde un punto definido del plano, y a cada punto del plano le corresponde un par único de coordenadas (x, y).

En el proceso graficado hay que tomar en cuenta los signos de las coordenadas del punto para ubicarlo en los cuadrantes; para ello se emplea el papel cuadriculado o de coordenadas rectangulares, ya que facilita la localización y el marcado de puntos en el plano.

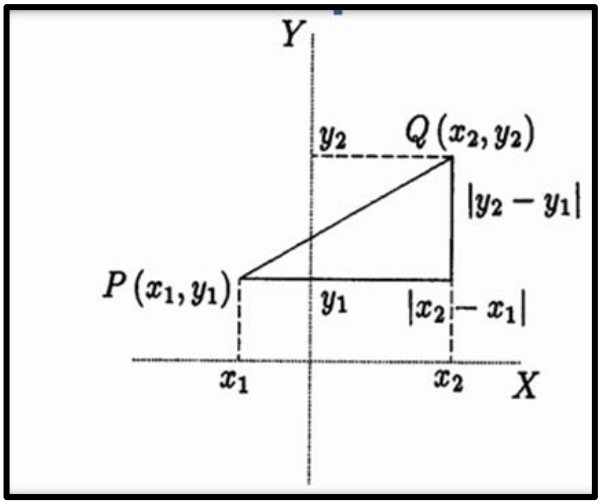
Ejemplo: Traza un sistema coordenado rectangular y señala los puntos siguientes: $(4,3)$; $(-1,5)$; $(-3,-2)$; $(0,1)$; $(6,-4)$; $(-6,4)$. Traza, además, el segmento de recta que une los puntos $(-3,-1)$ con $(5,6)$.



1.4. Distancia entre dos puntos

De acuerdo al libro de Matemática de noveno año del Ministerio de Educación (2010):

> Si analizamos dos puntos cualesquiera del sistema cartesiano, podemos ver que existe una distancia entre dichos puntos. Para deducir dicha fórmula, supongamos que se quiere calcular la distancia entre dos puntos $P(x_1; y_1)$ y $Q(x_2; y_2)$ que no estén en la misma recta vertical u horizontal, construimos un triángulo rectángulo que tenga al segmento PQ por hipotenusa, como se muestra en la figura, las longitudes de los catetos son $|x_2 - x_1|$ y $|y_2 - y_1|$. (p. 24)



La distancia entre P y Q es la longitud de la hipotenusa del triángulo. Recordemos que el teorema de Pitágoras dice que: En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Entonces:

$d(P,Q)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$,

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

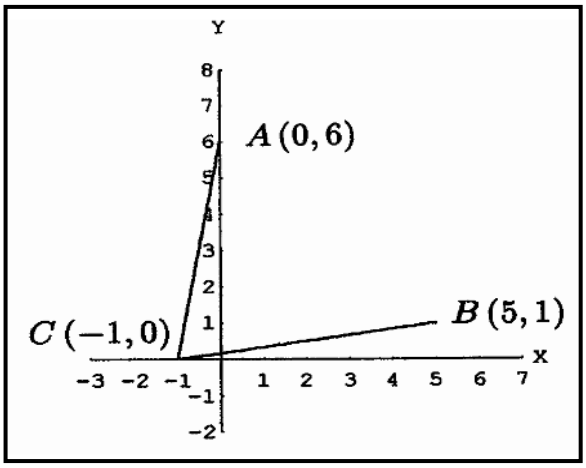
Obsérvese que si los puntos están en la misma vertical o en la misma horizontal, uno de los dos sumandos de la fórmula vale cero, pero el resultado sigue siendo cierto.

La fórmula anterior, además de permitir obtener la distancia entre dos puntos, nos capacita para solucionar, entre otros, los siguientes problemas:

- ✓ Determinar el perímetro de un triángulo o de algunas otras figuras geométricas.
- ✓ Comprobar que un triángulo es rectángulo, aplicando el teorema de Pitágoras a las distancias obtenidas al verificar que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
- ✓ Comprobar que un triángulo es isósceles, si dos de las distancias obtenidas son iguales.
- ✓ Comprobar que un triángulo es equilátero, si sus tres lados son iguales.

Para resolver un problema y de ser posible, se recomienda en todos los casas graficar los datos disponibles antes de realizar cualquier operación.

Ejemplo: ¿Qué coordenadas tiene el punto del eje x que equidista de $A(0,6)$ y $B(5,1)$?



Solución:

Llámese C al punto buscado. Como C está sobre el eje x, su segunda coordenada vale cero. Entonces $C(x, 0)$. Falta determinar el valor de x. Como la distancia de C a A debe ser igual a la distancia de C a B, igualamos:

$$d(C, A) = d(C, B)$$

Sustitúyase las coordenadas de los puntos;

$$\sqrt{(x-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (0-1)^2}$$

Efectuando las operaciones dentro de los radicales, se obtiene;

$$\sqrt{x^2 + 36} = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 1}$$

Elevando al cuadrado los dos lados de la ecuación y encontrando el valor de *x;*

$$x^2 + 36 = x^2 - 10x + 25 + 1$$

$$10x = -36 + 26$$

$$x = \frac{-10}{10}$$

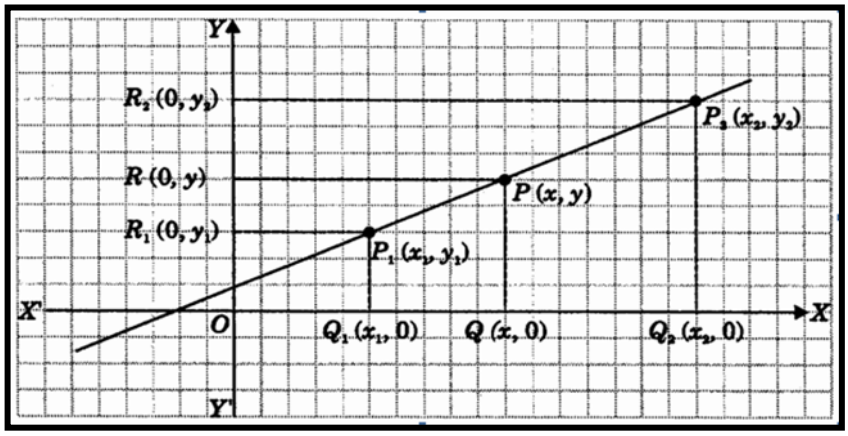
$$x = -1$$

Entonces el punto del eje x que equidista de A y B es $C(-1,0)$.

1.5. División de un segmento en una razón dada

Conociendo las coordenadas x_1, y_1, de un punto P_1 y las coordenadas x_2, y_2, del punto P_2, hállense las coordenadas (x, y), de un tercer punto P, que divide al segmento P_1P_2 de tal modo que la razón $r = \frac{P_1P}{PP_2}$. Para determinar las coordenadas de un punto P que divide a un segmento cuyos extremos son $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ *en la razón* $r = \frac{P_1P}{PP_2}$, se aplica el siguiente procedimiento.

De acuerdo a Suvorou (1973) por los puntos P_1, P y P_2 se trazan perpendiculares a los ejes coordenados, como las rectas paralelas P_1Q_1, PQ y P_2Q_2 interceptan segmentos proporcionales sobre las dos transversales P_1P_2 y Q_1Q_2 se establece que $\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{Q_1Q}{QQ_2}$.



Las coordenadas de los puntos trazados sobre el eje x son $Q_1(x_1, 0)$, y $Q(x, 0)$, y $Q_2(x_2, 0)$, y sobre el eje y son: $R_1(0, y_1)$, y $R(0, y)$, y $R_2(0, y_2)$.

La distancia dirigida de cada segmento $Q_1Q = x - x_1$ *y* $Q_2Q = x_2 - x$, sustitúyase en la ecuación de la razón, y resulta:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{Q_1Q}{QQ_2}$$

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

$$x - x_1 = r(x_2 - x)$$

$$x - x_1 = rx_2 - rx$$

$$x - rx = x_1 + rx_2$$

$$x(1 + r) = x_1 + rx_2$$

$$\therefore\ x = \frac{x_1 + rx_2}{(1 + r)} \quad \rightarrow r \neq -1$$

Las rectas paralelas P_1R_1, PR y P_2R_2 interceptan segmentos proporcionales sobre las dos transversales P_1P_2 y R_1R_2; por lo anterior:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{R_1R}{RR_2}$$

La distancia dirigida de cada segmento $R_1R = y - y_1$ y $RR_2 = y_2 - y$, se sustituye en la ecuación de la razón, y resulta:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{R_1R}{RR_2}$$

$$r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$$y - y_1 = r(y_2 - y)$$

$$y - y_1 = ry_2 - ry$$

$$y - ry = y_1 + ry_2$$

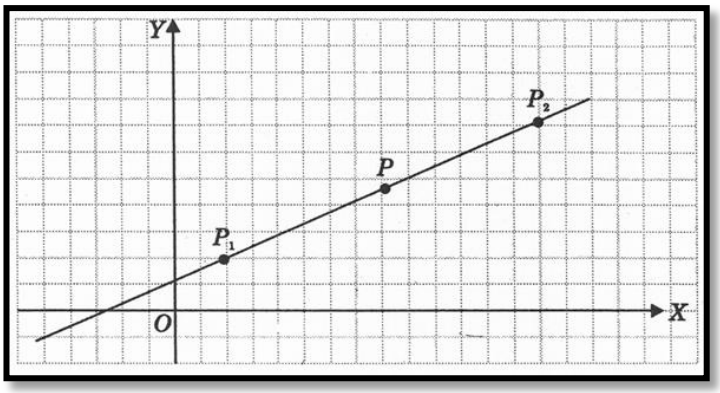
$$y(1 + r) = y_1 + ry_2$$

$$\therefore\ y = \frac{y_1 + ry_2}{(1 + r)} \quad \rightarrow r \neq -1$$

Teorema: Las coordenadas de un punto *P* que divide a un segmento cuyos extremos son $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la razón dada $r = \frac{P_1P}{PP_2}$ son:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{(1+r)} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{(1+r)} \quad \rightarrow r \neq -1$$

Si $P(x, y)$ es el punto medio del segmento P_1P_2, la razón es igual a la unidad, es decir:



Si $r = \frac{P_1P}{PP_2}$ y como $P_1P = PP_2$, resulta:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{P_1P}{P_1P} = \frac{PP_1}{PP_2} = 1$$

Al sustituir $r=1$ en las siguientes ecuaciones, tenemos:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{(1+r)} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{(1+r)}$$

$$x = \frac{x_1 + (1)x_2}{1+1} \qquad y = \frac{y_1 + (1)y_2}{1+1}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{2}$$

Corolario: Las coordenadas de un punto *P* que es el punto medio de un segmento cuyos extremos son $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, son:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad\qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ejemplo: Encontrar las coordenadas del punto P que divide al segmento determinado por A (8,2) y B (-5,7) en la razón $r = \frac{3}{4}$

Al sustituir en:

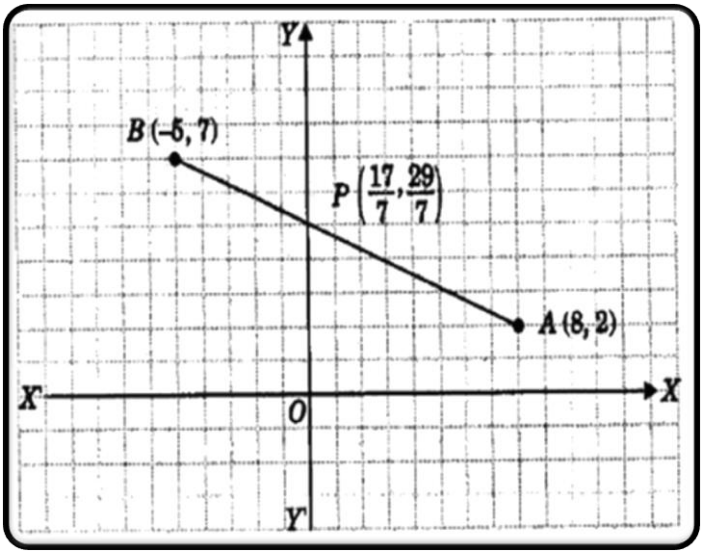
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad\qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{2}$$

$$x = \frac{8 + \left(\frac{3}{4}\right)(-5)}{1 + \frac{3}{4}} \qquad\qquad y = \frac{2 + \left(\frac{3}{4}\right)(7)}{1 + \frac{3}{4}}$$

$$x = \frac{17}{7} \qquad\qquad y = \frac{29}{7}$$

$$\therefore \textit{las coordenadas del punto buscado son } P\left(\frac{17}{7}, \frac{29}{7}\right)$$

Al graficar:



1.6. La línea recta

1.6.1. Definición

Kindle (1984) afirma:

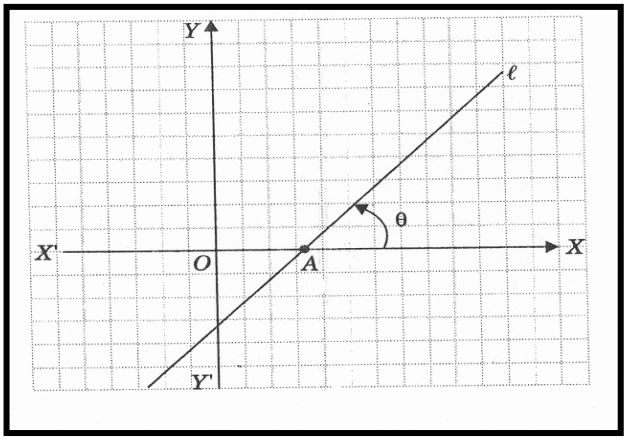
> Una línea recta, analíticamente, es una ecuación lineal o de primer grado en dos variables. Recíprocamente, la representación grafica del lugar geométrico cuya ecuación sea de primer grado en dos variables es una recta. Una recta queda determinada completamente si se conocen dos condiciones, por ejemplo, dos de sus puntos, un punto y su dirección (pendiente o coeficiente angular). (p. 22)

1.7. Ángulo de inclinación

Sea *l* una recta no paralela al eje *x* y que lo intersecta en el punto *A.*

Oteyza, Elena, et al (2011) afirma:

> Dada una recta no horizontal, el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ que se obtiene al hacer girar el eje x alrededor del punto A en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj hasta que coincida con la recta.



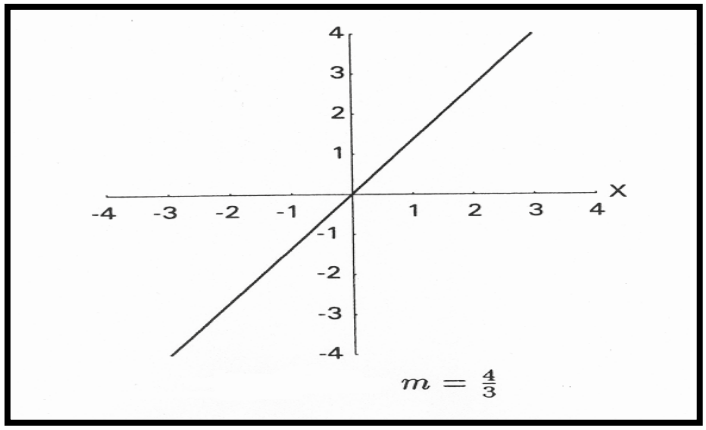
> La dirección de la recta en relación con los ejes coordenados puede indicarse si se conoce el ángulo $\boldsymbol{\theta} < 180°$ que se obtiene al girar la semirrecta *AX* en sentido contrario a las manecillas del reloj hasta coincidir

con la recta *l*. (p. 34)

1.8. La pendiente de una recta

"Se llama pendiente *m* o coeficiente angular de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación" (Jiménez, 2011, p. 49).

La pendiente de una recta no vertical es un número que mide que tan inclinada esta la recta y hacia donde esta inclinada. La recta de la figura por cada 3 unidades que avanza hacia la derecha, sube 4 unidades,



Se dice que la pendiente de la recta es $\frac{4}{3}$

Usualmente se denota con la letra *m* a la pendiente. Para encontrar la pendiente de una recta no vertical, se toma dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ de la recta y se calcula el cociente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad x_1 \neq x_2$$

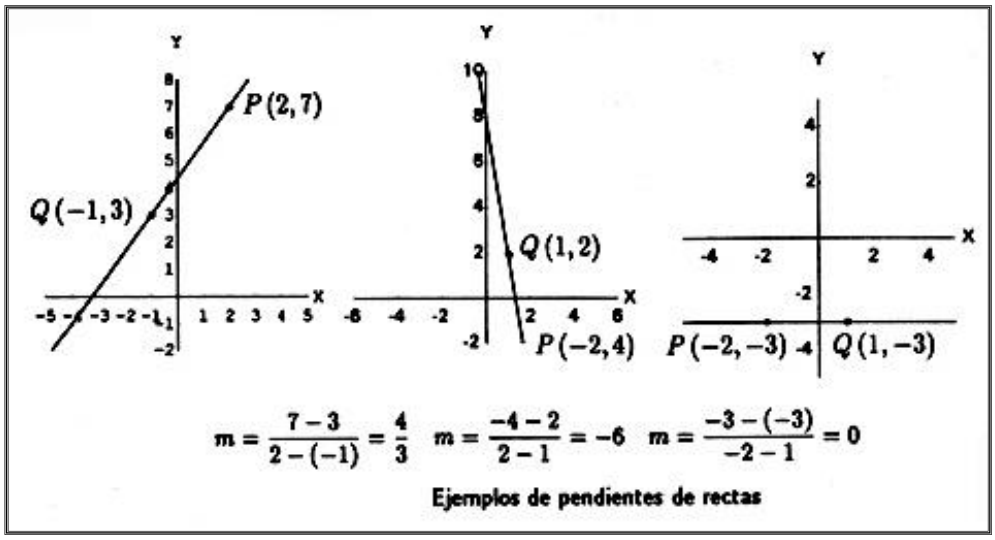
Si se toma otro par de puntos *P'* y *Q'* en la misma recta, se obtienen dos triángulos rectángulos semejantes, y por lo tanto, la razón de sus catetos es la misma. Es decir, la pendiente de una recta puede determinarse usando dos puntos cualesquiera.

Si la recta es vertical, todos los puntos de la recta tienen la misma primera

coordenada, entonces el denominador de la expresión anterior vale cero y por lo tanto, no puede evaluarse *m*, así que las rectas verticales no tienen pendiente. (Jiménez, 2011).

1.8.1. Características

- ✓ La pendiente es positiva cuando la recta está inclinada hacia la derecha.
- ✓ La pendiente es cero cuando la recta es horizontal.
- ✓ La pendiente es negativa cuando la recta está inclinada hacia la izquierda.
- ✓ Conforme el valor absoluto de la pendiente es mayor, la recta está más inclinada.
- ✓ Una recta vertical no tiene pendiente.



Ejemplos de pendientes de rectas

1.9. Determinación de la ecuación de la recta

1.9.1. Ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada

La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ y cuya pendiente sea *m*.

Si *Q (x, y)* es cualquier otro punto de la recta, se debe satisfacer:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

puesto que *Q* ≠ *P* y la recta no es vertical, $x \neq x_1$, multiplicando por $x - x_1$, obtenemos:

Ecuación: $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$

Esta forma de la ecuación de la recta también se la conoce como ecuación *punto-pendiente* de la recta, ya que se la obtiene conociendo la pendiente y un punto de ella, y recíprocamente si vemos una ecuación de este tipo, podemos saber porque el punto pasa por la recta y que pendiente tiene (Uribe, 2003).

Ejemplo: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por (4, -1) y tiene pendiente -2.

Solución:

$m = -2$

$(x_1, y_1) = (4, -1)$

Sustituyendo en la ecuación anterior, se obtiene:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = (-2)(x - 4)$$

$$y + 1 = -2(x - 4)$$

$$y + 1 = -2x + 8$$

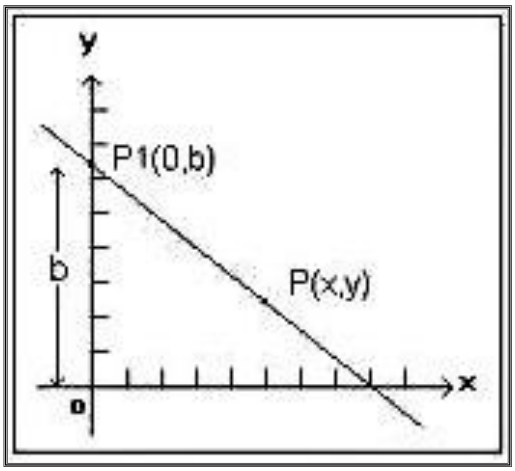
$$y = -2x + 7$$

1.9.1.1. Otras formas de la ecuación de la recta

Una recta es o no paralela al eje *Y*. Si es paralela al eje *Y* su ecuación es de la forma $x = k$; si no es paralela a dicho eje, su pendiente está definida por la ecuación 1.

Como todas las rectas caen bajo una de estas dos clasificaciones, cualquiera otra forma de ecuación de una recta debe reducirse, necesariamente, a una de estas dos formas. Para algunos tipos de problemas, sin embargo, son más convenientes otras formas; a continuación consideramos algunas de ellas (Lehmann, 1994):

a. Ecuación de la recta dada su pendiente y su ordenada en el origen



Una recta *l* cuya pendiente es *m* y cuya ordenada al origen, es decir, su intercepción con el eje *Y*, es *b*, como se muestra en el gráfico anterior. Como se conoce *b*, el punto cuyas coordenadas son *(0,b)* está sobre la recta. Por tanto, el problema se reduce a hallar la ecuación de la recta que pasa por un punto *(0, b)* y tiene una pendiente dada.

Según la ecuación 1 la ecuación buscada es:

$$y - b = m(x - 0)$$

O sea,

$$y = mx + b$$

Pudiendo enunciar este resultado con el siguiente teorema:

Teorema: La recta cuya pendiente es *m* y cuya ordenada en el origen es *b* tiene por ecuación:

Ecuación: $\boldsymbol{y = mx + b}$

A esta última forma de la ecuación de la recta se le conoce como la ecuación *pendiente-ordenada al origen* de la recta (Jiménez, 2006).

Ejemplo: Encontrar la ecuación de la recta que tiene pendiente 3 y que corta al eje Y en el punto -1.

Solución: Sustituimos *m* = 3 y *b* = -1 en la ecuación 2:

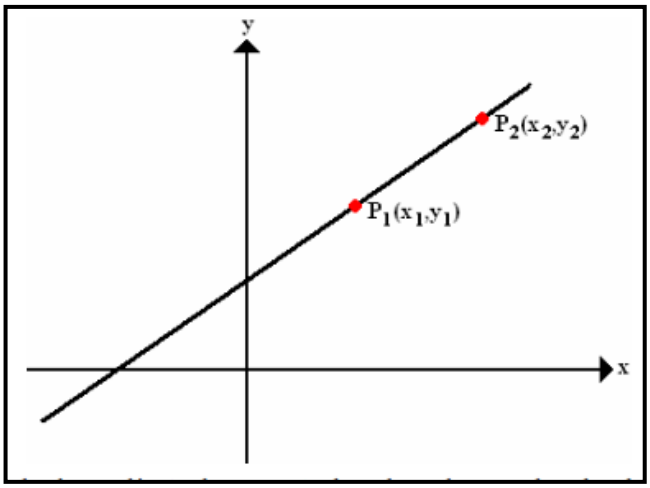
$$y = 3x + (-1)$$

Obteniendo

$$y = 3x - 3$$

b. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Geométricamente, una recta queda perfectamente determinada por dos puntos cualesquiera de la misma. Analíticamente, la ecuación de una recta también queda perfectamente determinada conociendo las coordenadas de dos puntos cualesquiera de la misma.



Teorema: La recta que pasa por dos puntos dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ tiene por ecuación:

Ecuación: $\boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - y_2}(x - x_1)}$, $\boldsymbol{x_1 \neq x_2}$

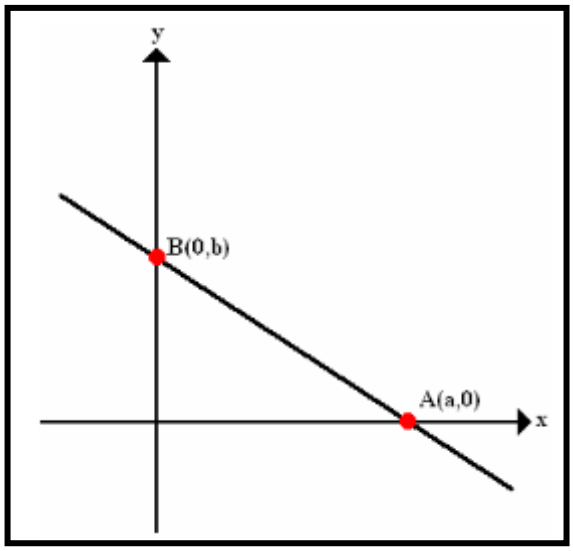
Demostración: Sea la recta P_1P_2 como se muestra en la figura anterior. Como se conocen dos de sus puntos, su pendiente está dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad x_1 \neq x_2$$

Por lo tanto, con esta pendiente y el punto $P_1(x_1, y_1)$, el problema se reduce a hallar la ecuación de una recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada. En consecuencia, sustituyendo este valor de la pendiente en la ecuación 1, obtenemos la ecuación 3, tal como se quería demostrar (Josep, 1982).

c. Ecuación simétrica de la recta

Sean $a \neq 0$ y $b \neq 0$ los segmentos que una recta determina sobre los ejes *X* e *Y* como se muestra en la figura siguiente, es decir, sus intercepciones.



Entonces $(a, 0)$ y $(0, b)$ son dos puntos de la recta. Por lo tanto el problema de obtener la ecuación de una recta cuando se conocen los segmentos que determina sobre los ejes se reduce a hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos y tenemos, por la ecuación 3:

$$\boldsymbol{y - 0 = \frac{0 - b}{a - 0}(x - a)}$$

de donde,

$$ay = -bx + ab$$

Trasponiendo $-\boldsymbol{bx}$ al primer miembro y dividiendo por *ab*, se tiene:

$$ay + bx = ab$$

$$\frac{ay}{ab} + \frac{bx}{ab} = \frac{ab}{ab}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Esta ecuación es la llamada ecuación simétrica de la recta de aquí el siguiente:

Teorema: La recta cuyas intersecciones con los ejes *X* e *Y* son $a \neq 0$ y

$b \neq 0$, respectivamente, tiene por ecuación:

Ecuación Simétrica: $\boldsymbol{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$

Esta forma de la ecuación de la recta se llama *ecuación simétrica* de la recta y tiene la ventaja de que se ve explícitamente en ella los puntos en los que la recta corta a los dos ejes, en efecto, si $x = 0$, *y = b,* y con $y = 0$, *x = a,* es decir, la recta corta al eje *Y* en *y = b* y corta al eje *X* en *x = a* (Jiménez, 2006).

Ejemplo: Encontrar los puntos de intersección de la recta *5x + 8y* -6 = 0 con los ejes.

Solución: Pásese el término independiente al segundo miembro de la ecuación y divídase entre el:

$$5x + 8y - 6 = 0$$

$$5x + 8y = 6$$

$$\frac{5x}{6} + \frac{8y}{6} = \frac{6}{6}$$

$$\frac{x}{\frac{6}{5}} + \frac{y}{\frac{3}{4}} = 1$$

así que la recta corta a los ejes en $\left(\frac{6}{5}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{3}{4}\right)$.

1.9.2. Forma general de la ecuación de una recta

La forma de la ecuación de la recta que cubre todas las rectas ya sean estas rectas verticales como las que no lo son. Esta forma es la ecuación general de la recta y se obtiene pasando todos los términos de la ecuación a un miembro de manera que este quede igualado a cero.

Ecuación general de la recta: $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$

En donde ya sea *A* o *B* debe ser diferente de cero y *C* puede o no ser igual a cero. Recuérdese que dos ecuaciones son *equivalentes* cuando surge de una a partir de la otra efectuando las operaciones siguientes:

- Sumar la misma cantidad (que puede ser una expresión algebraica) de ambos lados de una ecuación.
- Multiplicar ambos lados de una ecuación por la misma cantidad distinta de cero.

Dos ecuaciones que son equivalentes representan el mismo lugar geométrico, en el caso de ecuaciones lineales en dos variables, representan la misma recta. La ecuación general de la recta no es única, ya que si multiplicamos la ecuación anterior por una constante λ distinta de cero, se obtiene la ecuación:

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$$

que es de la misma forma que la anterior. Así, las tres ecuaciones siguientes son equivalentes y todas están en la forma general:

$$3x - 6y + 12 = 0$$

$$x - 2y + 4 = 0$$

$$-x + 2y - 4 = 0$$

y representan a la recta cuya ecuación pendiente-ordenada al origen es:

$$y = 2x + 2$$

y esta ecuación es equivalente a las anteriores, pues se obtiene a partir de cualquiera de las anteriores utilizando sucesivamente las dos operaciones enunciadas anteriormente (Oteyza, 2011).

Ejemplo: Escribir la ecuación general de la recta que pasa por *P (*-3,2) y tiene pendiente 8.

Solución: La ecuación punto-pendiente de la recta es

$$y - 2 = 8(x + 3)$$

efectuando las operaciones y pasando todos los términos de un lado de la ecuación se obtiene la ecuación en la forma general:

$$8x - y + 26 = 0$$

1.9.2.1. Posiciones relativas de dos rectas

Ahora sí considera las posiciones relativas de dos rectas, cuyas ecuaciones pueden ponerse en las formas generales:

$Ax + By + C = 0$ (1)

$A´x + B´y + C´ = 0$ (2)

Lehmann (1994) afirma:

> En particular, determinamos las condiciones analíticas bajo las cuales estas dos rectas son: a) paralelas; b) perpendiculares; c) coinciden; d) se cortan en uno y solamente en un punto.

a) La pendiente de (1) es $-\frac{A}{B}$ si $B \neq 0$, y la pendiente de (2) es $-\frac{A´}{B´}$ si $B´ \neq 0$. Por lo tanto la condición necesaria y suficiente para que las rectas (1) y (2) sean paralelas es que

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A´}{B´}$$

o sea,

$$\frac{A}{A´} = \frac{B}{B´}$$

es decir, los coeficientes de x y y deben ser proporcionales.

Si $B = 0$, la recta (1) es paralela al eje Y. Si la recta (2) es paralela a la (1) , también es paralela al eje *Y,* luego también $B´ = 0$.

En este caso la última proporción establecida no tiene sentido; lo mismo sucede si *A* y *A´* son cero, es decir, si ambas rectas son paralelas al eje *X.* Pero, se escribe esta relación en la forma

$$AB´ - A´B = 0,$$

que es una relación verdadera para todos los casos". (p. 67).

"Dos rectas l_1 y l_2 con pendientes m_1 y m_2, respectivamente, son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales". (Jiménez, 2010, p. 55).

$$\boldsymbol{m_1 = m_2}$$

b) "Una condición necesaria y suficiente para que las rectas (1) y (2) sean perpendiculares es que

$$\left(-\frac{A}{B}\right)\left(-\frac{A´}{B´}\right) = -1$$

o sea,

$$AA´ + BB´ = 0$$

El estudiante debe demostrar que la última relación es también verdadera si una de las rectas es paralela al eje *Y* y, por lo tanto, no tiene pendiente." (Lehmann, 1994, p. 68).

"Dos rectas l_1 y l_2 con pendientes m_1 y m_2, respectivamente, son perpendiculares si y solo si sus pendientes son reciprocas y de signo contrario". (Jiménez, 2011, p. 56).

$$\boldsymbol{m_1 = -\frac{1}{m_2}, \qquad o\ bien, \qquad m_1 m_2 = -1}$$

Según Lehmann (1994):

c) Dos rectas coinciden si tiene un punto común y la misma dirección o pendiente. La intersección de la recta (1) con el eje X es el punto de abscisa $-\frac{C}{A}$, y la recta (2) es el punto de abscisa $-\frac{C´}{A´}$. Por tanto, debemos tener

$$-\frac{C}{A} = -\frac{C´}{A´}$$

o sea

$$\frac{A}{A´} = \frac{C}{C´} \qquad (3)$$

También, por ser las pendientes iguales,

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A´}{B´}$$

o sea,

$$-\frac{A}{A´} = -\frac{B}{B´} \qquad (4)$$

De (3) y (4) se obtiene

$$\frac{A}{A´} = \frac{B}{B´} = \frac{C}{C´} \ ; \qquad (5)$$

es decir, dos rectas coinciden si y solamente si sus coeficientes correspondientes son proporcionales.

La proporción (5) se ha escrito suponiendo que todos los coeficientes de las ecuaciones (1) y (2) son diferentes de cero. Si, en vez de esto, uno o más coeficientes son cero, esta proporción no tiene sentido en su totalidad o en parte. Pero si escribimos

$$A = kA´ \qquad ; \qquad B = kB´ \qquad ; \qquad C = kC´$$

en donde k es una constante diferente de cero, se obtiene relaciones verdaderas para todos los casos.

d) Geométricamente, dos rectas se cortan en uno y solamente en un punto en el caso de que no sean paralelas. Analíticamente, si las rectas (1) y (2) no son paralelas, del apartado (a) anterior se deduce que

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}\text{, o sea, que } AB' - A'B \neq 0$$

En resumen, los resultados anteriores se destaco el siguiente teorema:

Teorema: Si las ecuaciones de dos rectas son $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$, las relaciones siguientes son condiciones necesarias y suficientes para:

I. *Paralelismo,* $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$, o sea, que $AB' - A'B = 0$
II. *Perpendicularidad,* $AA' + BB' = 0$
III. *Coincidencia,* $A = kA'$; $B = kB'$; $C = kC'$
IV. *Intersección en uno y solamente un punto,* $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$, o sea, que $AB' - A'B \neq 0$ (p. 68).

Ejemplo: La ecuación de una recta *l* es $5x - 7y + 11 = 0$. Escribir la ecuación que representa a todas las rectas paralelas *l*. A partir de esta última ecuación hallar la recta paralela a *l* y que pasa por el punto (4,2).

Solución: Represéntese por $Ax + By + C = 0$ la ecuación de todas las rectas paralelas a *l*. Por lo estudiado anteriormente se verifica que

$$\frac{A}{5} = \frac{B}{7}\text{, o sea, } B = -\frac{7}{5}A$$

Por lo tanto, la ecuación de todas las rectas paralelas a *l* es

$$Ax - \frac{7A}{5}y + C = 0$$

De donde,

$$5x - 7y + \frac{5C}{A} = 0$$

O sea

$$5x - 7y + k = 0 \qquad (6)$$

En donde $k = \frac{5C}{A}$ es una constante arbitraria.

Si la recta (6) debe pasar por el punto (4,2), las coordenadas deben satisfacer la ecuación (6). Por lo tanto:

$$5(4) - 7(2) + k = 0$$

$$20 - 14 + k = 0$$

$$k = -6$$

De donde $k = -6$, y la recta buscada es

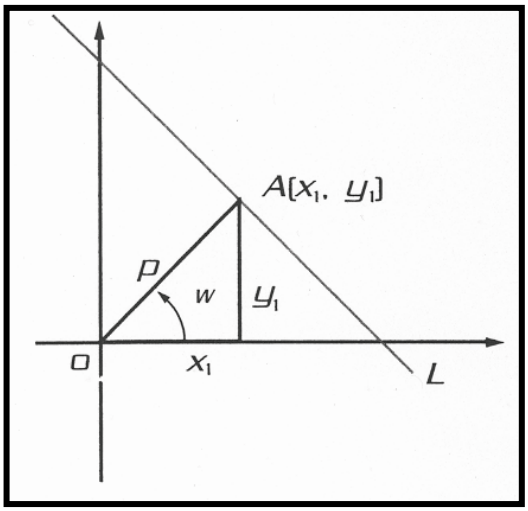
$$5x - 7y - 6 = 0$$

1.9.3. Forma normal de la ecuación de la recta

Según el libro del Colegio Nacional de Matemática (2010) sea $\overline{OA}$ un segmento perpendicular a la recta $Ax + By + C = 0$ de longitud *p,* y *w* el ángulo determinado por el segmento y el eje X.

La recta *L* queda determinada por la longitud de su perpendicular trazada desde el origen y el ángulo positivo W que la perpendicular forma con el eje de las *x.* La perpendicular OA a la recta *L,* representada por *P,* se *considera siempre positiva* por ser una distancia. El ángulo W engendrado por *OA* varia de 0° ≤ W < 360°.

Se dan valores a *p* y *W*, la recta *L* trazada por $A(x_1, y_1)$ queda determinada por la ecuación de la recta en su *forma normal* que se obtiene en la forma siguiente:



De acuerdo a la figura anterior:

$\cos w = \frac{x_1}{p}$ $\sin w = \frac{y_1}{p}$

Despejando x_1: Despejando y_1:

$\mathrm{x}_1 = \mathrm{p}\cos w$ $\mathrm{y}_1 = \mathrm{p}\sin w$

Sustitúyase los dos valores anteriores en *A* = *(x_1, y_1)*, con lo cual se obtiene las coordenadas del punto *A*, que son:

$$A = (p\cos W, p\sin W)$$

Par su parte, la pendiente *m* de *OA* es:

$$m = \tan W$$

Como la recta *L* es perpendicular a la recta *GA*, sus pendientes están relacionadas con:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

es decir, *la recíproca con signo cambiado.* Como se sabe que la pendiente de OA es $\tan W$, la inversa de esta función con signo cambiado de la recta *L* perpendicular a *GA* es:

$$-\cot W$$

de donde,

$$m = -\cot W = \frac{\cos W}{\sin W}$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente los valores de x_1, y_1 y de m, queda:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - p\sin W = -\frac{\cos W}{\sin W}(x - p\cos W)$$

Se quita el denominador $\sin W$ y desarrollando operaciones indicadas resulta:

$$y\sin W - \mathrm{p}\sin^2 W = -x\cos W + \mathrm{p}\cos^2 W$$

Agrupando:

$$x\cos W + y\sin W = \mathrm{p}\sin^2 + \mathrm{p}\cos^2 W$$

Factorizando el segundo miembro:

$$x\cos W + y\sin W = p(\sin^2 W + \cos^2 W)$$

Aplicando la identidad pitagórica:

$$\sin^2 W + \cos^2 W = 1$$

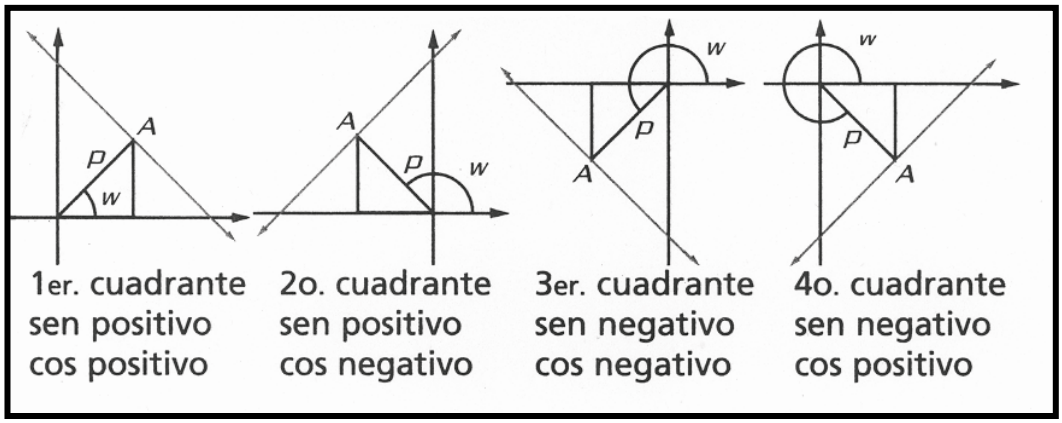
Sustituir

$$x\cos w + y\sin w = p$$

De donde

Forma normal de la ecuación de la recta: $\boldsymbol{x\cos w + y\sin w - p = 0}$

Relación en la que w y *p* son las constantes arbitrarias o parámetros, y el valor de $\sin w$ y $\cos w$ puede ser positivo o negativo, de acuerdo con el cuadrante en que este el lado terminal del ángulo w. Recordando el círculo geométrico, tenemos:



Ejemplo: Determinar la ecuación de la recta en su forma normal, con w = 60° y p = 3 y graficar.

Solución: Sustituir en:

$$x\cos w + y\sin w - p = 0$$

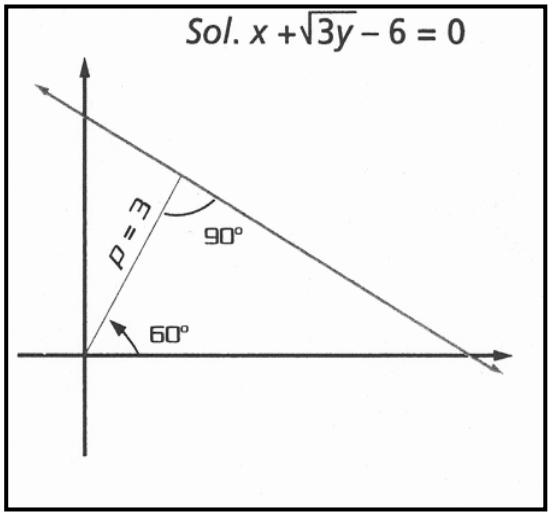
$$x\cos 60° + y\sin 60° - 3 = 0$$

Como $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 3 = 0$$

$$x + \sqrt{3}y - 6 = 0$$



1.9.3.1. Procedimiento para obtener la forma normal de una recta a partir de su forma general

Usualmente, la ecuación de una recta en su forma general $Ax + By + C = 0$, queremos representarla en su forma normal $x \cos w \ + y \sin w - p = 0$.

Con $Ax + By + C = 0$, siendo K una constante distinta de cero, se procede:

Dividir cada término de $Ax + By + C = 0$ entre K; así se tiene:

$\frac{Ax}{K} + \frac{By}{K} + \frac{C}{K} = 0$; identificando esta expresión con la forma normal, obtenemos:

$\cos w = \frac{A}{K}$, $\sin w = \frac{B}{K}$, $-p = \frac{C}{K}$ y $p = -\frac{C}{K}$

Elevando al cuadrado:

$\cos w = \frac{A}{K}$ se tiene $\cos^2 w = \frac{A^2}{K^2}$

$\sin \mathrm{w} = \frac{A}{K}$ se tiene $\sin^2 \mathrm{w} = \frac{B^2}{K^2}$

Sumando miembro a miembro de la igualdad:

$\cos^2 w + \sin^2 \mathrm{w}^2 = \frac{A^2}{K^2} + \frac{B^2}{K^2}$; como $\cos^2 w + \sin^2 \mathrm{w} = 1$, sustituyendo nos queda:

$$1 = \frac{A^2}{K^2} + \frac{B^2}{K^2}$$

Quitando el denominador y despejando $K^2 = A^2 + B^2$; $K = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$ y sustituyendo el valor de K tenemos:

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{Ax}}{\pm\sqrt{\boldsymbol{A^2 + B^2}}} + \frac{\boldsymbol{By}}{\pm\sqrt{\boldsymbol{A^2 + B^2}}} + \frac{\boldsymbol{C}}{\pm\sqrt{\boldsymbol{A^2 + B^2}}} = \mathbf{0}}$$

Fórmula para obtener la forma normal de una recta a partir de su forma

general.

Para escoger el signo que precederá al radical $\pm\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}$ se toman en consideración los conceptos siguientes:

a. *El signo que se anteponga al radical debe ser el signo contrario al que tiene el coeficiente de* C.

Ejemplo: En $x+y-4=0$, como $C=-4$, el signo que precederá al radical será el (+).

b. *Si sucede que:*

C = 0, A ≠ 0, *B* ≠ 0; en este caso el signo del radical será el que tiene *B (*Lehmann, 1994).

Ejemplo: Determina la forma normal de la recta $12x-y-4=0$ así como los valores de *p,* W, y traza la gráfica.

Sustituyendo en:

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

$A=12$; $B=-5$; $C=-52$; $\pm\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}=\sqrt{169}=13$

Como el coeficiente de C está precedido del signo (-), se toma el signo positivo del radical:

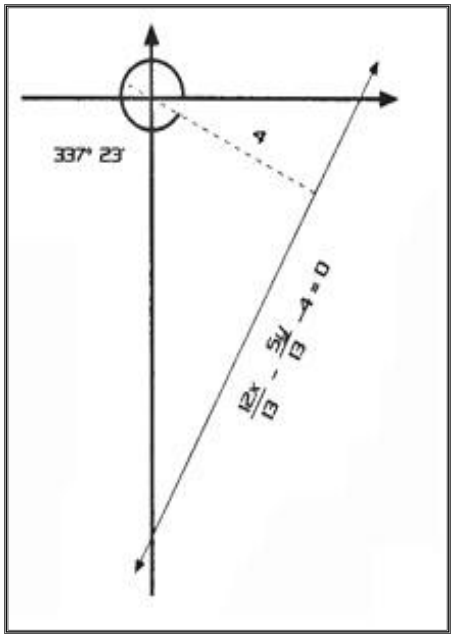
$$\frac{12x}{13}-\frac{5y}{13}-\frac{52}{13}=0$$

$$\frac{12x}{13}-\frac{5y}{13}-4=0$$

de donde,

$\cos w = \frac{12}{13}$; $\sin w = -\frac{5}{13}$;

$p = |-4|$; $p = 4$



Como el seno w es negativo y coseno de w es positivo, el ángulo w debe medirse en el cuarto cuadrante; su valor es 337° 23'.

$\cos w = \frac{12}{13} = 0{,}9230$ $\quad \sin w = -\frac{5}{13} = -0{,}3846$

$w = 22°\,37'$ $\quad w = -22°\,37'$

$w = 359°\,60' - 22°\,37'$

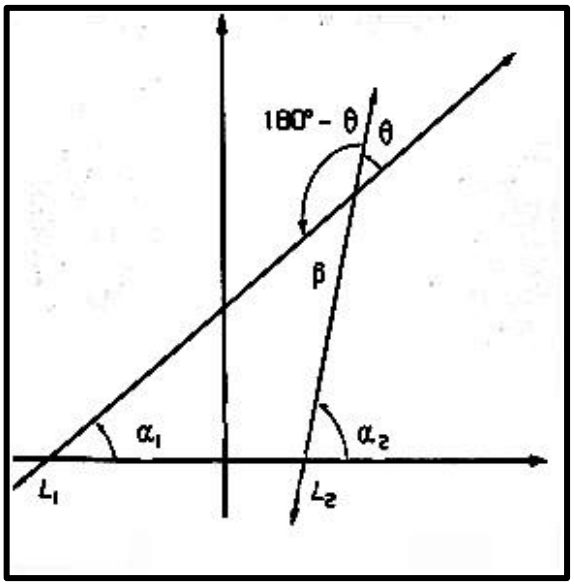
$w = 337°\,23'$

Sol. $\frac{12x}{13} - \frac{5y}{13} - 4 = 0$; $w = 337°\,23'$; $p = 4$

1.10. Ángulo de intersección entre dos rectas

Según Lehmann (1994), si la recta *Ll,* con ecuación $y = m_l x + bl$, se interseca con la recta L_2, con ecuación $y = m_2 x + b_2$, se forman dos ángulos, el ángulo θ y su suplementario 180°- θ.

Para obtener el valor del ángulo θ se procede en la forma siguiente:



Como en todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a él:

$$\alpha_1 + \beta = \alpha_2$$

Despejando:

$$\beta = \alpha_2 - \alpha_1$$

Como $\beta = \theta$ por ser opuestos por el vértice queda,

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

El problema se resuelve usando la función tangente; en consecuencia, podemos indicar que:

$$\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)$$

En trigonometría se demostró que la tangente de la diferencia de dos ángulos es:

$$\tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + (\tan\alpha_1)(\alpha_2)}$$

Como $\tan\alpha_2 = m_2$; $\tan\alpha_1 = m_1$

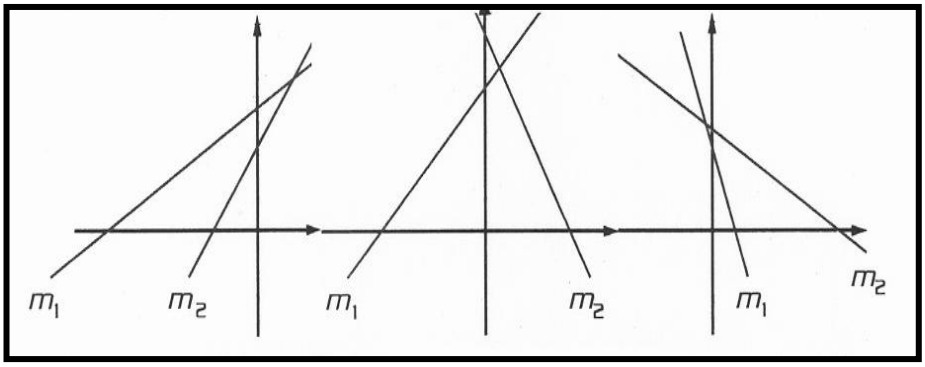
Sustituyendo queda:

Fórmula para obtener el valor del ángulo θ:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + (m_1)(m_2)}$$

Para aplicar esta relación se debe tener cuidado al determinar cuál es la pendiente m_1 y cual m_2. Para ello se deben seguir las indicaciones siguientes:

a. Si las dos pendientes son *positivas,* m_2 es la mayor y m_2 la menor.
b. Cuando una pendiente es *positiva* y la otra *negativa,* m_2 es la pendiente negativa y m_1 la positiva.
c. Cuando las dos pendientes *son negativas,* m_2 tiene mayor valor absoluto.



Observa: m_2 es la pendiente de la recta que forma el ángulo mayor con el sentido positivo del eje de las x.

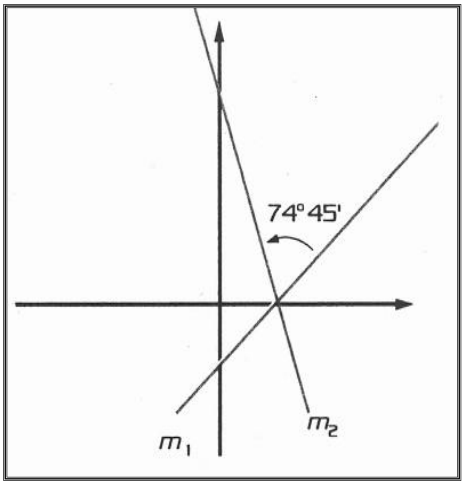
Ejemplo: Determinar el valor del ángulo que forman las rectas $3x + y - 6 = 0$ con $2x - 3y + 6 = 0$ (ángulo menor).

Solución:

Pendiente *m* de la recta 3x + y – 6 = 0:

$$y = -3x + 6$$

De donde $m = -3$



Pendiente *m* de la recta

$$2x - 3y - 4 = 0$$

$$-3y = -2x + 4$$

$$-y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

De donde $m = \frac{2}{3}$

Determine cuál es m_1 y cual m_2.

Como una es positiva y la otra negativa, m_2 es la pendiente negativa y m_1 la positiva; en consecuencia:

$$m_2 = -3 \quad \text{y} \quad m_1 = \frac{2}{3}$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + (m_1)(m_2)}$$

$$\tan\theta = \frac{-3 - \left(\frac{2}{3}\right)}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)(-3)} = \frac{\frac{-9-2}{3}}{1 + (-2)} = \frac{\frac{-11}{3}}{-1} = \frac{-11}{-3} = 3{,}666$$

$$\theta = 74°\,45'$$

1.11. Familia de rectas

La ecuación de una recta, como ya se estudió, queda determinada por dos condiciones independientes: dos puntos, la pendiente y un punto, la

pendiente y su intersección con el eje, y la intersección de la recta con los dos ejes coordenados. En consecuencia se acepta que una recta que satisface una sola condición, *no es una recta única,* ya que hay infinidad de rectas que cumplen la misma condición.

Todas las rectas que satisfacen una condición geométrica previamente establecida forman una *familia* o *haz de rectas.*

En la ecuación de la recta $y = mx + b$, las constantes *m* y *b* son los parámetros. Si se asigna un valor particular a uno de los parámetros, se obtiene la ecuación de una familia de rectas del otro parámetro que se identifica como *K (K* debe ser un número real).

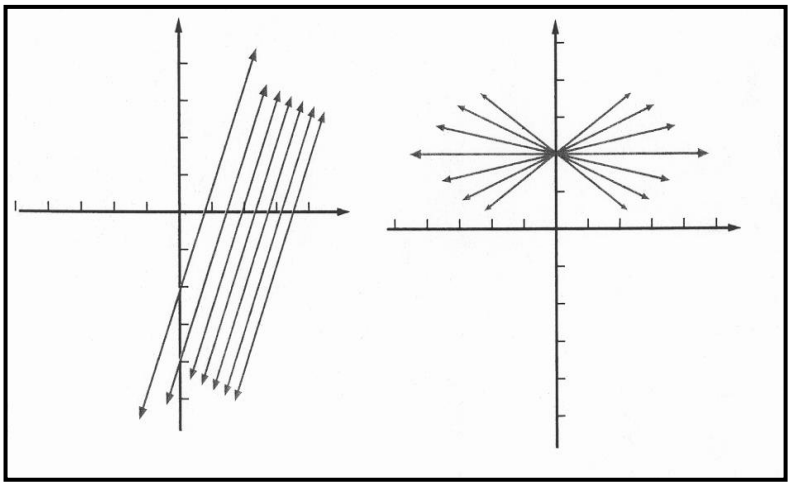
Ejemplo: Si *m* = 3, resulta y = *3x* + *K,* que es la familia de todas las rectas paralelas cuya pendiente *m* es igual a 3.

En forma semejante, si en la ecuación y = mx + *b* ponemos *b* = 2, resulta y = *Kx* + 2, que es la ecuación de la familia o haz de rectas cuya intersección con el eje *y* es la misma, en este ejemplo.

Observa que hay una recta *x* = 0 (el eje *y*) que no está incluida en $y = Kx + 2$, puesto que se necesitaría que $k = \infty$, lo cual no está permitido puesto que indicamos que *K* debe ser un numero real.

Sol. *y* = *Kx* + 2, con la recta *x* = 2, que también forma parte de la familia.

A veces, una familia de rectas tiene excepciones, que deben indicarse para hacer las notar en la solución, como en el ejemplo que se acaba de analizar. (Wooton, 2003)



Ejemplo: Determina la ecuación de la familia de rectas que pasan a través de (1, 2). Bosqueja la gráfica.

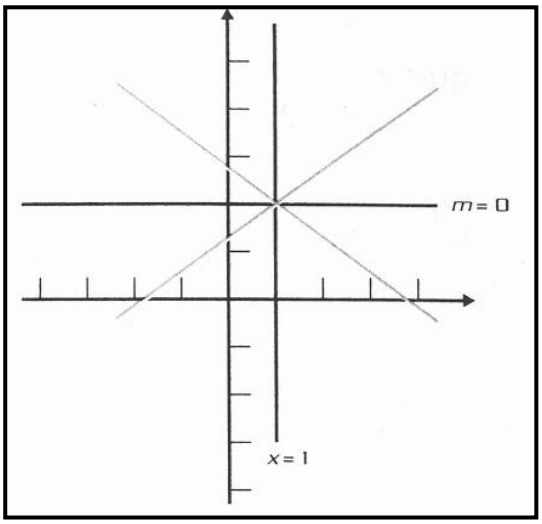
Solución: *Sol.* $y - 2 = K(x, 1)$, con la recta x = 1.

Utilizando la ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Esta familia se representa analíticamente con la ecuación:

$y - 2 = m(x - 1)$



Como a *m* se le puede asignar cualquier valor dentro de los números reales, queda:

$$y - 2 = K(x - 1)$$

m no está definida para una recta paralela al eje *y*; por ello, la ecuación anterior no incluye a la recta *x = 1*, que también pasa por el punto (1, 2) y, por consiguiente, pertenece a la familia (Lehmann, 1994):

Ejemplo: Determina la ecuación de la familia de las rectas que son paralelas a $3x + 4y + 2 = 0$. Haz la gráfica.

Solución:

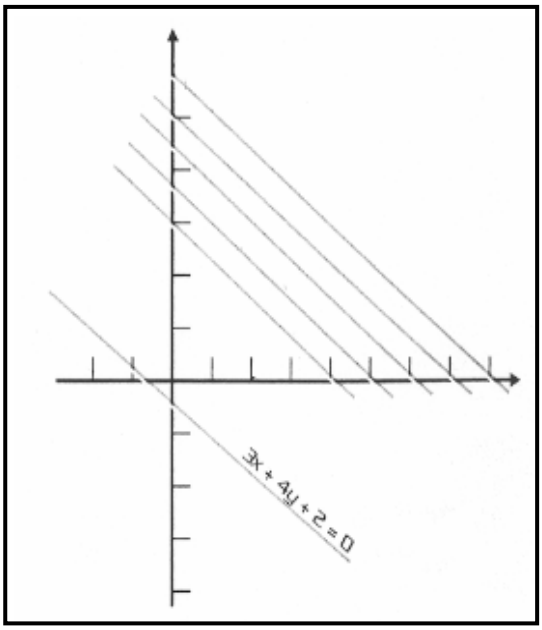
Utilizando la ecuación de la recta pendiente-intersección *y* = *mx* + *b*

Quitando el denominador 4 queda:

3x + 4y + *K* = 0

Como a *b* se le puede asignar cualquier valor dentro de los números reales, queda:

$$y = mx + K$$
$$3x + 4y + 2 = 0$$
$$4y = -3x - 2$$
$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{2}{4}$$



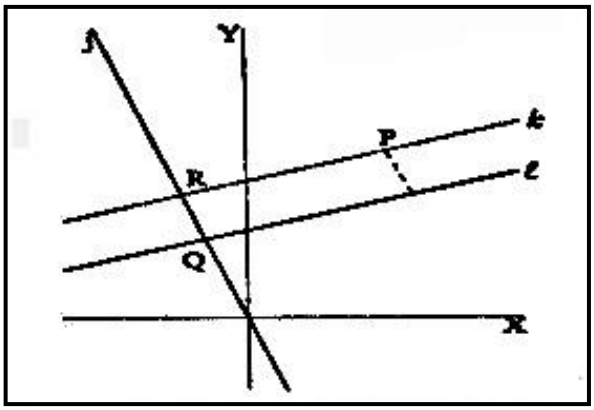
de donde la pendiente de cada miembro de la familia debe ser: $-\frac{4}{3}$ y el valor de *K* arbitrario. De esta forma la familia se representa con:

$y = -\frac{3}{4}x - K$, o en la forma general $3x + 4y + K = 0$

Sol. $y = -\frac{3}{4}x - K$

1.12. Aplicaciones de la forma normal de la ecuación de la recta

De acuerdo a Zambrano (2012). Considerando una recta *l* cualquiera y un punto P (X_l, Y_l) que no esté en la recta. La distancia de la recta *l* a *P* se define como la *distancia* de *P* al punto de *l* que esté más cercano a él. Construyendo la recta *k,* paralela a *l* que pase por *P y* la recta *j*, perpendicular a *l* que pasa por el origen, se tiene:



La recta *j* corta a *l* y a *k* en *Q* y *R* respectivamente. Observar en la figura que la distancia de *P* a *l* es la misma que la distancia de *Q* a *R.* Para encontrar esta distancia hay que encontrar las coordenadas de *Q* y de *R* y aplicar la fórmula de la distancia entre dos puntos.

Para encontrar las coordenadas de *Q* y *R,* se escribe las ecuaciones de *l, k* y j:

$$l: Ax + By + C = 0$$

$$k: Ax + By + C' = 0$$

$$j: Bx - Ay = 0$$

En la ecuación de *k* aparece una constante *C'* que se determinará posteriormente. Resolviendo simultáneamente las ecuaciones de *l* y j, se obtiene las coordenadas de *Q:*

$$Q\left(\frac{-AC}{A^2 + B^2}, \frac{-BC}{A^2 + B^2}\right)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones de *k* y *j*, se obtiene las coordenadas de R:

$$R\left(\frac{-AC'}{A^2 + B^2}, \frac{-BC'}{A^2 + B^2}\right)$$

Se calcula ahora el cuadrado de la distancia de *R* a *Q:*

$$d^2 = \frac{(AC - AC')^2}{(A^2 + B^2)} + \frac{(BC - BC')^2}{(A^2 + B^2)},$$

Simplificando la expresión anterior, se obtiene:

$$d^2 = \frac{(C - C')^2}{(A^2 + B^2)},$$

Extrayendo la raíz cuadrada, se encuentra:

$$d = \frac{(C - C')}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$

Para determinar *C'*, se usa el hecho de que $P(x_1, y_1)$ pertenece a K, así que (x_1, y_1) satisface la ecuación de K:

$$Ax_1 + By_1 + C' = 0$$

de donde,

$$C' = -Ax_1 - By_1$$

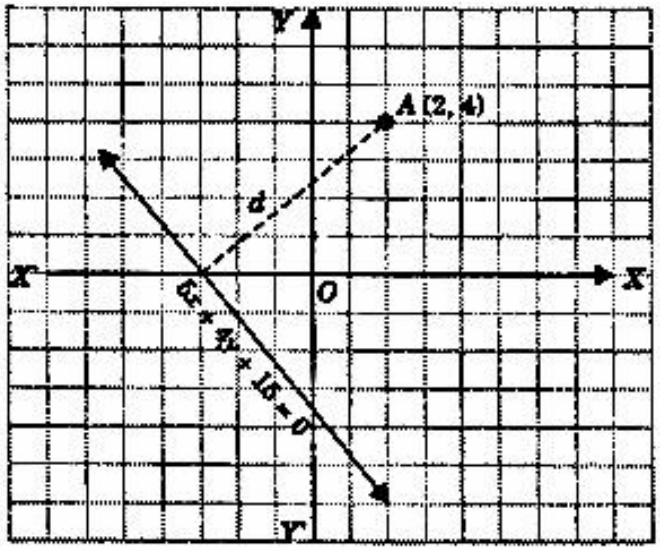
Sustituyendo el valor de *C'* en la fórmula de la distancia, resulta:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Como la distancia debe ser un número no negativo, el signo de la raíz se escoge para que *d* sea positiva.

Ejemplo: Determinar la distancia de la recta $5x + 4y + 15 = 0$ al punto A(2, 4).

Al graficar los datos dados, se tiene la ilustración:



La distancia pedida se considera absoluta, es decir, no dirigida. Al sustituir los datos en la ecuación para distancia absoluta, obtenemos:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|5x + 4y + 15|}{\sqrt{(5)^2 + (4)^2}}$$

Sustituyendo las coordenadas del punto A (2, 4), resulta:

$$d = \frac{|5(2) + 4(4) + 15|}{\sqrt{25 + 16}}$$

$$d = \frac{|10 + 16 + 15|}{\sqrt{41}}$$

$$\therefore\ d = \frac{|41|}{\sqrt{41}}$$

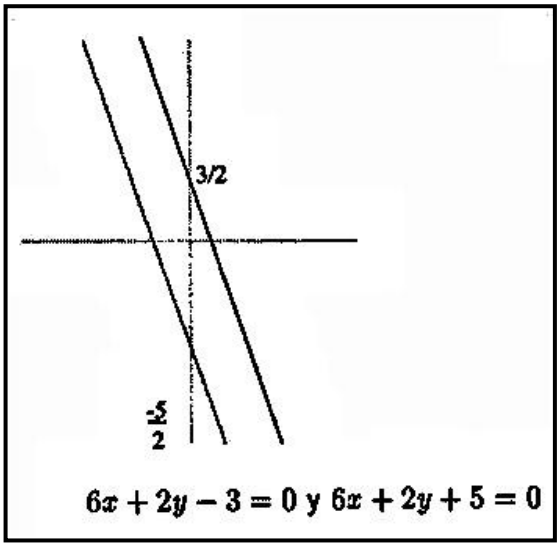
La distancia de la recta $5x + 4y + 15 = 0$ al punto A (2, 4) es:

$$d = \frac{|41|}{\sqrt{41}}$$

1.13. Distancia entre rectas paralelas

Según el libro de Colegio Nacional de Matemática (2010) "Para encontrar la distancia entre dos rectas paralelas, se toma un punto en una de ellas y se encuentra la distancia de ahí a la otra recta" (p. 327).

Ejemplo: Encontrar la distancia entre las rectas *6x + 2y - 3 = 0* y *6x + 2y + 5 = 0*.



Solución: Las rectas son paralelas, pues mediante un cálculo directo se ve que la pendiente de ambas es $m = -3$. Elegir un punto cualquiera en la primera recta. Para ello, se toma cualquier valor de *x,* por ejemplo *x* = 1, luego se sustituye en la ecuación y se encuentra el valor de *y* correspondiente:

$$6(1) + 2y - 3 = 0$$

$$y = -\frac{3}{2}$$

Así que el punto P $(1, -\frac{3}{2})$ pertenece a la primera recta. Se calcula ahora la distancia de *P* a la segunda recta.

$$D = \frac{6(1) + 2\left(-\frac{3}{2}\right) + 5}{\sqrt{6^2 + 2^2}} = \frac{8}{\sqrt{40}} = \frac{8}{2\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

Así que la distancia entre las rectas es: $\frac{4}{10}$

2. APRENDIZAJE DE LA LÍNEA RECTA

Los siguientes criterios e indicadores sirven para diagnosticar el nivel de conocimiento del aprendizaje de la línea recta.

2.1. Aprendizaje de la historia de la línea recta

La historia evolutiva de la línea recta es una parte muy importante en el aprendizaje de la línea recta, pues conocer cómo surgió su estudio, da una clara idea de cómo se presentó, y se presenta en la actualidad este fenómeno, además de conocer quién es el talento humano que brindó sus aportaciones para descubrir la línea recta, además da paso a valorar su vida y obra. Todo esto se puede diagnosticar con indicadores como:

- Apreciar la vida y obra del talento humano que crearon la línea recta.
- Examinar la importancia de la evolución histórica de la línea recta.
- Construcción de una agenda de eventos significativos en la historia de la línea recta.

2.2. Revisión de conocimientos previos en el estudio de la línea recta

En el estudio de la línea recta, son fundamentales los conocimientos previos que el estudiante posee, pues debe estar claro lo que es la línea recta en general, lo cual se logra utilizando puntos como:

- Definir lo que es un segmento de recta.
- Representar un par ordenado en el plano cartesiano.
- Calcular la distancia entre dos puntos dados.
- Determinar la división de un segmento en una razón dada.
- Construir un concepto de la pendiente de una recta.
- Calcular la pendiente de una línea recta.
- Comparar y contrastar los distintos tipos de segmentos.

2.3. Aprendizaje de la línea recta

Para conocer el aprendizaje de la línea recta, existen diversas definiciones propuestas por múltiples autores, pero sin duda todas estas convergen en una misma idea sobre la línea recta, por ello es indispensable el dominio de esta definición para poder evidenciar el aprendizaje, a través de actividades como:

- Definir la línea recta.
- Identificar los elementos que intervienen en el estudio de la línea recta.

2.4. Aprendizaje de las ecuaciones de una recta

El aprendizaje de las ecuaciones de la línea recta es sumamente importante para afianzar y fortalecer la definición de la línea recta. La confusión entre las ecuaciones de la línea recta es una dificultad que se presenta a menudo, es por ello hay que identificar cada una de las ecuaciones de la línea recta, y puede diferenciarlas mediante parámetros como:

- ✓ Identificación de la ecuación general de la línea recta.
- ✓ Describir la ecuación normal de la línea recta.
- ✓ Relacionar la ecuación normal de la línea recta con la ecuación general de la misma.

- ✓ Clasificar las formas de la ecuación de la recta.

2.5. Aprendizaje de la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares o paralelas

Dentro del campo de la Matemática y en la vida diaria, se puede evidenciar las condiciones necesarias y suficientes para que dos rectas sean paralelas o perpendiculares, ya que el aprendizaje de la línea recta nos permita identificar cuando dos rectas son perpendiculares o paralelas y así resolver problemas que se presentan en la vida diaria, y puede diferenciarlas mediante parámetros como:

- Reconocimiento de la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares.
- Identificación de la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas.
- Comparación de la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas con la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares.

2.6. Aprendizaje de familias de rectas

El siguiente indicador permite identificar el aprendizaje de las familias de rectas:

- ➢ En la ecuación $ax + by + c = 0$, hacer que *a, b* y *c* varíen.

3. EL PROYECTOR DIGITAL COMO RECURSO DIDÁCTICO

3.1. Historia

Adame (2009), en más de 50 años, desde la invención de la televisión, la forma en que se genera la imagen y los colores dentro de estos aparatos ha cambiado poco, particularmente en su principio de funcionamiento basado en los pesados y voluminosos CRT (Tubos de Rayos Catódicos).

A principios de 1980, apareció una nueva tecnología para el despliegue de imágenes de video llamada Pantallas de Matriz Activa de Cristal Líquido de Transistores de Película Fina (TFT), la cual es un dispositivo de imagen de tipo transmisivo. En realidad los primeros descubrimientos del fenómeno del cristal líquido vienen de 1888 cuando un botánico austriaco descubrió que un derivado del colesterol tenía compuestos que reflejaban muchas propiedades de cristales anisotropitos, alguno de los cuales, como la velocidad de transmisión de la luz, variaba dependiendo en la dirección en que se midiera. En un cristal anisotropito, el orden en que los átomos se acomodan para formar una estructura cristalina, tiene un efecto llamado birrefringencia, lo cual significa que cuando la luz pasa por el cristal, se divide en dos rayos de luz polarizada. Un prisma es un ejemplo simple de una estructura anisotropita; sin embargo, la luz es dividida en sus componentes del espectro en lugar de dos rayos. Lo que hizo de estos compuestos muy inusuales es que demostraban propiedades típicas de estructuras cristalinas sólidas mientras se encontraban en estado líquido.

Por más de 70 años la industria y comercialización de los CRT se ha dedicado a refinar estos tubos de rayos catódicos y la electrónica que los controla, prácticamente al límite. Luego en 1963, los ingenieros de RCA (Radio Corporation of America) en su búsqueda por nuevas formas para desplegar imágenes, llegaron a un gran descubrimiento al encontrar que si aplicaban una carga eléctrica en este compuesto de cristal líquido, su orientación aleatoria cambiaría a un perfecto orden estructurado, con el

efecto de bloquear la luz. Luego en 1968, otro científico de RCA inventó el primer dispositivo práctico de despliegue de cristal líquido monocromático. A principios de los 80 apareció la primera pantalla de matriz pasiva de cristal líquido a color. Posteriormente, a finales de los 80, con la aparición de microprocesadores veloces, y con el desarrollo del Transistor de Película Fina (TFT), fue posible retener la carga eléctrica que polariza el cristal líquido y se obtuvo la primera pantalla de matriz activa a color, capaz de refrescar 30 cuadros por segundo, lo cual es indispensable para obtener video totalmente animado.

La tecnología, fue desarrollada por el físico norteamericano, el Dr. Larry Hornbeck, en 1977 poseedor de más de 27 patentes en el desarrollo de los CCD (*Charge Coupled Device),* dispositivo de carga acoplada, utilizados en las cámaras de video.

Esta tecnología está basada en el Chip DMD (Digital Micromirror Device), el cual consiste en un dispositivo de imagen reflectivo, construido con más de 508 000 micro espejos que se mueve cada uno a velocidades hasta de 1000 pulsos por segundo. Los primeros prototipos de proyectores DLP (Digital Light Processing) aparecieron en 1994, cuando el PhD. William E. Nelson desarrolló un proceso para utilizar el chip DMD en proyectores e impresoras digitales para la Texas Instruments Corporation de Dallas Texas.

Los sistemas de proyección han ido evolucionado en el tiempo. Actualmente se encuentra con importantes avances tanto en la tecnología de proyección digital, como es el sistema DLP (Digital Light Processing) desarrollado por Texas Instruments Corp., líder mundial en tecnología de proyección digital, que ha sido galardonada con varios premios, incluyendo un Emmy Award en Junio de 1998, ya que colaboró al desarrollo de la industria del video.

Solamente tres años después de este premio, y seis años después de haber sido inventada, la tecnología DLP recibió en el año 2001, la certificación oficial de los estudios cinematográficos de Hollywood, para ser utilizada en la proyección de películas en formato de cine digital, al extraordinario proyector

digital DLP de tres Chips, desarrollado conjuntamente por Texas Instruments Corp. y Christie Digital Systems, el DigiPro. Actualmente existen unas 30 salas de cine en el mundo que utilizan y forman parte de un plan piloto que procura afinar detalles, para volverla más simple y accesible para la industria cinematográfica.

Aparte de la tecnología de proyección, también han surgido grandes avances en los sistemas de grabación y distribución de video, como es el caso del conocido reproductor de DVD, el cual además de contar con un formato de bajo costo, compacto y larga duración, también puede reproducir y conservar toda la calidad disponible en los formatos utilizados para la televisión, como lo es el formato Beta Cam SP, Beta Cam Digital, DVCPRO.

Actualmente, estos dispositivos LCD y DLP son empleados en novedosos y compactos televisores, monitores de computadoras, y sistemas de proyección para aplicaciones tan variadas como la educación, la informática y el entretenimiento. Los equipos de proyección para video y datos han sido los más favorecidos con esta tecnología ya que, la calidad de la imagen, el brillo y la portabilidad se han visto mejorados sustancialmente.

3.2. Definición de proyector digital

Según Adame (2009):

> El proyector es un medio visual fijo, que utiliza materiales que permiten el paso de la luz, o sea, transparencias. Por este motivo, la intensidad luminosa

sobre la pantalla es suficientemente grande como para que no haya necesidad de oscurecer la habitación. Permite al maestro el contacto visual con sus alumnos y el control de la clase durante la proyección. Este aparato tiene una fuente de luz debajo de la plataforma que la atraviesa para proyectar la imagen puesta sobre la pantalla. (p. 15).

El proyector digital es un dispositivo encargado de recibir por medio de un puerto, las señales de video procedentes de la computadora, procesar la señal digital y descodificarla para poder ser enviada por medio de luz a un micro espejos encargados de la proyección digital en alguna superficie clara.

Figura 2. Proyector, marca ViewSonic®, modelo PJ513DB, tamaño de pantalla hasta 167 pulgadas, 2200 Lumens.

A continuación se describe el funcionamiento interno de un proyector digital:

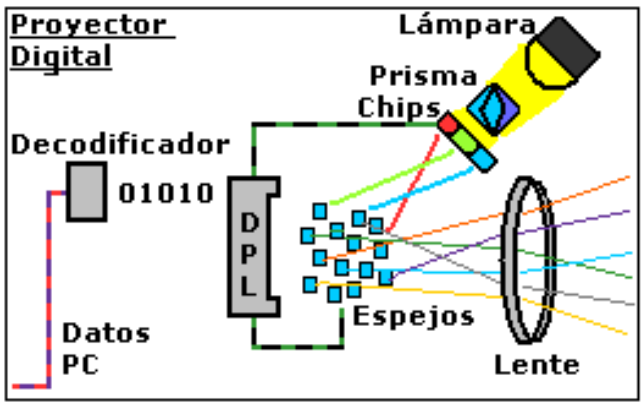


Figura 1. Animación del principio de funcionamiento interno en un proyector digital

- ✓ Los datos son enviados desde la computadora por medio del puerto de video a los circuitos del proyector digital.
- ✓ El dispositivo se encarga de la decodificación de señales digitales y arma una imagen digitalizada.
- ✓ Esta imagen se envía a un dispositivo denominado DPL ("*Digital Processing Light*") ó procesador digital de luz.
- ✓ Por medio de la luz blanca de la lámpara, un prisma toma luz y la divide en 3 colores por medio de chips para los colores básicos (rojo, verde y azul) y los dirige al DPL.
- ✓ El DPL reacciona a la luz enviada y mueve aproximadamente 1.3 millones de micro espejos, ello para crear la imagen de luz.
- ✓ Esta imagen luminosa pasa por el lente y es la que se puede proyectar hacia una superficie blanca.

3.3. Tipos de proyectores

a. Proyector de diapositivas en carrusel (incluye los proyectores estilo *tray*).

b. Proyector dual de diapositivas.

c. Proyector de diapositivas de formato grande.

d. Proyector 3D, proyector de última generación que muestra imágenes en una pantalla especial tratada de manera que las imágenes que proyecta envuelven al espectador dando la sensación de imagen envolvente.

3.4. Características del proyector digital

De acuerdo a Cesar (2013) presenta las siguientes características:

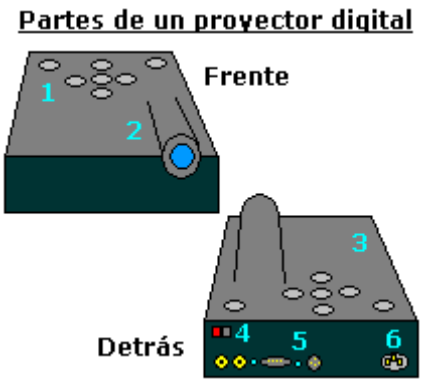
- Brillo: Se trata de la luminosidad que es capaz de proyectar, la medida utilizada es el Lumen (unidad de medida del flujo luminoso) y está estandarizado por la ANSI (*Asociation National Standard Institue*), por ello se maneja como X ANSI Lumen, actualmente alcanzan hasta 2500 Lumens.
- Capacidad de la lámpara: Se refiere al consumo en Watts y el tiempo de vida que se le garantiza en años.
- Distancia de alcance: Se mide en pulgadas (") y es la máxima distancia que puede visualizarse de manera correcta sin perder definición.

- Consumo: Es la cantidad total de energía que utiliza al funcionar, esto incluye la lámpara funcionando, el ventilador interno y todos los circuitos que intervienen. Se mide en Watts.
- Resolución: Es la cantidad máxima de píxeles que puede mostrar sin pérdida de definición de imagen. Se mide en píxeles ó Mega píxeles (1000000 píxeles).

3.5. Partes que componen el proyector

Internamente cuenta con los circuitos electrónicos necesarios para su correcto funcionamiento, mientras que externamente las partes que lo componen son las siguientes:

1. *Panel de controles:* Permite manipular las funciones del proyector, como posición, brillo, nitidez, etc.
2. *Cañón:* Se encarga de dirigir y proyectar las imágenes.
3. Cubierta: Protege los circuitos internos y da estética al proyector.
4. Interruptor: Enciende y apaga de manera mecánica el proyector.
5. Puertos: Permite la entrada de la señal de video procedentes de la computadora, videocámaras, etc.
6. Conector de alimentación: Permite recibir el suministro de corriente eléctrica.



3.6. Función del proyector

Según Cesar (2011) define las siguientes funciones; un proyector no solamente es utilizado en colegios y empresas sino que también puede ser utilizado en el hogar como forma de entretenimiento.

En los colegios es utilizado para proyecciones académicas al igual que en empresas y universidades.

Su función principal es proyectar imágenes, videos o películas de tamaño pequeño al tamaño que lo deseen las personas.

3.7. Usos específicos del proyector digital

Se utilizan para visualizar la información que envía la computadora en una superficie plana y de gran tamaño, esto en clases, conferencias, exposiciones, etc., ya que para esta actividad la pantalla de una Laptop ó un monitor CRT de una computadora es muy pequeño para visualizar a distancia. El proyector digital ha reemplazado los proyectores de acetatos convencionales.

3.7.1. Usos para un proyector LCD en el aula

Según Cesar (2011), también se puede utilizar un proyector LCD, en una sala de clases para ver películas educativas, mostrar presentaciones de lecciones o incluso para que los estudiantes participen con diapositivas interactivas. Los administradores pueden utilizar un proyector LCD para mostrar una presentación de diapositivas de eventos escolares divertidos y para la interacción con los estudiantes o

como una herramienta educativa en la formación del estudiante. Muchas instituciones escolares añaden proyectores LCD a sus aulas debido a la variedad de formas en que se pueden utilizar:

a. Pizarra

Cuando un proyector LCD se utiliza para mostrar una imagen en una pizarra, el profesor tiene la opción de utilizar marcadores de borrado en seco para dibujar sobre la imagen. Esto puede ser útil en una variedad de temas, desde la demostración de una reacción química hasta para diagramar oraciones o etiquetar grupos de músculos en una clase de anatomía. Los estudiantes pueden utilizar marcadores de diferentes colores para participar. Después de la demostración, la pizarra se puede borrar y el proyector LCD puede pasar a la siguiente imagen. Esta técnica es más fácil que usar un retroproyector, donde todas las imágenes se deben copiar en una placa transparente. También, es mejor que los proyectores de diapositivas, que no pueden producir imágenes tan claras como las de un proyector LCD.

b. Presentaciones

Los profesores pueden preparar presentaciones en una computadora y visualizarlas en un proyector LCD. Esto puede ser muy útil para crear planes de lecciones que se pueden usar año tras año. Proporciona una imagen grande y clara que los estudiantes puedan ver desde cualquier punto de la habitación. Algunos administradores utilizan proyectores LCD para presentaciones en cursos de formación de maestros o en talleres. En una reunión de padres de familia o en una asamblea escolar, los proyectores LCD permiten mostrar fácilmente a los integrantes de la asamblea presentaciones o diapositivas de fotos.

c. Proyección de videos

Los proyectores LCD permiten a los maestros mostrar fácilmente películas educativas. Pueden mostrar videos que han encontrado en línea o reproducir un DVD. Esto es especialmente útil para las instituciones educativas que antes dependían de los televisores que se colocaban en soportes con ruedas y tenían que ser trasladados de una habitación a otra. Todo lo que los profesores necesitan es una pizarra blanca o una pantalla desplegable donde mostrar el video.

"El video educativo es una técnica o sistema de grabación y reproducción de imágenes y sonidos por métodos electrónicos, mediante una cámara, un magnetoscopio y un televisor. Las imágenes quedan grabadas en dispositivo de almacenamiento" (Azinian, 2009, p. 272).

4. ESTRATEGIA DE APLICACIÓN DEL PROYECTOR DIGITAL COMO RECURSO DIDÁCTICO

4.1. Definiciones de taller

Según María Inés Maceratesi (2007) "Un taller consiste en la reunión de un grupo de personas que desarrollan funciones o papeles comunes o similares, para estudiar y analizar problemas y producir soluciones de conjunto" (p.9).

El taller combina actividades tales como trabajo de grupo, sesiones generales, elaboración y presentación de actas e informes, organización y ejecución de trabajos en comisiones, investigaciones y preparación de documentos. Entre las ventajas del taller se encuentran las de desarrollar el juicio y la habilidad mental para comprender procesos, determinar causas y escoger soluciones prácticas. Estimula el trabajo cooperativo, prepara para el trabajo en grupo y ejercita la actividad creadora y la iniciativa. Exige

trabajar con grupos pequeños, aunque conlleva a ser manejado por uno o dos líderes, por lo cual se debe manejar con propiedad técnica y poseer conocimientos adecuados sobre la materia a tratar.

Según Betancourt (2011):

> El taller se basa principalmente en la actividad constructiva del participante. Es un modo de organizar la actividad que favorece la participación y propicia que se comparta en el grupo lo aprendido individualmente, estimulando las relaciones horizontales en el seno del mismo. El papel que desempeña el docente consiste en orientar el proceso, asesorar, facilitar información y recursos, etc., a los sujetos activo, principales protagonistas de su propio aprendizaje. Evidentemente, taller, en el lenguaje corriente, es el lugar donde se hace, se construye o se repara algo. (p. 17).

4.2. Modelos de talleres de aplicación

4.2.1. Taller 1: Uso del proyector digital como recurso didáctico para el aprendizaje del sistema de coordenadas.

1. Datos Informativos:

- Institución: Unidad Educativa Anexa a la Universidad Nacional de Loja
- Año: Primero de Bachillerato General Unificado
- Fecha: 05 de junio del 2014
- Horario: 11:55 a 13:15
- Número de estudiantes: 29
- Investigador: Sr. Luis Vinicio Calva Alvarez

2. Objetivos:

- Determinar el aporte del proyector digital como recurso didáctico en el aprendizaje del sistema coordenado.

- Caracterizar el sistema coordenado, de tal forma que se puedan resolver situaciones problemáticas sobre línea recta.
- Definir conceptos básicos sobre el sistema coordenado.
- Resolver ejercicios sobre el sistema coordenado.

3. Metodología de trabajo:

- Prueba de conocimientos previos.
- Aplicación de un test previo al desarrollo del Taller Educativo.
- Motivación acerca del tema a tratar.
- Sondeo para adecuar el ambiente de trabajo.
- Presentación de diapositivas en PowerPoint sobre el sistema coordenado.
- Puntualización de aspectos importantes sobre el tema del taller.
- Elaboración de conclusiones sobre el tema.
- Evaluación de aprendizajes por medio de un pos test.
- Indicaciones generales para el próximo taller y despedida.

4. Recursos:

- Computadora
- Proyector digital
- Material de pizarra
- Libro del estudiante
- Hojas impresas

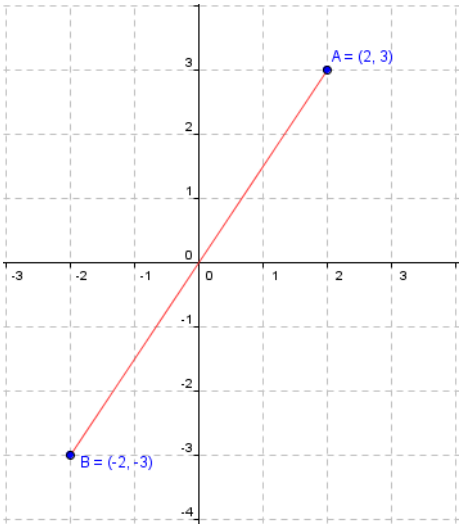
5. Programación:

ACTIVIDAD	**TIEMPO**	**RESPONSABLE**
Ingreso a clases	5 minutos	Luis Calva
Prueba de entrada, pre test	20 minutos	
Desarrollo del tema	30 minutos	
Aplicación del pos test	20 minutos	
Despedida	5 minutos	

5.1. Apoyo teórico

PROBLEMAS PROPUESTOS

- Calcular la distancia entre los puntos $A(2,3)$ y $B(-2,-3)$



Solución: Se ubican los puntos en el plano cartesiano. Se asocian los puntos, es decir, $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, con $x_1 = 2$ $y_1 = -2$, $x_2 = -2$ $y_2 = -3$, finalmente se reemplaza en la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Nos queda

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-3-3)^2 + (-2-2)^2}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

$|\overline{AB}| = 7.21$ **Distancia entre los dos puntos**

- Halle la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que une los puntos $A(-5,3)$ y $B(2,-3)$.

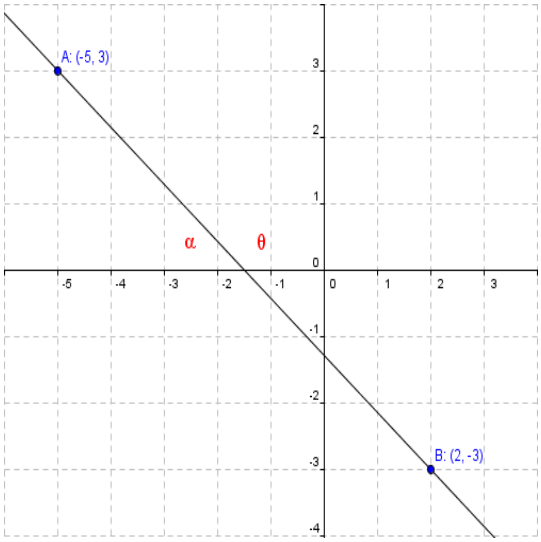
Solución:

Reemplacemos en la fórmula de la pendiente y tenemos que $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ entonces: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-3-3}{2+5} = \dfrac{-6}{7} = -0.85$ $\therefore m = -0.85$

Ahora para calcular el ángulo de dirección tenemos $Tan\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$Tan\alpha = -\frac{6}{7}$ Luego $\alpha = Tan^{-1}\left(-\frac{6}{7}\right)$, entonces $\alpha = -40.6^{o}$

Este ángulo se desplaza en dirección negativa porque rota en el mismo sentido de las manecillas del reloj. Por lo tanto, para hallar el ángulo de dirección θ (obtuso), entonces, su respectivo valor en forma positiva es:



$$\theta = 180^{o} - \alpha$$

$$\theta = 180^{o} - 40.6^{o} = 139.39^{o}$$

$$\therefore \theta = 139.4^{o}$$

6. Resultados de aprendizaje

Los resultados de aprendizaje se evidenciarán mediante la aplicación de un test que permitirá evaluar los conocimientos, pre y post aplicación del taller educativo.

7. Conclusiones

- ✓ El uso del proyector digital permite el aprendizaje del sistema coordenado.
- ✓ Las presentaciones en PowerPoint permiten la interacción entre el tema y ejercicios de aplicación.
- ✓ El estudiante resuelve ejercicios sobre la distancia entre dos puntos, pendiente de una recta, representa pares ordenados en el sistema coordenado.

- ✓ Las presentaciones permiten el reforzamiento de contenidos mostrando mayor motivación para que el alumnado aprenda.

8. Recomendaciones

- ✓ Elaborar una síntesis inicial para concretar ideas importantes del tema para luego ordenarlos en una secuencia lógica y desarrollarlos en un tiempo no muy extenso.
- ✓ La exposición debe realizarse desde el comienzo, con alguna afirmación o alguna imagen que cause impacto.
- ✓ Permitir la intervención del auditorio para ir despejando cualquier inquietud.
- ✓ Ser claro y conciso con las explicaciones para evitar confusiones.
- ✓ Utilizar de manera adecuada los recursos.
- ✓ Al finalizar presentar conclusiones breves formulándolas con los alumnos acerca del tema explicado.

9. Bibliografía del taller

- BETANCOURT, R. (Primera Edición) (2011). El Taller Como Estrategia Didáctica. Bogotá. Editorial Universidad De La Salle.
- BARTOLOMÉ, A. (Primera Edición) (2011). Recursos Tecnológicos Para El Aprendizaje. Costa Rica, Editorial Universidad Estatal a Distancia San José, ISBN 978-9968-31-859
- LEHMANN, C. (Vigésima Reimpresión) (2009). Geometría Analítica. México. Editorial Limusa Grupo Noriega Editores.
- Ministerio de Educación. (2010) Libro de Matemáticas del Noveno Año de Educación Básica.

4.2.2. Taller 2: Uso del proyector digital como recurso didáctico para el aprendizaje de la línea recta

1. Datos Informativos:

- Institución: Unidad Educativa Anexa a la Universidad Nacional de Loja
- Año: Primero de Bachillerato General Unificado
- Fecha: 06 de junio del 2014
- Horario: 07:15 a 08:35
- Número de estudiantes: 26
- Investigador: Luis Vinicio Calva Alvarez

2. Objetivos:

- Presentar diapositivas por medio del proyector digital para fortalecer el aprendizaje de las ecuaciones de la línea recta.
- Definir conceptos básicos sobre el sistema coordenado.
- Conocer las principales ecuaciones de la línea recta.
- Resolver problemas de la línea recta.

3. Metodología de trabajo:

- Prueba de conocimientos previos acerca del tema.
- Aplicación de un test previo al desarrollo del Taller Educativo.
- Motivación acerca del tema a tratar.
- Sondeo para adecuar el ambiente de trabajo.
- Presentación de diapositivas en PowerPoint sobre la línea recta.
- Se señalarán aspectos relevantes sobre el tema del taller.
- Conclusiones sobre el tema.
- Evaluación de aprendizajes por medio de un pos test.
- Indicaciones generales, y despedida.

4. Recursos

- Computadora
- Proyector digital
- Material de pizarra
- Libro del estudiante
- Hojas impresas

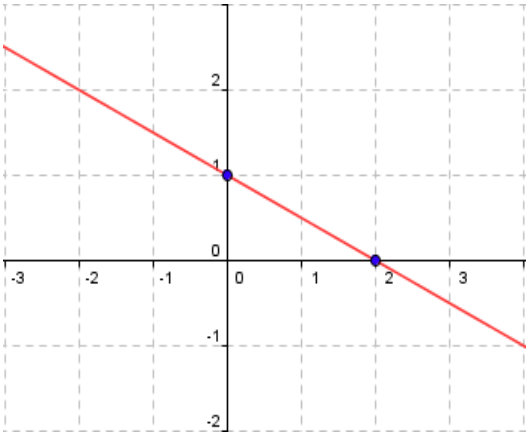
5. Programación

ACTIVIDAD	TIEMPO	RESPONSABLE
Ingreso a clases	5 minutos	Luis Calva
Prueba de entrada, pre test	20 minutos	
Desarrollo del tema	30 minutos	
Aplicación del pos test	20 minutos	
Despedida	5 minutos	

5.1. Apoyo teórico

PROBLEMAS PROPUESTOS

- Graficar la función $y = -\frac{1}{2}x + 1$



Solución: Se debe escoger dos números que representen a la variable "x", para obtener dos valores de "y", así:

X	0	2
Y	1	0

El proceso:

Para x = 0

$$y = \frac{-1}{2}(0) + 1 = 0 + 1 = 1$$

Para x = 2

$$y = \frac{-1}{2}(2) + 1 = -1 + 1 = 0$$

Así se obtiene las coordenadas $(0,1);\ (2,0)$

- Halla la ecuación de la recta que pasa por $(-1,3)\ y\ (2,0)$.

Solución: Sea $A(-1,3)$ y $B(2,0)$

Se calcula la pendiente $m = \frac{0-3}{2-(-1)} = \frac{-3}{3} = -1$. Luego se escoge cualquier punto por ejemplo $A(-1,3) = (x_1 - y_1)$, entonces reemplazando en la ecuación de la recta:

$$\begin{aligned}
&(y - y_1) = m(x - x_1) \\
&(y - 3) = -1(x - (-1)) \\
&y = -x - 1 + 3 \\
&y = -x + 2
\end{aligned}$$

- Dada la ecuación $5x + 8y - 10 = 0$. Calcular la pendiente (m) y la ordenada del intercepto con el eje y (b).

Solución: Se reconocen los coeficientes $A = 5; B = 8;\ C = -10$

$m = -\frac{5}{8}$; $\quad b = -\frac{-10}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$; $\quad b = \frac{5}{4}$

Luego se puede escribir $y = -\frac{5}{8}x + \frac{5}{4}$

6. Resultados de aprendizaje

Los resultados de aprendizaje se evidenciarán mediante la aplicación de un test que permitirá evaluar los conocimientos, pre y post aplicación del taller educativo.

7. Conclusiones

- ✓ El uso del proyector digital permite el aprendizaje de la línea recta.
- ✓ Las presentaciones en PowerPoint permite la interacción entre el estudiante y docente.
- ✓ El estudiante resuelve ejercicios sobre la línea recta.
- ✓ Las presentaciones permiten el reforzamiento de contenidos mostrando mayor motivación para que el alumnado aprenda.

8. Recomendaciones

- ✓ Elaborar una síntesis inicial para concretar ideas importantes del tema para luego ordenarlos en una secuencia lógica y desarrollarlos en un tiempo no muy extenso.
- ✓ La exposición debe realizarse desde el comienzo, con alguna afirmación o alguna imagen que cause impacto.
- ✓ Permitir la intervención del auditorio para ir despejando cualquier inquietud.
- ✓ Ser claro y conciso con las explicaciones para evitar confusiones.
- ✓ Utilizar de manera adecuada los recursos.
- ✓ Al finalizar presentar conclusiones breves formulándolas con los alumnos acerca del tema explicado.

9. Bibliografía del taller:

- BETANCOURT, R. (Primera Edición) (2011). El Taller Como Estrategia Didáctica. Bogotá. Editorial Universidad De La Salle.
- BARTOLOMÉ, A. (Primera Edición) (2011). Recursos Tecnológicos Para El Aprendizaje. Costa Rica, Editorial Universidad Estatal a Distancia San José, ISBN 978-9968-31-859.

- LEHMANN, C. (Vigésima Reimpresión) (2009). Geometría Analítica. México. Editorial Limusa Grupo Noriega Editores.
- Ministerio de Educación. (2010). Libro de Matemática del Noveno Año de Educación Básica.

5. VALORACIÓN DE LA EFECTIVIDAD DE LA ALTERNATIVA

5.1 La alternativa

"En el lenguaje corriente y dentro de la teoría de la decisión, una alternativa es una de al menos dos cosas (objetos abstractos o reales) o acciones que pueden ser elegidas o tomadas en alguna circunstancia" (Anónimo, 2013, p.1)

La alternativa consiste en la búsqueda de la mejor solución frente a un problema, puesto que se toma una población que se considera frágil y de fácil adquisición; sin embargo, la alternativa tiene que satisfacer los objetivos propuestos, debido a que ésta denota la perspectiva de la investigación y la búsqueda de soluciones a problemas sociales.

"La teoría de la decisión trata del estudio de los procesos de toma de decisiones desde una perspectiva racional. La decisión es un verdadero proceso de reflexión y, como tal, racional y consciente, deliberado y deliberativo" (Sánchez, 2008, p.4)

> La teoría de la decisión es una metodología prescriptiva o normativa que indica cómo se debe decidir para ser consecuentes con los objetivos, preferencias y ciertos principios impuestos por la teoría. (Cómo se debe decidir, pero no que decidir).
>
> En un sentido amplio, decidir es llevar a cabo un proceso completo por el cual se establecen, analizan y evalúan alternativas a fin de seleccionar una y sólo una. (Sánchez, 2008, pp. 5-6)

5.2 Diseño Pre Experimental

Según Campbell (2011) el diseño pre experimental siempre se llevan a cabo en ambientes naturales y los grupos son de carácter natural. Tiene un grado de control mínimo en virtud de que se trabaja con un solo grupo y las unidades de análisis no son asignadas aleatoriamente al mismo, se analiza una sola variable y no existe la posibilidad de comparación de grupos. Adicionalmente existen muy pocas probabilidades de que el grupo sea representativo de los demás. Este tipo de diseño consiste en administrar un tratamiento o estímulo en la modalidad de solo pos prueba o en la de pre prueba – pos prueba.

Diseños pre experimentales o correlacionales

Son aquellos diseños formulados para establecer algún tipo de asociación entre dos o más variables. Por tanto, al no buscarse relaciones estrictas de naturaleza causa - efecto, no resulta adecuado, al menos hablar de variable dependiente ni de variable independiente propiamente dichas.

Como ejemplo de diseños pre experimentales o correlacionales pueden destacarse la mayoría de los que utilizan la encuesta o la observación como estrategias de investigación, que, además, suelen ser los más habituales en educación o en cualquier otro ámbito de estudio en el que sea de máximo interés el llevar a cabo investigación aplicada como suele ser la pre experimental.

5.3 El pre test.

“Los test diagnósticos son uno herramienta habitual para tomar decisiones clínicas, a menudo influenciadas por factores, entre los cuales uno es no ajustar los índices variables publicados según las probabilidades del pre test del sujeto en individual” (Herrera, Duffau & Lagos, 1997, pp. 125-126)

Uno de los factores comunes en la interpretación del comportamiento de los test diagnósticos es su aplicación, con criterio intuitivo, basadas en la sensibilidad y especificidad declaradas por los autores que proponen los test diagnósticos, sin reparar que tales índices son, a menudo, poco confiables. O bien, también solo sobre bases intuitivas, en consideración solo de los valores predictivos incluidos en la publicación respectiva.

“El Pre test o primera observación en la variable adjunta. El pre test precede siempre al tratamiento de los sujetos (método, actividad, pertenencia a un grupo, etc.) define si existe dificultad, problemas que necesitan ser analizados y solucionados”. (Morales, 2013, p.45)

5.4 El pos test

El post test incluye las mismas preguntas del pre test aunque se pueden realizar algunas modificaciones para detectar si la alternativa fue eficiente y así llegar a conclusiones más específicas, puesto que en algunas ocasiones los sujetos investigados arrojan respuestas superficiales difíciles de ser tomadas como confiables.

> El Post test, o segunda medida u observación, es la evaluación posterior al pre test. Cuando hay una única medición (es decir, no hay pre test), es común utilizar este símbolo (O2) para dejar claro la ausencia de pre test. Evalúa la eficacia de la solución y determina asimilación de contenidos. (Morales, 2013, p.45)

5.5 Comparación del pre test y el post test

> El Profesor-investigador que decide poner en marcha un nuevo sistema de entrenamiento del razonamiento matemático en un grupo de alumnos (grupo experimental) y evaluar las habilidades al respecto al empezar realiza una medición por medio del pre test y al terminar el curso realiza otra medición a través de la post test. (Anónimo, 2013, p.2)

Una ventaja del diseño es que es posible evaluar la evolución comparativa de los grupos. Así de esta manera se llega a soluciones que partieron de conclusiones específicas y dirigidas a grupos particulares, ya que se verificó la realidad del surgimiento del problema de estudio y por consiguiente se realizó la medición de avance de asimilación teórico práctica.

5.6. Modelo estadístico entre el pre test y el pos test

La prueba estadística que permite relacionar los valores obtenidos y así determinar la eficiencia entre el pre test y post test es la prueba signo rango de Wilcoxon:

Frank Wilcoxon (1892–1965) fue un químico y estadístico estadounidense conocido por el desarrollo de diversas pruebas estadísticas no paramétricas.

Wilcoxon fue un investigador, publicó más de 70 artículos, pero se lo conoce fundamentalmente por uno de 1945 en el que se describen dos nuevas pruebas estadísticas: la prueba de la suma de los rangos de Wilcoxon y la prueba de los signos de Wilcoxon. Se trata de alternativas no paramétricas a la prueba t de Student.

Luego de una vida de trabajo, murió el 18 de noviembre de 1965 tras una enfermedad.

La prueba de los rangos con signo de Wilcoxon es una prueba no paramétrica para comparar la mediana de dos muestras relacionadas y determinar si existen diferencias entre ellas, las cuales deben cumplir las siguientes características:

- ✓ Es libre de curva, no necesita una distribución específica.
- ✓ Nivel ordinal de la variable dependiente.
- ✓ Se utiliza para comparar dos mediciones de rangos (medianas) y determinar que la diferencia no se deba al azar (que la diferencia sea estadísticamente significativa).
- ✓ Se utiliza cuando la variable subyacente es continua pero no se presupone ningún tipo de distribución particular.

Se puede notar que la prueba de signo utiliza sólo los signos más y menos de las diferencias entre las observaciones y **X** en el caso de una muestra, o los signos más y menos de las diferencias entro los pares de observaciones en el caso de la muestra pareada, pero no toma en consideración la magnitud de estas diferencias. Esta prueba se aplica en el caso de una distribución continua simétrica. Bajo esta condición se puede probar la hipótesis nula **Y=X**. Primero se resta **X** de cada valor muestral y se descarta todas las diferencias iguales a cero. Se asigna un rango de 1 a la diferencia absoluta más pequeña, un rango de 2 a la siguiente más pequeña, y así sucesivamente. Cuando el valor absoluto de dos o más diferencias es el mismo, se asigna a cada uno el promedio de los rangos que se asignarían si las diferencias se distinguieran. Por ejemplo, si la quinta y sexta diferencia son iguales en valor absoluto, a cada una se le asignaría un rango de 5.5. Si la hipótesis **Y = X** es verdadera, el total de los rangos que corresponden a las diferencias positivas debe ser casi igual al total de los rangos que corresponden a las diferencias negativas. Se representan esos totales como w_+ y w_-, respectivamente. (Instituto Tecnológico Chihuahua, 2012, p.1)

Los pasos a seguir para calcular la prueba de signo de Wilcoxon son:

1) Restar la media hipotética μo de cada observación

$$\boldsymbol{D} = |\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}|$$

2) Se elimina cualquier diferencia que de cómo resultado cero. Tener en cuenta que se reduce el tamaño de N.

3) Ordenar las diferencias de menor a mayor sin importar el signo (sólo el valor absoluto). Si dos o más son iguales asignar a cada valor la media de la posición que ocupa en la lista.

4) Asignar:

- A las diferencias positivas se les asigna como W+

- A las diferencias negativas se les asigna como W-
- Sumar cada grupo
- El menor valor de los dos anteriores se asigna como W.

5) Comparar los valores obtenidos con los valores críticos en la tabla (0.05, 0.025 y 0.01). N es el número de diferencias halladas, sin tomar en cuenta las que son iguales a cero.

6) Se plantea si ha dado resultado la alternativa en base a los siguientes postulados:

   - (X = Y) la alternativa no ha dado resultado.
   - (Y > X) la alternativa sirvió como herramienta metodológica para el aprendizaje.

7) Determinar la media, la desviación estándar y el valor de z.

8) En base a los resultados obtenidos se procede a concluir: si la calificación Z es mayor o igual a 1.96 (sin tomar en cuenta el signo) se rechaza que la alternativa no ha dado resultado (X = Y), esto es porque este valor equivale al 95% del área bajo la curva normal (nivel de significancia de 0.05). Con un valor menor no podemos rechazar X = Y; por lo tanto se acepta que la alternativa sirvió como herramienta metodológica para el aprendizaje Y > X.

e) MATERIALES Y MÉTODOS

Materiales

Los materiales utilizados en la investigación fueron:

- Materiales de oficina:

  - Grapadora
  - Lápices
  - Perforadora
  - Carpetas
  - Archiveros

- Material de fotografía

  - Cámara digital

- Material de producción y reproducción de textos

  - Papel
  - Impresora

- Material didáctico, repuestos y accesorios

  - Proyector digital
  - Computadora

- Material de consulta

  - Libros y colecciones en físico y digital

- Bienes muebles e inmuebles

  - Aula del primero de bachillerato general unificado “A” de la Unidad Educativa Anexa a la Universidad Nacional de Loja

- Gastos de informática

  - Sistemas informáticos (software Microsoft Office, etc.)
  - Mantenimiento del equipo informático

Métodos

La investigación se enfocó en los siguientes métodos:

Método Deductivo: Se lo utilizó para analizar las generalidades del problema, partiendo de hechos particulares como son los conocimientos previos hasta llegar a las generalidades del aprendizaje de la línea recta.

Método Analítico: Se lo aplicó para analizar los modelos que se usó en la aplicación de la alternativa para potenciar el aprendizaje de la línea recta. Además se utilizó para fundamentar la medición y efectividad del proyector digital como recurso didáctico en el aprendizaje de la línea recta, a través de la Prueba Signo Rango de Wilcoxon, analizando una serie de postulados que expresan relaciones entre las variables estudiadas de forma deductiva. .

Sintético: Este método permitió recopilar la información de la línea recta y del proyector digital que nos sirvió en los talleres y en la propuesta de conclusiones y recomendaciones.

Método Científico: Permitió observar la realidad del aprendizaje de la línea recta, este método como proceso ordenado y sistemático se constituyó en la

guía para la consecución de los objetivos propuestos de una manera lógica y coherente.

Para el desarrollo de la investigación se utilizó el siguiente proceso:

- **Determinación del diseño de investigación**

La investigación respondió a un diseño de tipo descriptivo porque se realizó un diagnóstico del aprendizaje de la línea recta para determinar dificultades, carencias o necesidades.

Adicionalmente con esta información se planteó un diseño pre experimental por cuanto intencionadamente se potenció el aprendizaje de la línea recta en base al uso del proyector digital como recurso didáctico a través de la modalidad de taller perfectamente bien determinado, en el primer año de bachillerato general unificado y en un tiempo y espacio determinado.

- **Procesos metodológicos**

  - Se teorizó el objeto de estudio del aprendizaje de la línea recta en base de la secuencia:

a) Mapa mental del aprendizaje de la línea recta.
b) Esquema de trabajo del objeto de estudio.
c) Fundamento teórico cada descriptor del esquema de trabajo.
d) Uso de las fuentes de información en forma histórica, a través de las normas internacionales de la asociación de psicólogos americanos (APA).

  - Para el diagnóstico de las dificultades del aprendizaje de la línea recta se realizó:

a) El mapa mental del aprendizaje de la línea recta.

b) Aplicación de una evaluación diagnóstica del aprendizaje de la línea recta, mediante criterios e indicadores.
c) Fundamento teórico de cada criterio con sus respectivos indicadores.
d) Aplicación de una encuesta a los estudiantes del primer año de bachillerato general unificado y al docente de Matemática.

- Para determinar el uso del proyector digital como recurso didáctico de solución probable para potenciar el aprendizaje de la línea recta, se realizó lo siguiente:

a) Precisar el uso del proyector digital.
b) Un sondeo de un modelo teórico o modelos de uso del proyector digital.
c) Análisis procedimental del funcionamiento de los modelos de uso del proyector digital.
d) Diseño de planes de aplicación del uso del proyector digital.

Establecidos los modelos de uso del proyector digital se aplicaron mediante talleres concebidos como un aprender haciendo.

Los talleres que se presentaron, para potenciar el aprendizaje de la línea recta tuvieron temáticas como:

a) Taller 1: Uso del proyector digital como recurso didáctico para el aprendizaje del sistema de coordenadas.
b) Taller 2: Uso del proyector digital como recurso didáctico para el aprendizaje de la línea recta.

- Para valorar la efectividad del uso del proyector digital como recurso didáctico para el aprendizaje de la línea recta, se realizó:

a) La aplicación de un test de actitudes y valores sobre el aprendizaje de la línea recta, pre test.

b) El uso del proyector digital como recurso didáctico.
c) La aplicación del mismo test anterior después del taller, pos test.
d) La comparación de los resultados con los test aplicados utilizando como artificio: los pre test tomados antes del taller asignados con X y los pos test aplicados después del taller asignados con Y.
e) Los puntajes obtenidos en las pruebas se realizó mediante la Prueba Signo Rango de Wilcoxon, donde se comprueba la efectividad de la alternativa.

Para el cálculo de la Prueba Signo Rango de Wilcoxon se utiliza las siguientes fórmulas:

Nº	**X**	**Y**	$\mathbf{D = \lvert Y - X \rvert}$	**RANGO +**	**RANGO -**
			TOTAL	$\sum \mathbf{R+}$	$\sum \mathbf{R-}$

Se calcula el rango real:

$$\boldsymbol{W} = \left(\sum \mathbf{R+}\right) - \left(\sum \mathbf{R-}\right)$$

La alternativa no funciona: Las puntuaciones X son iguales o inferiores a las puntuaciones Y (**X = Y).**

La alternativa funciona: Las puntuaciones Y son superiores a las puntuaciones X (**Y > X).**

$$\boldsymbol{\mu_W} = \mathbf{W^+} - \frac{\mathbf{N(N+1)}}{\mathbf{4}}$$

donde:

$\boldsymbol{\mu_W} = \text{Media}$

$\mathbf{N} = \text{Tamaño de la muestra}$

$\mathbf{W}^{+} = \text{Valor estadístico de Wilcoxon}$

Para el cálculo de la desviación estándar o cálculo del error estándar $(\boldsymbol{\sigma_W})$ se utiliza:

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{N(N+1)(2N+1)}}{\mathbf{24}}}$$

Mientras la clasificación Z se calcula por medio de la fórmula:

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{W - \mu_W}}{\boldsymbol{\sigma_W}}$$

- Para la obtención de los resultados se tomó en cuenta el diagnóstico del aprendizaje de la línea recta y la aplicación del proyector digital como recurso didáctico, por tanto son dos clases de resultados que se han considerado:

a) Del diagnóstico del aprendizaje de la línea recta.
b) De la aplicación del proyector digital como recurso didáctico para el aprendizaje de la línea recta.

- Para la elaboración de la discusión se consideró dos resultados :

a) Discusión con respecto a los resultados del diagnóstico (hay o no hay dificultades en el aprendizaje de la línea recta).
b) Discusión con respecto a los resultados de la aplicación del proyector digital como recurso didáctico (dio o no dio resultados, cambio o no cambio el aprendizaje de la línea recta).

- Para elaborar las conclusiones en forma de proposiciones se tomó en cuenta dos aspectos:

a) Conclusiones con respecto al diagnóstico del aprendizaje de la línea recta.
b) Conclusiones con respecto de la aplicación del proyector digital como recurso didáctico.

- La construcción de las recomendaciones se hizo a partir de cada conclusión, considerando, la contrastación de resultados.

- Población y muestra

Quiénes / Informantes	Población	Muestra
Directivos	-	-
Estudiantes	29	-
Padres de familia	25	-
Profesores	1	-

En vista de que se trabajó con toda la población no se utilizó la fórmula para la determinación de una muestra específica.

f. RESULTADOS

➢ **Resultados del diagnóstico del aprendizaje de la línea recta.**

✓ **Objetivo.-** Diagnosticar las dificultades, obstáculos, obsolescencias y necesidades que se presentan en el aprendizaje de la línea recta.

Estudiantes

1. Pregunta.- ¿Conoce usted la historia de la línea recta?

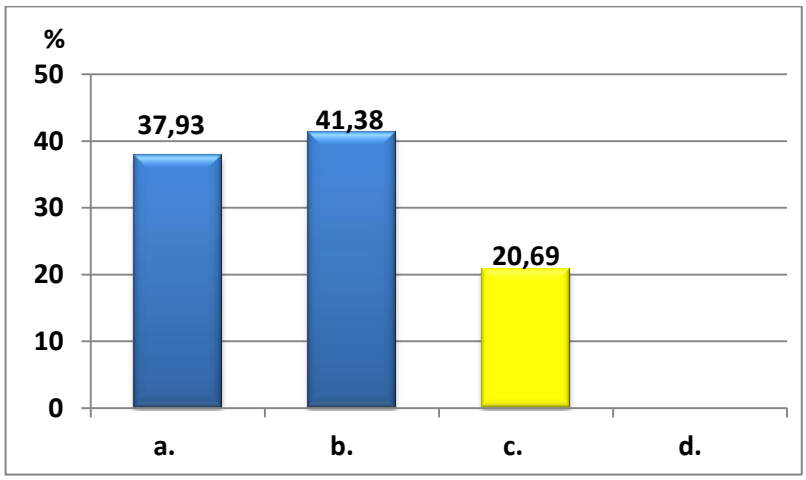
CUADRO 1

HISTORIA DE LA LÍNEA RECTA

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. Nunca	11	37,93
b. Parcialmente	12	41,38
c. En su mayor parte	6	20,69
d. Totalmente	-	-
TOTAL	29	100

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

GRÁFICO 1



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Las primeras definiciones de línea recta fueron propuestas por el matemático y geómetra griego Euclides (325 – 265 a.C.), siendo considerado el Padre de la Geometría. Posteriormente varios físicos y matemáticos como Platón (427 – 347), Leibniz (1646 – 1716), Legendre (1752 – 1833), Simpson (1710 – 1761), Fourier (1768 – 1830), Delboeuf (1831 – 1896), Duhamel, (1797 – 1872) continuaron con el estudio de la línea recta sin llegar a tener éxito; sin embargo el filósofo y matemático francés René Descartes en el año 1637, fue quien fraguó una conexión entre la Geometría y el Algebra al demostrar cómo aplicar los métodos de una disciplina en la otra, es así que nace la Geometría Analítica y por ende la línea recta (Zapata, 2013).

Según los resultados obtenidos el 20,69% de los estudiantes conocen, en su mayor parte la historia de la línea recta.

De acuerdo a los resultados obtenidos, el 41,38% conocen parcialmente la historia de la línea recta, mientras que el 37,93% de los estudiantes no conocen la historia de la línea recta, es por ello que el estudiantado no le pone mucha atención al momento de estudiar esta temática porque no se despierta el interés en los estudiantes, y es muy importante conocer la historia para motivar a los estudiantes en el estudio de la línea recta.

2. Pregunta.- Segmento recto es:

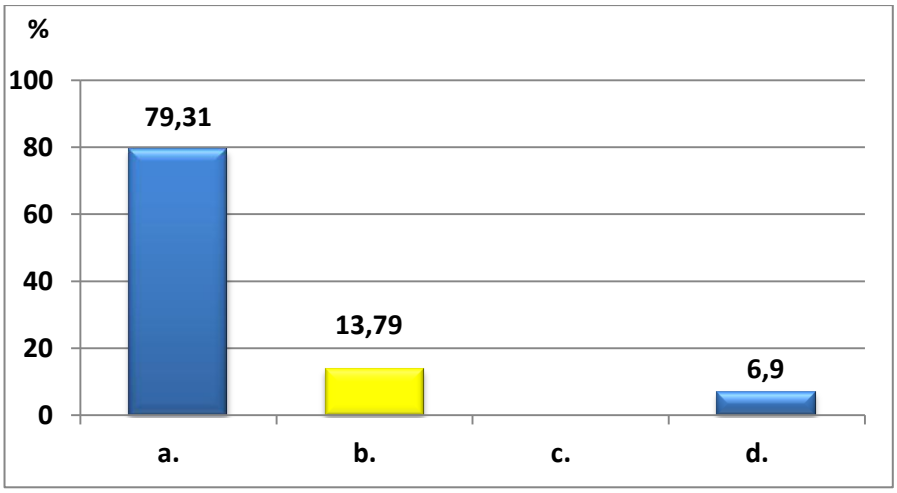
CUADRO 2

SEGMENTO RECTO

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. Una línea recta	23	79,31
b. Una porción de línea recta	4	13,79
c. Un segmento de curva	-	-
d. Ninguna de las anteriores	2	6,90
TOTAL	29	100

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

GRÁFICO 2



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Según Prieto, Herminio (2006): “Un segmento rectilíneo es una recta comprendida entre dos puntos llamados extremos” (p. 69).

Según los resultados obtenidos el 13,79% de los estudiantes saben qué es un segmento recto.

Sumando los resultados de las respuestas negativas de que es un segmento recto, se concluye que el 86,21% de los estudiantes no saben qué es un segmento recto. Por lo expuesto se puede decir que no tienen un aprendizaje duradero, ya que estos conocimientos se los estudia en grados o cursos anteriores, son conceptos sencillos que intervienen en el estudio de la línea recta y en la vida diaria.

3. **Pregunta.- Identifique la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos:**

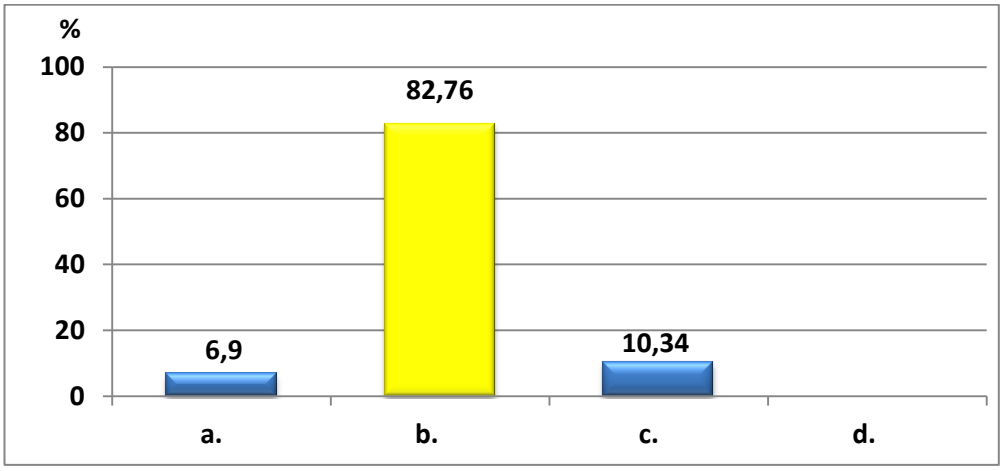
CUADRO 3

FÓRMULA PARA CALCULAR LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. $A = \pi r^2$	2	6,90
b. $d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	24	82,76
c. $Ax + By + C = 0$	3	10,34
d. $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$	-	-
TOTAL	29	100

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

GRÁFICO 3



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Según Smith, et al. (2001): "La fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por: $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$" (p. 513).

Como se observa en el gráfico 3, el 82,76% de los estudiantes si reconocen la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, lo cual es muy positivo ya que sí han asimilado un aprendizaje duradero.

Sumando las respuestas negativas se puede decir que el 17,24% de los estudiantes no reconocen la fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos, aunque es una mínima parte del estudiantado que no han asimilado este conocimiento, pero es muy importante para estudiar la línea recta, y es por ello que los alumnos tienen dificultad al momento de resolver problemas de la línea recta.

4. Pregunta.- Fórmula para calcular la pendiente: $\mathbf{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

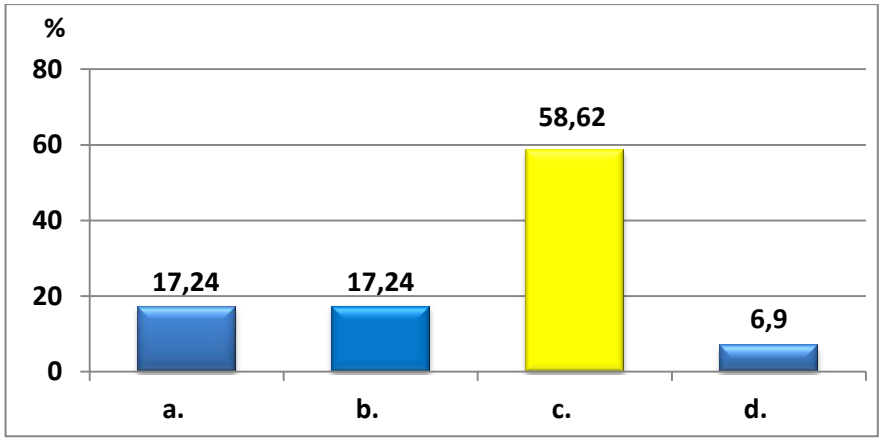
CUADRO 4

FÓRMULA DE LA PENDIENTE

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. La circunferencia	5	17,24
b. Línea recta	5	17,24
c. Pendiente de una recta	17	58,62
d. Segmento recto	2	6,90
TOTAL	29	100

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

GRÁFICO 4



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Según Jiménez (2011): "Se llama pendiente *m* o coeficiente angular de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación y su fórmula es: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$" (p. 49).

Según los resultados obtenidos, el 58,62% de los estudiantes sí saben la fórmula para calcular la pendiente de una recta, y lo cual es satisfactorio ya que pueden encontrar la pendiente de una recta.

Sumando las respuestas negativas, se puede decir que el 41,38% de los estudiantes no saben la fórmula para calcular la pendiente de una recta, es por ello que no saben encontrar la pendiente de una recta. Este elemento es importante en el estudio de la línea recta ya que nos permite resolver problemas de línea recta.

5. Pregunta.- Se llama línea recta:

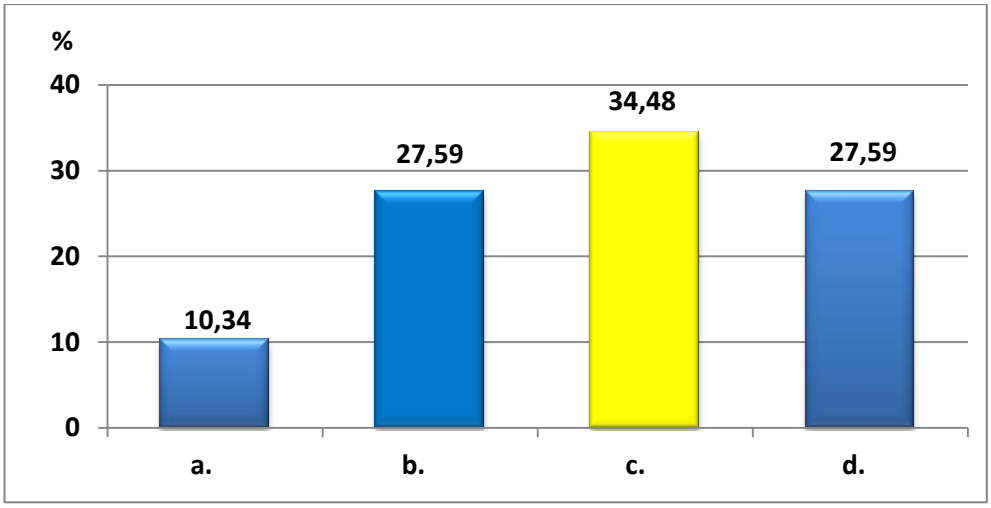
CUADRO 5

LÍNEA RECTA

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. Dada una ecuación interpretarla geométricamente.	**3**	**10,34**
b. El lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo.	**8**	**27,59**
c. Al lugar geométrico de los puntos tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera del lugar, el valor de la pendiente m resulta siempre constante.	**10**	**34,48**
d. La condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación.	**8**	**27,59**
TOTAL	**29**	**100**

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

GRÁFICO 5



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Según Galindo, et al. (2005): "Llamamos línea recta al lugar geométrico de los puntos tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ del lugar, el valor de la pendiente *m* resulta siempre constante" (p. 57).

De acuerdo a la definición de línea recta el 34,48% de los estudiantes sí saben que es una línea recta.

Como se observa en el gráfico 5, sumando las respuestas negativas el 65,52% de los estudiantes no saben que es una línea recta, ya que no pueden diferenciar qué es una línea recta con respecto a otros conceptos que se estudia en la Geometría Analítica como por ejemplo los problemas fundamentales de esta parte de la Matemática.

6. **Pregunta.- Cuál de las siguientes ecuaciones es una línea recta:**

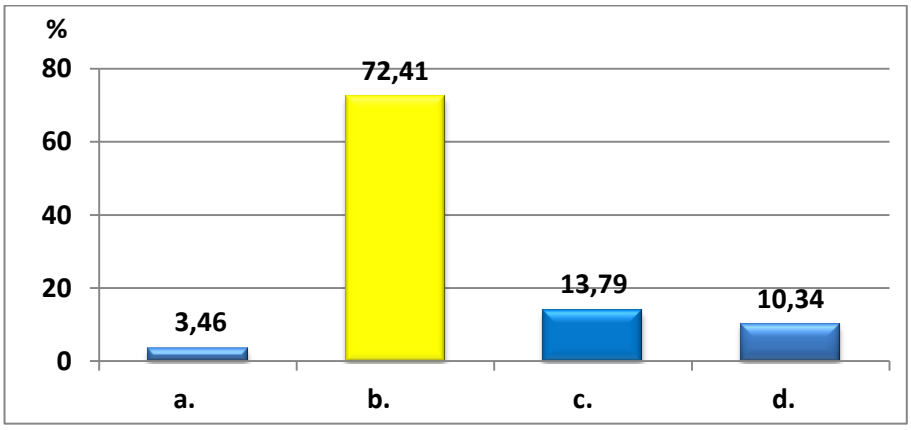
CUADRO 6

ECUACIÓN DE UNA LÍNEA RECTA

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. $x^2 + 6x - 9 = 0$	1	3,46
b. $x + 9y - 3 = 0$	21	72,41
c. $2x^2 + 2y^2 + 10x - 6y + 9 = 0$	4	13,79
d. $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$	3	10,34
TOTAL	29	100

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

GRÁFICO 6



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Según Oteyza (2005): "La forma general de la ecuación de una recta contempla tanto a las rectas verticales como las que no lo son. Dicha forma general se obtiene pasando todos los términos de la ecuación a un miembro, de manera que éste quede igualado a cero de la forma: $Ax + By + C = 0$" (p. 48).

Como podemos observar en el gráfico 6, el 72,41% de los estudiantes saben diferenciar una ecuación de una línea recta de otras ecuaciones como por ejemplo la ecuación de una circunferencia que es una figura cónica.

Sumando las respuestas incorrectas, el 27,59% de los estudiantes no saben diferenciar una ecuación de una recta con respecto a otras figuras cónicas que se estudia en la geometría analítica, esta carencia de reconocer una ecuación de una línea recta se debe a que no saben con claridad qué es una línea recta y a su vez no conocen de cuántas formas se puede escribir una línea recta.

7. Pregunta.- Ecuación general de la línea recta es:

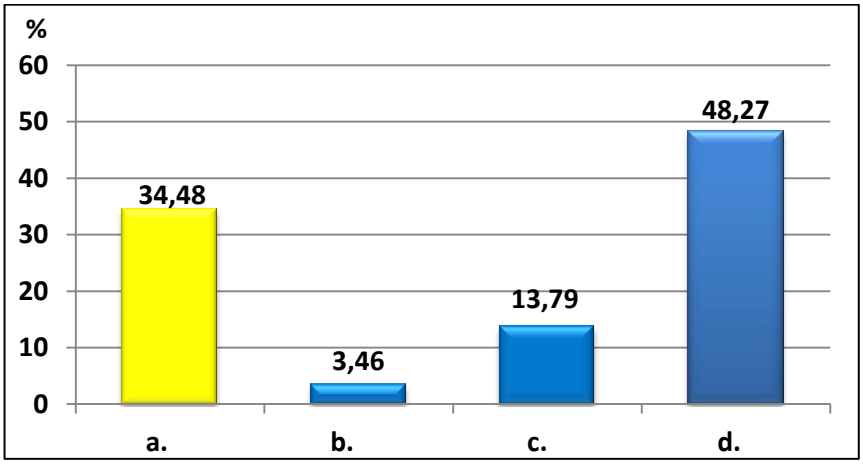
CUADRO 7

ECUACIÓN GENERAL DE LA LÍNEA RECTA

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. $Ax + By + C = 0$	10	34,48
b. $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$	1	3,46
c. $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	4	13,79
d. $y = mx + b$	14	48,27
TOTAL	29	100

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

GRÁFICO 7



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Según Oteyza (2011):

> La forma de la ecuación de la recta que cubre todas las rectas ya sean estas rectas verticales como a las que no lo son. Esta forma es la ecuación general de la recta y se obtiene pasando todos los términos de la ecuación a un miembro de manera que este quede igualado a cero, y son de la forma $Ax + By + C = 0$. (p. 53)

Según los resultados obtenidos, el 34,48% de los estudiantes sí conocen cual es la ecuación general de una línea recta.

Sumando las respuestas incorrectas, el 65,52% de los estudiantes no saben cuál es la forma o ecuación general de una línea recta, es por ello que la mayoría del estudiantado no sabe reconocer una ecuación de una recta ya que no tienen claro el fundamento teórico sobre la ecuación general de una recta.

8. Pregunta.- Ecuación normal de la línea recta es:

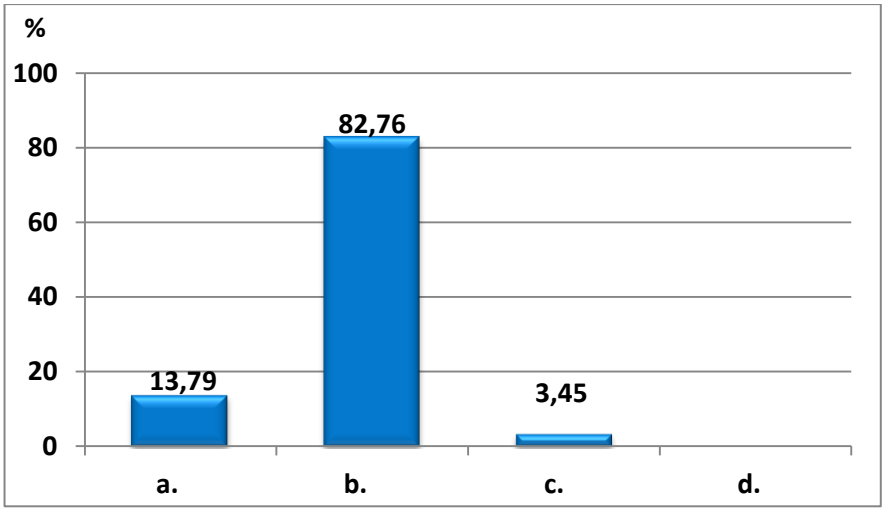
CUADRO 8

ECUACIÓN NORMAL DE LA LÍNEA RECTA

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	4	13,79
b. $Ax + By + C = 0$	24	82,76
c. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	1	3,45
d. $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$	-	-
TOTAL	29	100

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

GRÁFICO 8



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Según Duque, et al. (2005): "La forma normal de la recta aunque no es muy utilizada se emplea cuando se dan la distancia normal *k* y el ángulo de inclinación de la recta *L* o de su normal *L', su ecuación es* $x \cos w + y \sin w - k = 0$ *."* (p. 239).

De acuerdo a los resultados obtenidos, ningún estudiante tiene conocimiento acerca de la ecuación normal de la línea recta.

Además la totalidad de los estudiantes, es decir el 100% de los alumnos no saben cuál es la forma o ecuación normal de una línea recta, mientras tanto nadie tiene conocimiento sobre la ecuación normal de la recta, por cuanto el nuevo bachillerato general unificado ha reorganizado la asignatura de matemáticas, es por ello que esta temática se da en años superiores.

9. **Pregunta.- Condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas:**

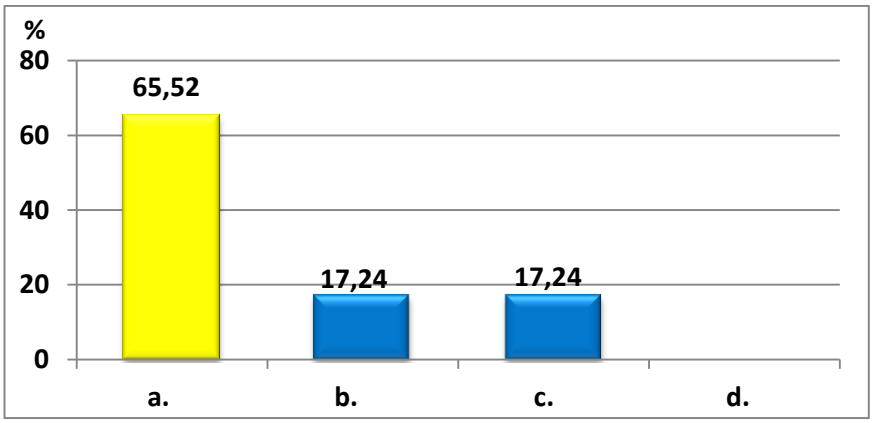
CUADRO 9

CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE DOS RECTAS SEAN PARALELAS

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. $m_1 = m_2$	19	65,52
b. $Ax + By + C = 0$	5	17,24
c. $AB = A'$	5	17,24
d. $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$	0	0
TOTAL	29	100

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

GRÁFICO 9



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Según Sullivan (1997): “Dos rectas no verticales distintas son paralelas si, y sólo si, sus pendientes son iguales” (p. 81).

De los resultados obtenidos el 65,52% de los estudiantes sí saben cuál es la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas.

Sumando las respuestas incorrectas, el 34,48% de los estudiantes no saben cuál es la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas; al no saber el estudiante cuándo dos rectas son paralelas no podrá resolver problemas o encontrar la ecuación de una recta, ya que los alumnos no tienen claro los fundamentos teóricos.

10. Pregunta.- Condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares:

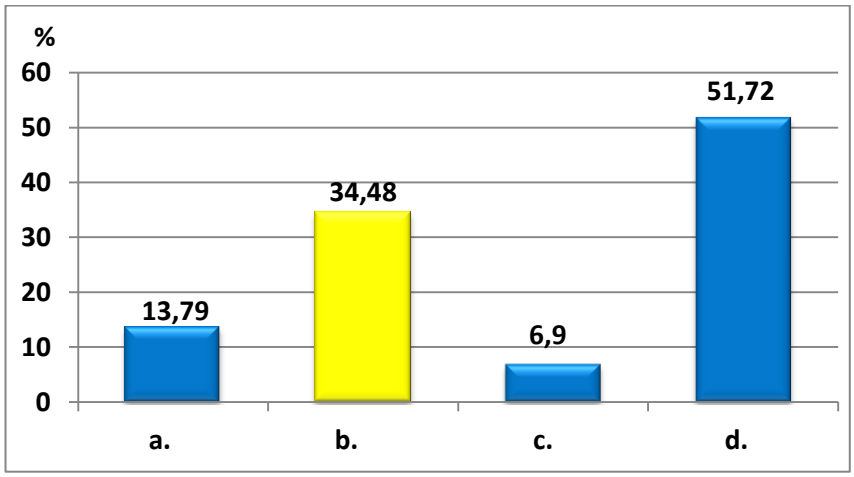
CUADRO 10

CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE DOS RECTAS SEAN PERPENDICULARES

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$	**4**	**13,79**
b. $m_1 m_2 = -1$	**8**	**34,48**
c. $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$; o sea; $AB' - A'B \neq 0$	**2**	**6,90**
d. Ninguna de las anteriores	**15**	**51,72**
TOTAL	**29**	**100**

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

GRÁFICO 10



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Según Jiménez (2010): “Dos rectas l_1 y l_2 con pendientes m_1 y m_2, respectivamente, son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son reciprocas y de signo contrario”. (p. 56).

De los resultados obtenidos, el 34,48% de los estudiantes sí saben la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares.

Sumando las respuestas incorrectas, el 72,41% de los estudiantes no saben la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares, la mayoría de los estudiantes no tienen bien claro los fundamentos teóricos acerca de la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares, es muy importante conocer estos fundamentos teóricos para resolver problemas acerca de la línea recta.

11. Pregunta.- La pendiente es la tangente del ángulo de inclinación de la línea recta:

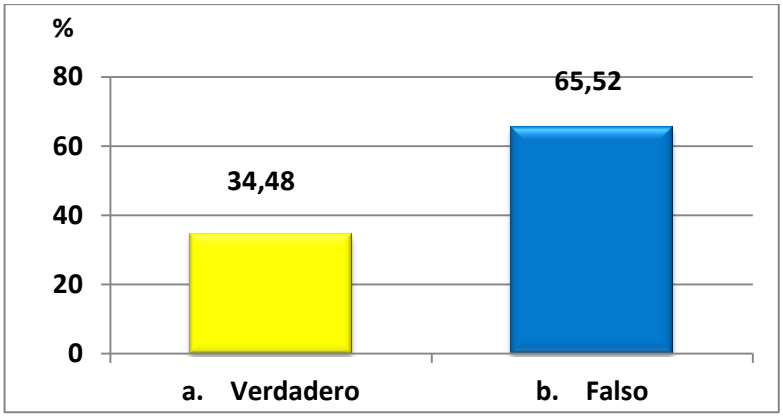
CUADRO 11

LA PENDIENTE ES LA TANGENTE DEL ÁNGULO DE INQUINACIÓN DE LA LÍNEA RECTA

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. Verdadero	10	34,48
b. Falso	19	65,52
TOTAL	29	100

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

GRÁFICO 11



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Según Jiménez (2011): "Se llama pendiente *m* o coeficiente angular de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación" (p. 49).

De los resultados obtenidos, el 34,48% de los estudiantes tienen claro el concepto de pendiente de una recta.

El 65,52% de los estudiantes no tienen claro el concepto de pendiente de una línea recta, ya que a una pendiente de un recta también es el ángulo de inclinación entre la recta y el eje positivo de las abscisas, la pendiente una recta es muy importante para encontrar la ecuación de una recta.

12. Pregunta.- Si $a \neq b$ entonces $(a, b) \neq (b, a)$:

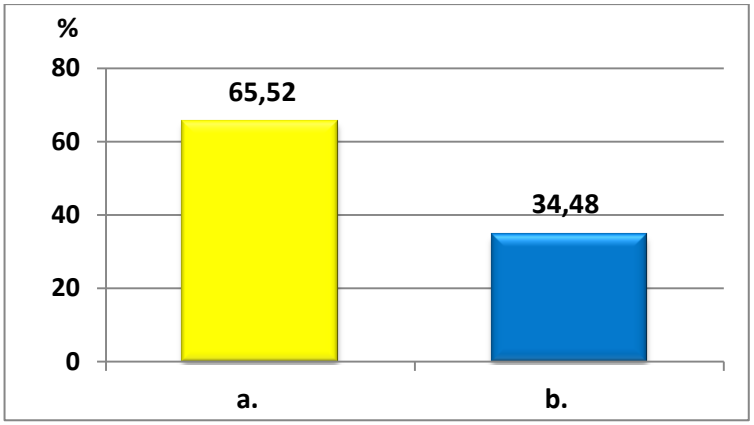
CUADRO 12

PARES ORDENADOS

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. Verdadero	19	65,52
b. Falso	10	34,48
TOTAL	29	100

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

GRÁFICO 12



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Según el Libro del Ministerio de Educación del noveno año de educación general básica (2010): En el sistema de coordenadas rectangulares hay una relación que establece que a cada par de números reales (x, y) le corresponde un punto definido del plano, y a cada punto del plano le corresponde un par único de coordenadas (x, y), los números de un par ordenado se denominan coordenadas del punto correspondiente. Así $a \neq b$, el par ordenado (a, b) no es el mismo que par ordenado (b, a).

Como se observa en el gráfico 12, el 65,52% de los estudiantes sí saben reconocer las componentes de un par ordenado.

El 34,48% de los estudiantes no saben reconocer las componentes de un par ordenado, al no saber reconocer las componentes de un par ordenado el alumno tiene dificultad al momento que se necesite representar dichos puntos en un sistema coordenado para que se nos facilite encontrar la ecuación de una recta y además para poderla graficar.

13. Pregunta.- Cualquier par ordenado de la forma $(a, 0)$ se ubica sobre el eje Y:

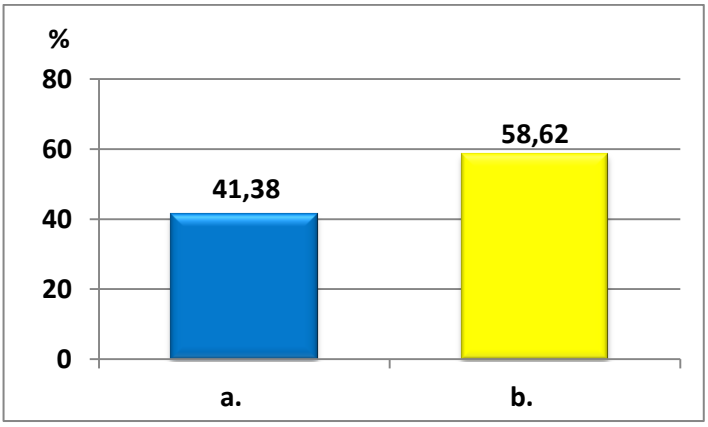
CUADRO 13

REPRESENTACIÓN DE UN PAR ORDENADO

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. Verdadero	12	41,38
b. Falso	17	58,62
TOTAL	29	100

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

GRÁFICO 13



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Según Carrasco (2012) un par ordenado (*x, y*) es un par ordenado cualquiera, *x* ≠ *y*, en donde x es el primer elemento llamado primera componente o abscisa y y es el segundo elemento llamado segunda componente o ordenada, es importante recordar que (*x, y*) ≠ (*y, x*). Es decir el orden de las componentes no puede ser cambiado. Estas componentes numéricas, se pueden graficar en los ejes cartesianos o plano cartesiano; la primera componente representa la abscisa y se ubica en el eje *x*; la segunda componente representa la ordenada y se ubica en el eje *y*.

El 58,62% de los estudiantes sí saben representar un par ordenado en un sistema coordenado.

El 41,38% de los estudiante no saben representar un par ordenado, esta dificultad que tienen los alumnos al momento de representar un par ordenado se debe a que el estudiantado no tiene un conocimiento duradero de años anteriores, además no saben reconocer las componentes de un par ordenado, y es por ello que tienen dificultad al momento de encontrar la ecuación de una recta.

14. Pregunta.- La longitud de un segmento es la distancia entre sus extremos:

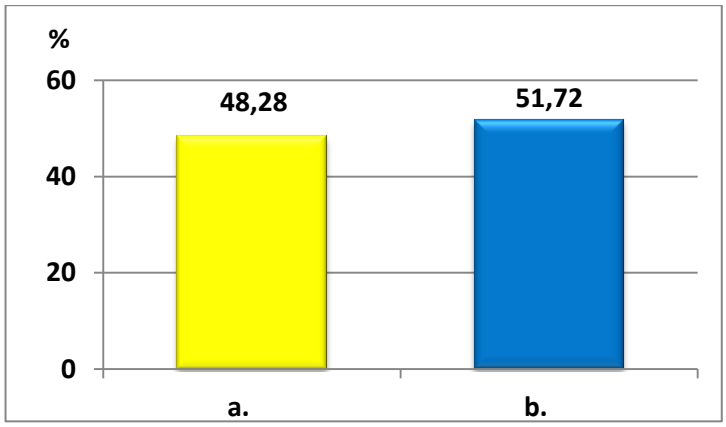
CUADRO 14

LONGITUD DE UN SEGMENTO

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. Verdadero	14	48,28
b. Falso	15	51,72
TOTAL	29	100

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

GRÁFICO 14



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Según Prieto, Herminio (2006) "Un segmento rectilíneo es una recta comprendida entre dos puntos llamados extremos" (p. 69).

Lehmann (1994) afirma:

> "La porción de una línea recta comprendida entre dos de sus puntos se llama segmento rectilíneo o simplemente segmento. Los dos puntos se llaman extremos del segmento. Así para la recta *l,* AB es un segmento cuyos extremos son *A* y *B*. La longitud del segmento AB se representa por $\overline{AB}$. (p. 1).

De acuerdo a los resultados obtenidos, el 48,28% de los estudiantes sí saben definir un segmento recto.

De la misma manera el 51,72% de los estudiantes no sabe la definición de un segmento rectilíneo, es por ello que tienen dificultad al momento de interpretar que es un segmento rectilíneo, ya que no tienen claro los fundamentos teóricos.

15. Pregunta.- Una recta vertical no tiene pendiente:

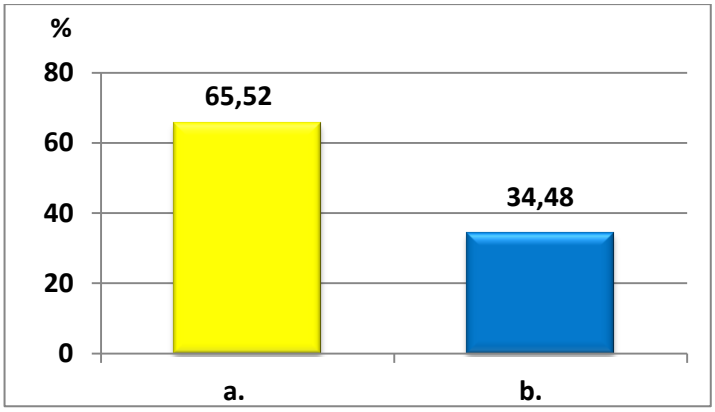
CUADRO 15

LA RECTA VERTICAL TIENE PENDIENTE

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. Verdadero	19	65,52
b. Falso	10	34,48
TOTAL	29	100

Fuente: Encuesta aplicada a los estudiantes del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

GRÁFICO 15



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Según Jiménez (2011), una recta es vertical, si todos los puntos de la recta tienen la misma primera coordenada, es decir la misma abscisa, entonces el denominador de la expresión anterior vale cero y por lo tanto, no puede evaluarse *m*, así que las rectas verticales no tienen pendiente.

De acuerdo a los resultados obtenidos, el 65,52% de los estudiantes sí tienen claro el concepto de pendiente y el de una línea vertical.

El 34,48% de los estudiantes no saben diferenciar cuando una recta no tiene pendiente por lo que podemos afirmar que los estudiantes no cuentan con un fundamento teórico duradero, ya que no saben retener un concepto, es decir que estudian solo para el momento.

Docente

16. Pregunta.- ¿Conoce usted la historia de la línea recta?

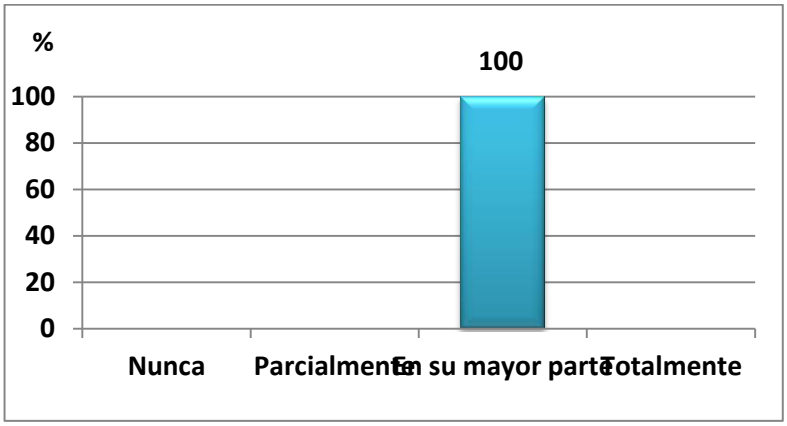
CUADRO 16

HISTORIA DE LA LÍNEA RECTA

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. Nunca	-	-
b. Parcialmente	-	-
c. En su mayor parte	1	100
d. Totalmente	-	-
TOTAL	1	100

Fuente: Encuesta aplicada al docente del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

GRÁFICO 16



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Las primeras definiciones de línea recta fueron propuestas por el matemático y geómetra griego Euclides (325 – 265 a.C.), siendo considerado el Padre de la Geometría. Posteriormente varios físicos y matemáticos como Platón (427 – 347), Leibniz (1646 – 1716), Legendre (1752 – 1833), Simpson (1710 – 1761), Fourier (1768 – 1830), Delboeuf (1831 – 1896), Duhamel, (1797 – 1872) continuaron con el estudio de la línea recta sin llegar a tener éxito; sin embargo el filósofo y matemático francés René Descartes en el

año 1637, fue quien fraguó una conexión entre la Geometría y el Algebra al demostrar cómo aplicar los métodos de una disciplina en la otra, es así que nace la Geometría Analítica y por ende la línea recta (Zapata, 2013).

Según los resultados obtenidos el docente de Matemática manifiesta que en un 100% conoce en su mayor parte la historia de la línea recta.

De acuerdo al resultado esperado el docente sí conoce en su mayor parte la historia de la línea recta, es decir que sí cuenta con un conocimiento científico, recalcando que sus estudiantes no conocen la historia de la línea recta por el poco interés que le prestan al estudio de la Matemática y en general el de la línea recta y además por la poca profundidad que se le da a la temática por el extenso contenido de acuerdo al nuevo sistema de bachillerato.

17. Pregunta.- Sus estudiantes cuentan con los conocimientos previos necesarios sobre el estudio de la línea recta:

CUADRO 17

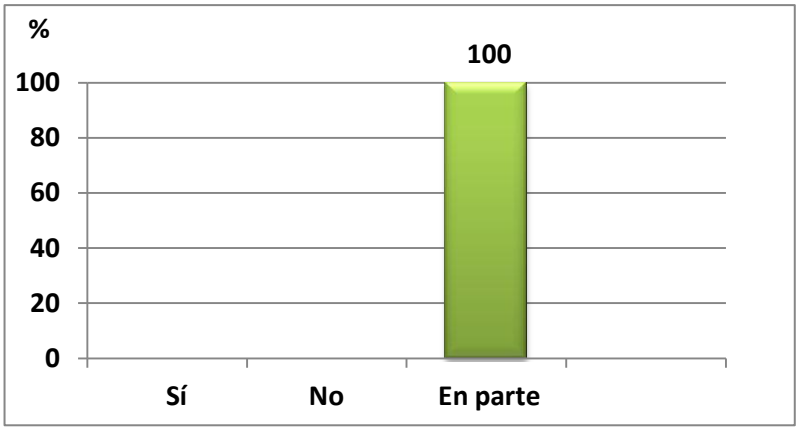
CONOCIMIENTOS PREVIOS PARA EL ESTUDIO DE LA LÍNEA RECTA

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. Sí	-	-
b. No	-	-
c. En parte	1	100
TOTAL	1	100

Fuente: Encuesta aplicada al docente del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

¿Por qué?.....

GRÁFICO 17



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Según Zabala (2005), para que se produzca el aprendizaje de un nuevo contenido el núcleo central de esta interpretación se sitúa en la capacidad de actualizar y utilizar del estudiante, o sea de sus esquemas de conocimientos. Proceso que se lleva a término al contrastar los conocimientos previos con el nuevo contenido, identificando similitudes y diferencias e integrándolos en sus esquemas y comprobando que el resultado posee una cierta coherencia. Los conocimientos previos son los que se relacionan con el sentido nuevo que se requiere entregar con los aprendizajes ya existentes, también se les consideran útil para la vida cotidiana y por lo tanto permite que el alumno aprenda de acuerdo a sus necesidades y así aplicar lo aprendido en nuevas situaciones.

Según los resultados obtenidos el docente de Matemática afirma que el 100% de los estudiantes cuentan en parte con conocimientos previos acerca de la línea recta, acepción de unos pocos estudiantes que sí tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio de la línea recta.

De acuerdo al resultado esperado la mayor parte del estudiantado no cuentan con las bases científicas pertinentes para asimilar el nuevo conocimiento sobre el aprendizaje de la línea recta es por ello que los educandos tienen dificultades al momento de unir los conocimientos previos

con el nuevo conocimiento para formar un aprendizaje significativo. Por otra parte, es importante tener en cuenta que aunque los alumnos tengan unos conocimientos previos suficientes para abordar el nuevo contenido, el hecho de que posean estos conocimientos no asegura que los tengan presentes en todo momento a lo largo de su proceso de aprendizaje. Además es muy importante que los alumnos tengan unos conocimientos previos pertinentes que puedan utilizar en el momento adecuado para establecer relaciones con el nuevo contenido, además la actualización y la disponibilidad de los conocimientos previos que posee el alumno es una condición necesaria para que puedan llevar a cabo un aprendizaje lo más significativo posible.

18. Pregunta.- El proceso de enseñanza – aprendizaje que emplea en sus estudiantes los hace desde una perspectiva.

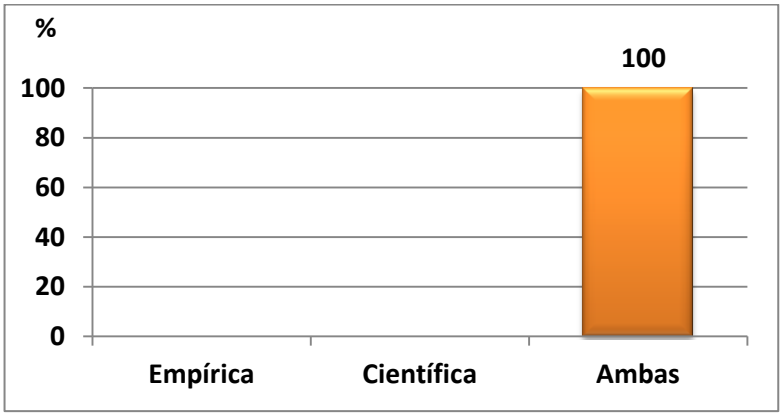
CUADRO 18

DE QUE MANERA MANEJA EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. Empírica	-	-
b. Científica	-	-
c. Ambas	1	100
TOTAL	1	100

Fuente: Encuesta aplicada al docente del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

GRÁFICO 18



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Según el Colectivo de Autores (2005) define, como proceso de enseñanza – aprendizaje, al movimiento de la actividad cognoscitiva de los alumnos bajo la dirección del maestro, hacia el dominio de los conocimientos, las habilidades, los hábitos y la formación de una concepción científica del mundo. Se considera que en este proceso existe una relación dialéctica entre profesor y estudiante, los cuales se diferencian por sus funciones; el profesor debe estimular, dirigir y controlar el aprendizaje de manera tal que el alumno sea participante activo, consciente en dicho proceso, o sea, "enseñar" y la actividad del alumno es "aprender". El estudio de la enseñanza se realiza desde distintos puntos de vista: el deductivo filosófico, que se preocupa por la consideración y demostración racional de lo que debería ser la enseñanza; y el empírico, que analiza lo que ocurre en unos determinados procesos.

De acuerdo al resultado obtenido el docente de Matemática en un 100% lleva a cabo el proceso de enseñanza aprendizaje desde una perspectiva empírica y científica ya que entre las dos se complementan la una con la otra.

El docente de Matemática manifiesta que el proceso de enseñanza aprendizaje se concibe como el espacio en el cual el principal protagonista es el alumno y el profesor cumple con una función de facilitador de los procesos de aprendizaje. Son los alumnos quiénes construyen el conocimiento a partir de leer, de aportar sus experiencias y reflexionar sobre ellas, de intercambiar sus puntos de vista con sus compañeros y el profesor. En este espacio, se pretende que el alumno disfrute el aprendizaje y se comprometa con un aprendizaje de por vida y a su vez lograr una autonomía individual en el estudiante para que se sienta responsable al momento de tomar sus propias decisiones.

19. Pregunta.- Escriba el número de estudiantes que poseen las siguientes calificaciones:

CUADRO 19

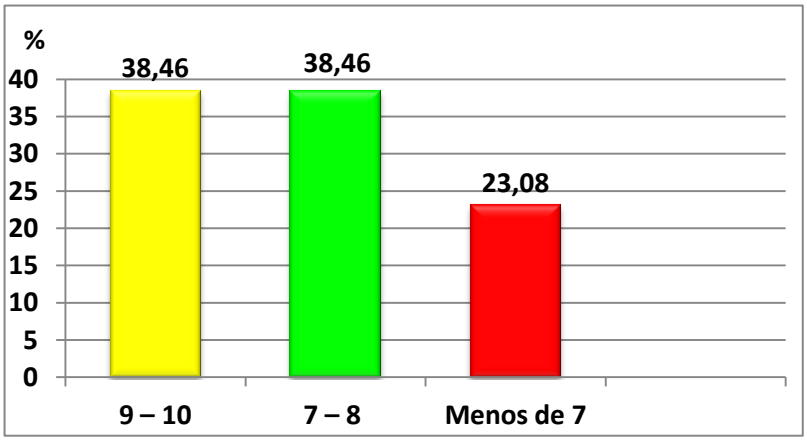
RENDIMIENTO ACADÉMICO

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. 9 – 10	10	38,46
b. 7 – 8	10	38,46
c. Menos de 7	6	23,08
TOTAL	26	100

Fuente: Encuesta aplicada al docente del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

¿Por qué?.....

GRÁFICO 19



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Según Tejedor (1998) afirma, el rendimiento académico no es un concepto fácil de definir unívocamente y sobre él se han realizado muchas interpretaciones. El concepto de rendimiento académico es multidimensional, dada la pluralidad de objetivos y logros perseguidos por la acción educativa;

otros como De la Orden (1985), llegan a firmar que para hablar de rendimiento académico debemos antes identificar qué es el producto educativo, con toda la complejidad y polémica que esto conlleva. El concepto de rendimiento a la certificación académica (calificaciones). Es decir nos orientamos, por un lado, hacia criterios de definiciones operativas, que habitualmente identifican el rendimiento académico con calificaciones, pruebas objetivas o notas.

De acuerdo al resultado obtenido por parte del docente el 34,46% de los estudiantes tienen un rendimiento académico entre 9 y 10, de igual manera con el mismo porcentaje tienen un rendimiento académico entre 7 y 8.

Según la información obtenida por parte del docente el 23,08% de los estudiantes tienen un rendimiento académico menos de 7, la cual está por debajo del rango de la nota base para aprobar el año, esto principalmente se debe a que el estudiante no pone interés al momento de cumplir con trabajos autónomos designados al estudiante para que practique, ya que la mayoría de la juventud actual busca la facilidad que brinda la tecnología en cuanto a información para copiar el procedimiento de muchos ejercicios.

20. Pregunta.- Ecuación general de la línea recta es:

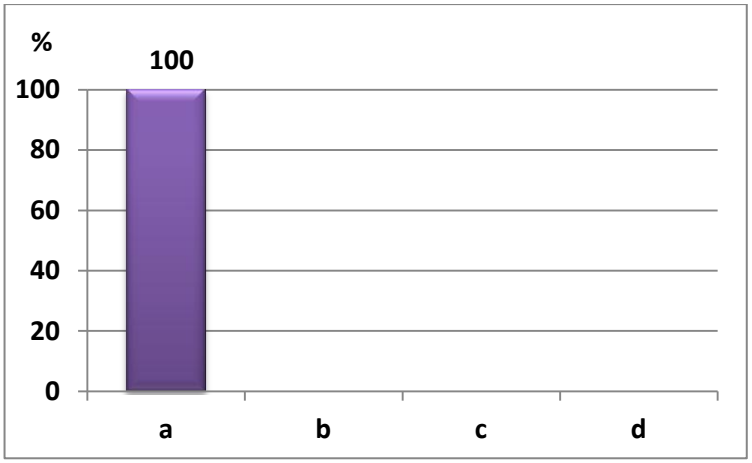
CUADRO 20

ECUACIÓN GENERAL DE LA LÍNEA RECTA

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$	**1**	**100**
b. $\boldsymbol{x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0}$	**-**	**-**
c. $\boldsymbol{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$	**-**	**-**
d. $\boldsymbol{y = mx + b}$	**-**	**-**
TOTAL	**1**	**100**

Fuente: Encuesta aplicada al docente del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

GRÁFICO 20



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN:

Según Oteyza (2011) afirma:

> La forma de la ecuación de la recta que cubre todas las rectas ya sean estas rectas verticales como a las que no lo son. Esta forma es la ecuación general de la recta y se obtiene pasando todos los términos de la ecuación a un miembro de manera que este quede igualado a cero, y son de la forma $Ax + By + C = 0$. (p. 53)

Según el resultado obtenido en un 100% el docente sí conoce la ecuación general de la línea recta.

El docente sí conoce la ecuación general de la línea recta por la cual puedo afirmar que el docente sí cuenta con un conocimiento científico pertinente, pero cabe recalcar que esto no se ve reflejado en unos pocos estudiantes por cuanto el tiempo designado a esta asignatura de acuerdo al nuevo sistema de bachillerato no permite trabajar de una forma pertinente por la extensa temática, y además por cuanto el estudiantado no cuenta con una capacidad mental ágil para asimilar el nuevo conocimiento por el poco interés que le brindan a la materia y por los escasos conocimientos previos que tiene el alumno.

Padres de Familia

21. Pregunta.- Su hijo asiste regularmente a clases:

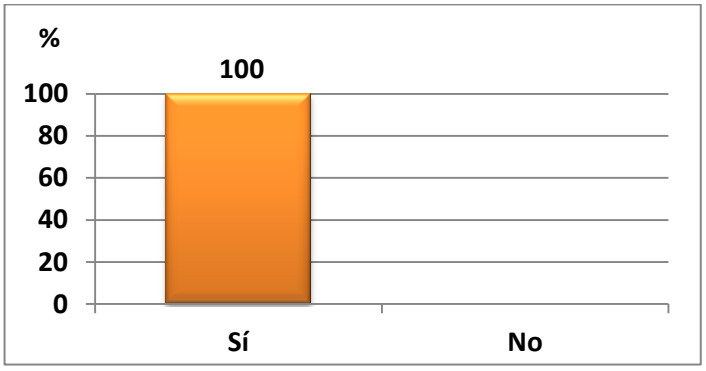
CUADRO 21

ASISTENCIA A CLASES

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. Sí	25	100
b. No	-	-
TOTAL	25	100

Fuente: Encuesta aplicada a los padres de familia de los estudiantes del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

GRÁFICO 21



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Anónimo (2009), el estudiante debe asistir a clases con regularidad, con el propósito de sacarle el máximo provecho a la enseñanza que brinda el docente. La asistencia a clases es un elemento esencial dentro del proceso de aprendizaje de la asignatura, junto con la participación activa del alumno en su desarrollo y el trabajo continuo. La configuración de la asignatura necesita la asistencia del alumno y la participación en clase para que el alumno pueda alcanzar los objetivos y competencias de la asignatura. Sólo se debe faltar cuando hay una causa justificada, todo lo que se aprenda en clase es algo que uno lleva adelantado y que no tendrá que repetir en casa.

La totalidad de los padres de familia afirman que sus hijos asisten regularmente a clases.

Los padres de familia afirman que sus hijos asisten regularmente a clases, pero cuando los padres se acercan a la institución a averiguar que como van sus hijos en el estudio, se llevan una gran impresión al darse cuenta que sus representados no han asistido a clases regularmente, muchos de ellos no entran a clases por muchos motivos los mismos que pueden ser porque no tienen la tarea o simplemente porque son vulnerables a las distracciones que la sociedad presenta a los mismos. Pero al final es precisamente la no asistencia a clase la que origina una importante pérdida de tiempo ya que hay que pedir los apuntes a algún compañero, fotocopiarlos, entenderlos, resolver las dudas, etc. Todo ello lleva mucho más tiempo que tener uno sus propios apuntes y haber oído la explicación del profesor.

22. Pregunta.- Su representado es responsable y cumplidor con las obligaciones del colegio:

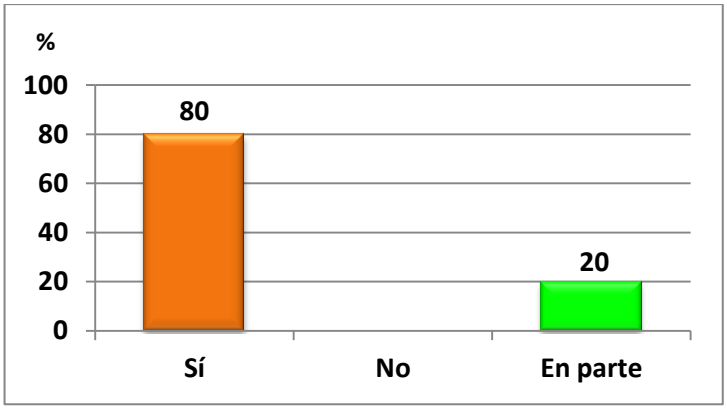
CUADRO 22

RESPONSABILIDAD DE SU REPRESENTADO

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. Sí	20	80
b. No	-	-
c. En parte	5	20
TOTAL	25	100

Fuente: Encuesta aplicada a los padres de familia de los estudiantes del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

GRÁFICO 22



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Según Toledo (2011), los estudiantes son vulnerables a la crisis de valores, y la responsabilidad en el cumplimiento de sus obligaciones, siendo uno de los aspectos que afectan a la formación integral del alumno, influye de manera negativa en su actuación diaria por lo que los educadores tienen que prestar especial atención a este valor pues como se dan en forma de sistema se afectan los demás. Responsable es aquella persona que libre y conscientemente realiza una obligación sin ordenársele siempre, tomando conciencia de sus actos y asumir las condiciones de ellos, para que exista una verdadera responsabilidad hay que actuar con libertad y no sentirse vigilado si se le piden cuenta de sus actos. La responsabilidad es un valor que por sí solo lleva implícito los demás valores. La responsabilidad comienza con uno mismo, con lo que se cree, con lo que se piensa, con los compromisos y metas que se marcan. El conocimiento de los indicadores de funcionamiento del valor de la responsabilidad tiene importancia no sólo para el diagnóstico de su nivel de desarrollo, sino también para su educación. Recordemos que la responsabilidad es la libertad del sujeto para decidir y actuar asumiendo las consecuencias que se deriven de las acciones. Es considerado un rasgo distintivo del ser humano que está estrechamente relacionado con su firmeza.

De acuerdo a los resultados obtenidos, el 80% de los padres de familia afirman que sus hijos sí son responsables en el cumplimiento de las obligaciones de colegio.

Una mínima parte de los mismos, es decir el 20% de los padres afirman que sus hijos son responsables en parte con las obligaciones del colegio, y ello se ve reflejado en el rendimiento académico de sus hijos ya que no cumplen sus obligaciones como estudiantes, ya que la responsabilidad es asumir las consecuencias de actos intencionados, decisiones que tome o acepte y de los no intencionados, de tal modo que los demás queden beneficiados o por lo menos no perjudicados.

23. Pregunta: Su hijo presenta alguna discapacidad física o mental:

CUADRO 23

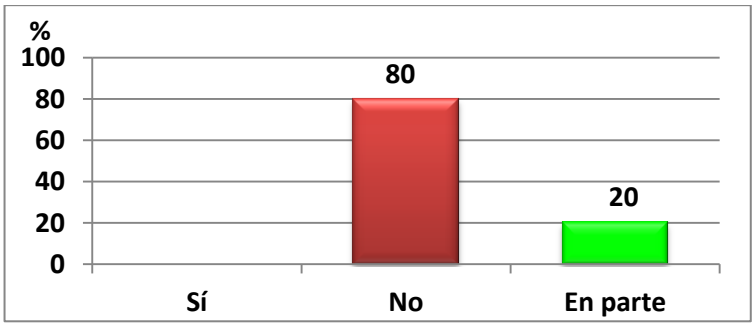
DISCAPACIDAD FÍSICA O MENTAL

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. Sí	0	0
b. No	20	80
c. En parte	5	20
TOTAL	25	100

Fuente: Encuesta aplicada a los padres de familia de los estudiantes del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

¿Cuál?.....

GRÁFICO 23



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

De acuerdo a la Hermandad Madrileña (2013) la discapacidad física o intelectual, se considera a cualquier alteración de las funciones intelectuales o físicas de la persona que le impide llevar a cabo algunas de las actividades consideradas normales. Los términos discapacidad y discapacitado no están libres de polémica, pues hay quien los ve como peyorativos o discriminatorios. Por ello algunos especialistas recomiendan usar términos como personas con diversidad funcional, dando a entender que un discapacitado no está impedido para realizar algunas actividades, sino que tiene que realizarlas por otros medios distintos a los habituales. Así, por ejemplo, un invidente no está completamente impedido para leer un libro, sino que para que pueda hacerlo el libro tiene que estar escrito en braille.

De acuerdo a los resultados obtenidos el 80% de los padres de familia afirman que sus hijos no tienen ninguna discapacidad física.

Según los resultados obtenidos el 20% de los padres de familia afirman que sus hijos cuentan en parte con una discapacidad, pero cabe recalcar que esas discapacidades es la falta de memoria, la poca retención de información que tienen sus hijos siendo un problema que afecta al rendimiento académico de los alumnos.

24. Pregunta: Usted cada qué tiempo se acerca a la institución educativa a preguntar el rendimiento académico de su representado:

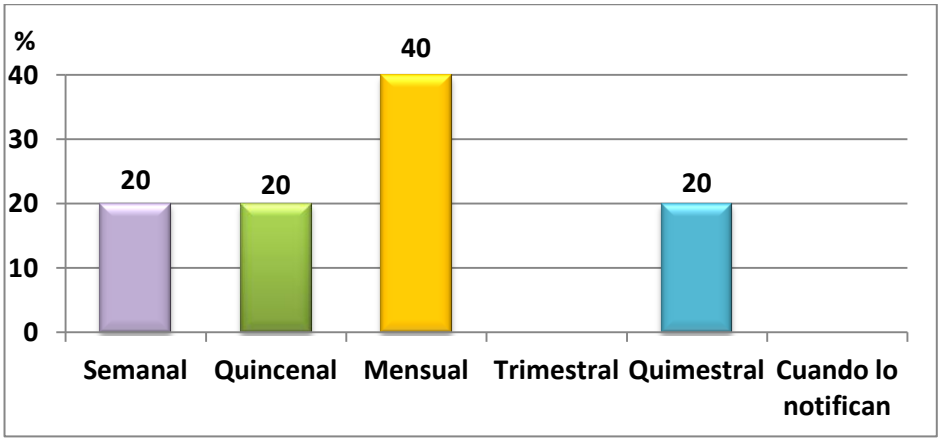
CUADRO 24

RENDIMIENTO ACADEMICO DE SU REPRESENTADO

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. Semanal	5	20
b. Quincenal	5	20
c. Mensual	10	40
d. Trimestral	-	-
e. Quimestral	5	20
f. Cuando lo notifican	0	0
TOTAL	25	100

Fuente: Encuesta aplicada a los padres de familia de los estudiantes del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

GRÁFICO 24



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Según Tejedor (1998), el rendimiento académico no es un concepto fácil de definir unívocamente y sobre él se han realizado muchas interpretaciones. El concepto de rendimiento académico es multidimensional, dada la pluralidad

de objetivos y logros perseguidos por la acción educativa; otros como De la Orden (1985), llegan a firmar que para hablar de rendimiento académico debemos antes identificar qué es el producto educativo, con toda la complejidad y polémica que esto conlleva. El concepto de rendimiento a la certificación académica (calificaciones).

De acuerdo al resultado obtenido el 40% de los padres de familia se acercan a la institución mensualmente para averiguar sobre las actividades que realizan sus hijos.

Según la información obtenida por parte de los padres de familia el 20% de los mismos se acercan a la institución cada semana, con el mismo porcentaje se acercan quincenal y quimestral a la institución educativa para averiguar sobre las actividades académicas que sus hijos realizan dentro de la institución. Cabe recalcar que este acercamiento de los padres de familia con la institución permite que los representantes monitoreen constantemente a sus hijos de las actividades y responsabilidades que tienen sus representados con la institución educativa.

25. Pregunta: Cuál es la relación que usted tiene con su hijo:

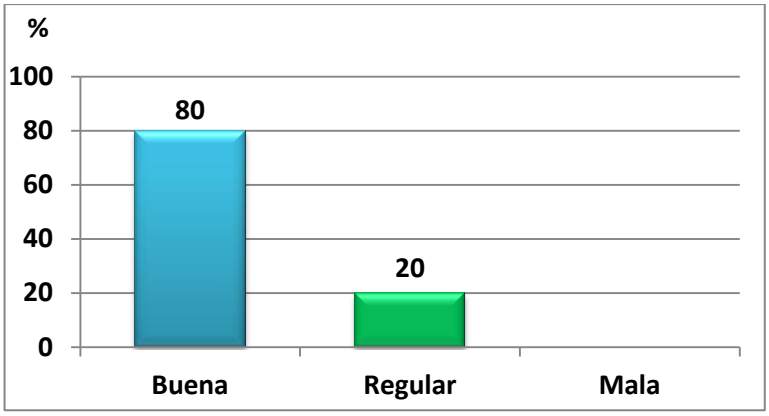
CUADRO 25

RELACIÓN CON SU HIJO

INDICADORES	FRECUENCIA	%
a. Buena	20	80
b. Regular	5	20
c. Mala	-	-
TOTAL	25	100

Fuente: Encuesta aplicada a los padres de familia de los estudiantes del primer año BGU.
Responsable: Luis Vinicio Calva Alvarez

GRÁFICO 25



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Una buena relación entre padres e hijos consiste en respeto, comprensión, confianza y preocupación. Podemos construir una buena relación con nuestros hijos adolescentes pasando más tiempo juntos, cumpliendo promesas, bromeando y valorando sus esfuerzos y puntos fuertes. Los adolescentes que tienen una buena relación con sus padres tienen menos probabilidades de correr riesgos. Criar hijos adolescentes conlleva satisfacciones y desafíos. A medida que nuestros hijos crecen, adquieren una gran independencia. Eso es una parte normal y natural del crecimiento. Pero aunque esta independencia aumente, debemos mantener nuestra relación con ellos tan íntima como cuando eran pequeños. Todavía necesitan que los amemos, que los orientemos y que nos divirtamos con ellos. Además, podemos sentir mucha satisfacción y felicidad a través de nuestra relación con ellos.

De acuerdo a los resultados obtenidos el 80% de los padres de familia tiene buena relación con sus hijos.

Mientras tanto el 20% de los padres de familia tienen una relación regular con sus hijos, esto se debe por el poco tiempo que dedican a sus hijos a consecuencia del trabajo que realizan para cubrir los gastos que en la familia

se da, y además por lo que muchos de los mismos se encuentran en el extranjero a consecuencia de la migración que existe en nuestro país por la falta de fuentes de empleo. Siendo este un problema fundamental de la educación ecuatoriana, la falta de afecto de los padres hacia los hijos, ya que este afecto paternal afecta a la autoestima del alumnado buscando refugio en actividades de distracción que se presentan en la sociedad que los rodea.

- **Resultados de la aplicación del proyector digital como recurso didáctico.**

TALLER 1: Uso del proyector digital como recurso didáctico para el aprendizaje del sistema de coordenadas.

Datos informativos:

- **Fecha:** 05 de junio del 2014
- **Periodo:** 11h55 a 13h15
- **Número de estudiantes:** 26
- **Coordinador investigador:** Luis Vinicio Calva Alvarez
- **Recursos:** Proyector digital, computadora, material permanente.

VALORACIÓN DE LA EFECTIVIDAD DEL PROYECTOR DIGITAL COMO RECURSO DIDÁCTICO

Nº	X (pre test)	Y (pos test)	$D = \|Y - X\|$	ORDEN ASCENDENTE	R +	R -
1	3,75	7,75	4	3	5	0
2	6,00	10,00	4	3,5	5	0
3	5,00	8,75	3,75	3,75	3	0
4	2,50	7,00	4,5	4	9,5	0
5	1,75	7,00	5,25	4	16,5	0

6	0,50	7,25	6,75	4	24,5	0
7	2,25	9,00	6,75	4,25	24,5	0
8	4,75	8,75	4	4,25	5	0
9	4,25	10,00	5,75	4,5	19	0
10	3,25	7,50	4,25	4,5	7,5	0
11	2,75	8,25	5,5	4,75	18	0
12	2,00	8,00	6	4,75	20,5	0
13	3,75	8,25	4,5	4,75	9,5	0
14	4,50	8,75	4,25	5	7,5	0
15	3,00	8,25	5,25	5	16,5	0
16	1,50	6,25	4,75	5,25	12	0
17	3,25	9,50	6,25	5,25	22	0
18	4,50	7,50	3	5,5	1	0
19	3,25	8,25	5	5,75	14,5	0
20	2,00	8,75	6,75	6	24,5	0
21	3,00	7,75	4,75	6	12	0
22	4,00	10,00	6	6,25	20,5	0
23	3,25	10,00	6,75	6,75	24,5	0
24	3,50	8,50	5	6,75	14,5	0
25	3,75	7,25	3,5	6,75	2	0
26	3,25	8,00	4,75	6,75	12	0
				TOTAL	$\sum R+= 351$	$\sum R-= 0$

Cálculo de:

$$\mathbf{W} = \left(\sum \mathbf{R}+\right) - \left(\sum \mathbf{R}-\right)$$

$$\mathrm{W} = 351 - 0$$

$$\mathbf{W = 351}$$

La alternativa no funciona: Las puntuaciones X son iguales o inferiores a las puntuaciones Y **(X = Y).**

La alternativa funciona: Las puntuaciones Y son iguales o inferiores a las puntuaciones X **(Y > X).**

$$\boldsymbol{\mu_W = W^+ - \frac{N(N+1)}{4}}$$

$$\mu_W = 351 - \frac{26(26+1)}{4}$$

$$\mu_W = 351 - 175{,}5$$

$$\boldsymbol{\mu_W = 175{,}5}$$

Dónde:

$\boldsymbol{\mu_W}$ = Media

$\mathbf{N}$ = Tamaño de la muestra

$\mathbf{W^+}$ = Valor estadístico de Wilcoxon

Para el cálculo de la desviación estándar o cálculo del error estándar ($\boldsymbol{\sigma_W}$) se utiliza:

$$\boldsymbol{\sigma_W = \sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}}$$

$$\sigma_W = \sqrt{\frac{26(26+1)(2(26)+1)}{24}}$$

$$\sigma_W = \sqrt{\frac{37206}{24}}$$

$$\sigma_W = \sqrt{1550{,}25}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W = 39{,}37}$$

Mientras la clasificación Z se calcula por medio de la fórmula:

$$\boldsymbol{Z = \frac{W - \mu_W}{\sigma_W}}$$

$$Z = \frac{351 - 175{,}5}{39{,}37}$$

$$\boldsymbol{Z = 4{,}46}$$

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Un proyector digital no solamente es utilizado en colegios y empresas sino que también puede ser utilizado en el hogar como forma de entretenimiento. En los colegios es utilizado para proyecciones académicas al igual que las empresas y las universidades.

> El proyector es un medio visual fijo, que utiliza materiales que permiten el paso de la luz, o sea, transparencias. Por este motivo, la intensidad luminosa sobre la pantalla es suficientemente grande como para que no haya necesidad de oscurecer la habitación. Permite al maestro el contacto visual con sus alumnos y el control de la clase durante la proyección. Este aparato tiene una fuente de luz debajo de la plataforma que la atraviesa para proyectar la imagen puesta sobre la pantalla. (Adame, 2009, p. 15).

La Regla de decisión establece:

Si Z es mayor o igual a 1,96 (que es el 95 % bajo la curva normal) se rechaza que la alternativa no funcional (el nivel de significancia es 0,05) caso contrario se la acepta.

En conclusión:

Como el valor estadístico Z obtenido equivale a 4,46 mayor que 1,96 se verifica que el proyector digital, utilizado correctamente sirven como recurso metodológico para potenciar el aprendizaje del sistema de coordenadas, de tal manera que la Prueba Signo Rango de Wilcoxon establece la efectividad de la alternativa utilizada.

TALLER 2: Uso del proyector digital como recurso didáctico para el aprendizaje de la línea recta.

Datos informativos:

- **Fecha:** 06 de junio del 2014
- **Periodo:** 07h15 a 08h35
- **Número de estudiantes:** 26
- **Coordinador investigador:** Luis Vinicio Calva Alvarez
- **Recursos:** Proyector digital, computadora, material permanente.

VALORACIÓN DE LA EFECTIVIDAD DEL PROYECTOR DIGITAL COMO RECURSO DIDÁCTICO

Nº	X (pre test)	Y (pos test)	$D = \|Y - X\|$	ORDEN ASCENDENTE	R +	R -
1	2,0	8,0	6	3,5	15	0
2	4,0	10,0	6	4,5	15	0
3	2,0	9,0	7	4,5	24	0
4	1,5	7,5	6	5	15	0
5	2,0	5,5	3,5	5	1	0
6	1,0	6,0	5	5	6	0
7	3,5	9,5	6	5	15	0
8	2,5	9,0	6,5	5	21,5	0
9	4,0	10,0	6	5,5	15	0
10	2,0	8,0	6	5,5	15	0
11	2,0	7,0	5	6	6	0
12	1,5	8,0	6,5	6	21,5	0
13	2,0	7,5	5,5	6	9,5	0
14	2,5	9,0	6,5	6	21,5	0
15	2,0	8,0	6	6	15	0
16	1,5	6,5	5	6	6	0
17	3,5	10,0	6,5	6	21,5	0
18	1,0	8,5	7,5	6	25,5	0
19	2,5	7,0	4,5	6	2,5	0
20	3,5	9,0	5,5	6,5	9,5	0

21	3,0	7,5	4,5	6,5	2,5	0
22	4,0	10,0	6	6,5	15	0
23	2,5	10,0	7,5	6,5	25,5	0
24	3,0	9,0	6	7	15	0
25	2,5	7,5	5	7,5	6	0
26	3,0	8,0	5	7,5	6	0
				TOTAL	$\sum R+= 351$	$\sum R-= 0$

Cálculo de:

$$\mathbf{W} = \left(\sum \mathbf{R}+\right) - \left(\sum \mathbf{R}-\right)$$

$$\mathrm{W} = 351 - 0$$

$$\mathbf{W = 351}$$

La alternativa no funciona: Las puntuaciones X son iguales o inferiores a las puntuaciones Y **(X = Y).**

La alternativa funciona: Las puntuaciones Y son iguales o inferiores a las puntuaciones X **(Y > X).**

$$\boldsymbol{\mu_W} = \mathbf{W}^+ - \frac{\mathbf{N(N+1)}}{\mathbf{4}}$$

$$\mu_W = 351 - \frac{26(26+1)}{4}$$

$$\mu_W = 351 - 175{,}5$$

$$\boldsymbol{\mu_W = 175,5}$$

Dónde:

$\boldsymbol{\mu_W}$ = Media

$\mathbf{N}$ = Tamaño de la muestra

$\mathbf{W}^+$ = Valor estadístico de Wilcoxon

Para el cálculo de la desviación estándar o cálculo del error estándar ($\boldsymbol{\sigma_W}$) se utiliza:

$$\boldsymbol{\sigma_W = \sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}}$$

$$\sigma_W = \sqrt{\frac{26(26+1)(2(26)+1)}{24}}$$

$$\sigma_W = \sqrt{\frac{37206}{24}}$$

$$\sigma_W = \sqrt{1550{,}25}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W = 39{,}37}$$

Mientras la clasificación Z se calcula por medio de la fórmula:

$$\boldsymbol{Z = \frac{W - \mu_W}{\sigma_W}}$$

$$Z = \frac{351 - 175{,}5}{39{,}37}$$

$$\boldsymbol{Z = 4{,}46}$$

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Un proyector digital no solamente es utilizado en colegios y empresas sino que también puede ser utilizado en el hogar como forma de entretenimiento. En los colegios es utilizado para proyecciones académicas al igual que las empresas y las universidades.

El proyector es un medio visual fijo, que utiliza materiales que permiten el paso de la luz, o sea, transparencias. Por este motivo, la intensidad

> luminosa sobre la pantalla es suficientemente grande como para que no haya necesidad de oscurecer la habitación. Permite al maestro el contacto visual con sus alumnos y el control de la clase durante la proyección. Este aparato tiene una fuente de luz debajo de la plataforma que la atraviesa para proyectar la imagen puesta sobre la pantalla. (Adame, 2009, p. 15).

La Regla de decisión establece:

Si Z es mayor o igual a 1,96 (que es el 95 % bajo la curva normal) se rechaza que la alternativa no funcional (el nivel de significancia es 0,05) caso contrario se la acepta.

En conclusión:

Como el valor estadístico Z obtenido equivale a 4,46 mayor que 1,96 se verifica que el proyector digital, utilizado correctamente sirve como recurso metodológico para potenciar el aprendizaje de la línea recta, de tal manera que la Prueba Signo Rango de Wilcoxon establece la efectividad de la alternativa utilizada.

g. DISCUSIÓN

Objetivo específico 2: Diagnosticar las dificultades, obstáculos, obsolescencias y necesidades que se presentan en el aprendizaje de la línea recta.

DIAGNÓSTICO DEL APRENDIZAJE DE LA LÍNEA RECTA

Inf.	CRITERIO	INDICADORES EN SITUACIÓN NEGATIVA			INDICADORES EN SITUACIÓN POSITIVA		
		Deficiencias	Obsolescencias	Necesidades	Teneres	Satisfactores	Innovaciones
ESTUDIANTES	HISTORIA DE LA LÍNEA RECTA	0 %	0 %	37,93 %	62,07 %	0 %	0 %
	SEGMENTO RECTO	86,21 %	0 %	0 %	13,79 %	0 %	0 %
	FÓRMULA PARA CALCULAR LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS	17,24 %	0 %	0 %	82,76	0 %	0 %
	FÓRMULA DE LA PENDIENTE	0 %	0 %	41,38 %	58,62 %	0 %	0 %
	LÍNEA RECTA	0 %	65,52 %	0 %	34,48 %	0 %	0 %
	ECUACIÓN DE UNA LÍNEA RECTA	27,59 %	0 %	0 %	72,41 %	0 %	0 %
	ECUACIÓN GENERAL DE LA LÍNEA RECTA	0 %	0 %	65,52 %	0 %	34,48 %	0 %
	ECUACIÓN NORMAL DE LA LÍNEA RECTA	0 %	0 %	100 %	0 %	0 %	0 %
	CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE DOS RECTAS SEAN PARALELAS	0 %	28,48 %	0 %	0 %	0 %	65,52 %
	CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE DOS RECTAS SEAN PERPENDICULARES	0 %	72,41 %	0 %	0 %	0 %	34,48 %
	LA PENDIENTE ES LA TANGENTE DEL ÁNGULO DE INQUINACIÓN DE LA LÍNEA	65,52 %	0 %	0 %	34,48 %	0 %	0 %

	RECTA						
	PARES ORDENADOS	34,48 %	0 %	0 %	65,52 %	0 %	0 %
	REPRESENTACIÓN DE UN PAR ORDENADO	41,38 %	0 %	0 %	58,62 %	0 %	0 %
	LONGITUD DE UN SEGMENTO	0 %	0 %	51,72 %	48,28 %	0 %	0 %
	LA RECTA VERTICAL TIENE PENDIENTE	0 %	34,48 %	0 %	65,52 %	0 %	0 %
DOCENTE	HISTORIA DE LA LÍNEA RECTA	0 %	0 %	0 %	100 %	0 %	0 %
	CONOCIMIENTOS PREVIOS PARA EL ESTUDIO DE LA LÍNEA RECTA	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	100 %
	DE QUE MANERA MANEJA EL PROCESO ENSEÑANZA – APRENDIZAJE	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	100 %
	RENDIMIENTO ACADÉMICO	0 %	0 %	23,08 %	0 %	76,92 %	0 %
	ECUACIÓN GENERAL DE LA LÍNEA RECTA	0 %	0 %	0 %	0 %	100 %	0 %
PADRES DE FAMILIA	ASISTENCIA A CLASES	0 %	0 %	0 %	0 %	100%	0 %
	RESPONSABILIDAD DE SU REPRESENTADO	0 %	0 %	20 %	0 %	80 %	0 %
	DISCAPACIDAD FÍSICA O INTELECTUAL	20 %	0 %	0 %	0 %	80%	0 %
	RENDIMIENTO ACADEMICO DE SU REPRESENTADO	0 %	0 %	80 %	0 %	20 %	0 %
	RELACIÓN CON SU HIJO	0 %	0 %	20 %	0 %	80 %	0 %

El diagnóstico del aprendizaje de la línea recta establece que en el primer año de bachillerato general unificado se presentan deficiencias, obsolescencias y necesidades si comparamos con la definición moderna del aprendizaje que lo plantea:

- Aprendizaje Significativo

De acuerdo a del Prado (2011):

> El concepto de aprendizaje significativo se debe al psicólogo cognitivo David Paul Ausubel. Por aprendizaje significativo se entiende que: para aprender un concepto, tiene que haber inicialmente una cantidad básica de información acerca de él, que actúa como material de fondo para la nueva información.

Según Ausubel (1986), los conocimientos no se encuentran ubicados arbitrariamente en el intelecto humano. En la mente del hombre hay una red orgánica de ideas, conceptos, relaciones, informaciones, vinculadas entre sí. Cuando llega una nueva información, ésta puede ser asimilada en la medida que se ajuste bien a la estructura conceptual preexistente, la cual, sin embargo, resultará modificada como resultado del proceso de asimilación.

Las Características del aprendizaje significativo de acuerdo a Wikipedia (2012):

1. Los conocimientos previos han de estar relacionados con aquellos que se quieren adquirir de manera que funcionen como base o punto de apoyo para la adquisición de conocimientos nuevos.
2. Es necesario desarrollar un amplio conocimiento meta cognitivo para integrar y organizar los nuevos conocimientos.
3. Es necesario que la nueva información se incorpore a la estructura mental y pase a formar parte de la memoria comprensiva.
4. Aprendizaje significativo y aprendizaje mecanicista no son dos tipos opuestos de aprendizaje, sino que se complementan durante el proceso de enseñanza. Pueden ocurrir simultáneamente en la misma tarea de aprendizaje. Por ejemplo, la memorización de las tablas de multiplicar es

necesaria y formaría parte del aprendizaje mecanicista, sin embargo su uso en la resolución de problemas correspondería al aprendizaje significativo.

5. Requiere una participación activa del discente donde la atención se centra en el cómo se adquieren los aprendizajes.
6. Se pretende potenciar que el discente construya su propio aprendizaje, llevándolo hacia la autonomía a través de un proceso de andamiaje. La intención última de este aprendizaje es conseguir que el discente adquiera la competencia de aprender a aprender.
7. El aprendizaje significativo puede producirse mediante la exposición de los contenidos por parte del docente o por descubrimiento del discente.
8. El aprendizaje significativo utiliza los conocimientos previos para mediante comparación o intercalación con los nuevos conocimientos armar un nuevo conjunto de conocimientos.

El aprendizaje significativo trata de la asimilación y acomodación de los conceptos. Se trata de un proceso de articulación e integración de significados. En virtud de la propagación de la activación a otros conceptos de la estructura jerárquica o red conceptual, esta puede modificarse en algún grado, generalmente en sentido de expansión, reajuste o reestructuración cognitiva, constituyendo un enriquecimiento de la estructura de conocimiento del aprendizaje.

Las diferentes relaciones que se establecen en el nuevo conocimiento y los ya existentes en la estructura cognitiva del aprendizaje, entrañan la emergencia del significado y la comprensión.

Aprendizaje significativo es aquel que:

- Es permanente: El aprendizaje que adquirimos es a largo plazo.
- Produce un cambio cognitivo, se pasa de una situación de no saber a saber.
- Está basado sobre la experiencia, depende de los conocimientos previos.

- Los aspectos que debe contener el aprendizaje son para Wikipedia (2012) son:

  - ✓ “Proporcionar retroalimentación productiva, para guiar al aprendiz e infundirle una motivación intrínseca.
  - ✓ Proporcionar familiaridad.
  - ✓ Explicar mediante ejemplos.
  - ✓ Guiar el proceso cognitivo.
  - ✓ Fomentar estrategias de aprendizaje.
  - ✓ Crear un aprendizaje situado cognitivo”.

Condiciones necesarias para que se produzca un aprendizaje significativo:

- Significatividad lógica del material

El material que presenta el maestro al estudiante debe estar organizado, para que se dé una construcción de conocimientos. Para que la información que se le presenta al alumno pueda ser comprendida es necesario que el contenido sea significativo desde su estructura interna, y que el docente respete y destaque esta estructura, presentando la información de manera clara y organizada. Deben seguir una secuencia lógica en donde cada uno de sus aspectos debe tener coherencia con los otros. Cualquier tema curricular tiene, intrínsecamente, una estructura lógica que permite que sea comprendido, pero son las secuencia de los contenidos, la explicación de las ideas o las actividades que se proponen las que terminan o no configurando su orden y organización.

- Significatividad psicológica del material:

Que el alumno conecte el nuevo conocimiento con los previos y que los comprenda. También debe poseer una memoria de largo plazo, porque de lo contrario se le olvidará todo en poco tiempo. Los contenidos deben ser adecuados al nivel de desarrollo y conocimientos previos que tiene el alumno. El interés por el tema no garantiza que los alumnos puedan

aprender contenidos demasiado complejos. Para que el alumno pueda asimilar los contenidos necesita que su estructura de conocimientos tenga esquemas con los que pueda relacionar e interpretar la información que se le presenta. Si el alumno no dispone de ellos, por muy ordenada y clara que sea la información nueva, no podrá comprenderla ya que requiera un nivel de razonamiento o conocimientos específicos de los que no dispone. Los docentes deben, por una parte, ser capaces de activar los conocimientos previos del alumno haciendo que piensen en sus ideas y sean conscientes de ellas. Y por otra, seleccionar y adecuar la nueva información para que pueda ser relacionada con sus ideas incluyendo, si es necesario, información que pueda servir de "puente" entre lo que ya saben los alumnos y lo que deben aprender.

La significatividad lógica se promueve mediante preguntas, debates, planteando inquietudes, presentando información general en contenidos familiares, etc. De forma que los alumnos movilicen lo que ya saben y organicen sus conocimientos para aprender. Es importante que esta actividad sea cotidiana en la dinámica de la clase y que los alumnos la incorporen como una estrategia para aprender.

- Actitud favorable del alumno:

El aprendizaje no puede darse si el alumno no quiere. Este es un componente de disposiciones emocionales y actitudinales, en donde el maestro sólo puede influir a través de la motivación. (Agudo, Campos, & Hernán, 2012)

Objetivo específico 4. Aplicar la alternativa propuesta del proyector digital como recurso didáctico para el aprendizaje de la línea recta.

Objetivo específico 5. Valorar la efectividad de la misma para determinar su funcionalidad correcta en la educación, para su implementación y así potenciar el aprendizaje de la línea recta.

Aplicación y valoración del proyector digital como recurso didactico

TALLERES APLICADOS	Valoración de la calificación Z con la Prueba Signo Rango de Wilcoxon
Taller 1: Uso del proyector digital como recurso didáctico para el aprendizaje del sistema de coordenadas.	$\mathbf{Z = 4,46}$
Taller 2: Uso del proyector digital como recurso didáctico para el aprendizaje de la línea recta.	$\mathbf{Z = 4,46}$

Al aplicar un pre test y pos test antes y después de aplicar el Proyector digital como recurso didáctico, la variación entre los dos test calculados con la Prueba no paramétrica Signo Rango de Wilcoxon, donde se obtuvo un valor de verdad mayor a 1,96 con una significancia del 95%, valor positivo que confirma la efectividad del uso del proyector digital propuesto para mejorar el aprendizaje de la línea recta.

h. CONCLUSIONES

❖ Del diagnóstico del aprendizaje de la línea recta

De acuerdo al diagnóstico realizado sobre el aprendizaje de la línea recta en estudiantes, docente y padres de familia de la Unidad Educativa Anexa a la Universidad Nacional de Loja se concluye lo siguiente:

Los estudiantes de primer año de bachillerato general unificado:

1. Tienen deficiencias en la definición científica de un segmento rectilíneo.
2. Poseen carencias de conocimiento para definir científicamente a la línea recta.
3. No pueden diferenciar entre la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares o paralelas.
4. Tienen deficiencias teóricas para encontrar la ecuación general de una línea recta.
5. Tienen deficiencias para encontrar la distancia entre dos puntos.
6. No saben representar gráficamente e identificar la fórmula para calcular la pendiente de una línea recta.
7. Tienen deficiencias para representar pares ordenados en un sistema coordenado.
8. Tienen dificultades para caracterizar las diferentes formas o ecuaciones que existen para representar una línea recta.

El docente de Matemática del primer año de bachillerato general unificado:

1. Manifiesta que sus estudiantes no cuentan con los conocimientos previos suficientes para el estudio de la línea recta.
2. Tiene como obsolescencia la falta de incorporación de las TIC al proceso de enseñanza.

Los padres de familia del primer año de bachillerato general unificado:

1. Afirman que sus representados no dedican el tiempo suficiente al estudio de la Matemática.
2. Tienen como deficiencia la poca atención y vigilancia que prestan a sus representados en el cumplimiento de las obligaciones que deben cumplir con la institución educativa.

❖ **De la aplicación de los medios audiovisuales**

1. La utilización del proyector digital como recurso didáctico generó cambios en el aprendizaje de la línea recta.

i. RECOMENDACIONES

Frente a las conclusiones propuestas se plantean las siguientes recomendaciones:

1. Los estudiantes deben prestar más atención a los fundamentos teóricos que el docente imparte en el salón de clase.
2. El docente debe de buscar nuevas técnicas de estudio para despertar el interés de sus alumnos en el aprendizaje de la línea recta.
3. Los estudiantes deben conocer cuál es la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares o paralelas entre sí para así poder diferenciarlas y que se facilite la resolución de ejercicios.
4. Los estudiantes deben ejercitarse en la resolución de problemas acerca de la línea recta.
5. El estudiante debe autoeducarse para mejorar los conocimientos previos que se necesita para el estudio de la línea recta.
6. El docente debe incorporar las TIC para dirigir el proceso enseñanza aprendizaje y así despertar el interés del alumnado.
7. Los padres de familia deben prestar más atención a las actividades que sus hijos realizan.
8. Debe utilizar el proyector digital como recurso didactico para facilitar el aprendizaje de la línea recta.
9. La institución educativa debe brindar las condiciones necesarias para el buen desempeño de los docentes.
10. La institución educativa debe tomar como posibilidad la incorporación del proyector digital como recurso didactico en la cual se involucre al personal docente y dicente en la búsqueda de soluciones al aprendizaje de la línea recta.

j. BIBLIOGRAFÍA

1. Adame, A. (Primera Edición). (2009). *Medios Audiovisuales En El Aula.* Córdova España. Editorial Graficas arte. ISBN 1988-6047.

2. Aguilar, M. A. (Primera Edición). (2010). *Geometría, Trigonometría y Geometría Analítica.* México. Editorial Pearson Educación.

3. Aponte, G. Pagan, E. Pons, F. (Segunda Edición). (2010). *Fundamento de Matemática Básicas.* México. Editorial Pearson Educación.

4. Azinian, H. (Primera Edición). (2009). *Las tecnologías de las Información y la Comunicación en las prácticas pedagógicas. "Manual para organizar proyectos"*. Buenos Aires. Ediciones Novedades Educativas. ISBN 978-987-538-234-5.

5. Barona, R. L. (1979). *El Mundo De La Matemática Moderna.* España. Ediciones Océano S.A.

6. Bartolomé, A. (Primera Edición). (2011). *Recursos Tecnológicos Para El Aprendizaje*. Costa Rica. Editorial Universidad Estatal a Distancia San José, ISBN 978-9968-31-859

7. Betancourt, R. (Primera Edición). (2011). *El Taller Como Estrategia Didáctica.* Bogotá. Editorial Universidad De La Salle.

8. Campbell, Donald, (Segunda Edición). (2011). *Diseños experimentales y cuasiexperiemntales en la investigación social.* España. Editorial Amorrortu España SL.

9. Colegio Nacional de Matemáticas, (Primera Edición). (2010). *Geometría Trigonometría y Geometría Analítica.* México. Editorial Pearson Educación.

10. De Oteyza, E., et al. (2005). *Geometría Analítica.* México. Editorial Pearson Educación. ISBN: 970-26-0556-3

11. De Oteyza, E., et al. (Tercera Edición). (2011). *Geometría Analítica.* México. Editorial Pearson Educación.

12. Duque, F. et al. (2005). *Matemáticas Previas al Cálculo.* Colombia. Editorial Sello Universidad De Medellín

13. Galindo, J. (Primera Edición). (2005). *Matemáticas 4 Geometría Analítica.* México. Editorial S.A. de C.V.

14. Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (Quinta Edición). (2010). *Metodología de la Investigación*. México: Editorial McGraw-Hill.

15. Jiménez, R. (Primera Edición). (2006). *Geometría Analítica.* México. Editorial Pearson Educación.

16. Jiménez, R. (Segunda Edición). (2011). *Matemáticas III, Geometría Analítica.* México. Editorial Pearson Educación.

17. Joseph, K.H. (1982). *Teoría y Problemas de Geometría Analítica.* Bogotá Colombia. Editorial Andes.

18. Kindle Joseph. (1984). *Teoría y Problemas de Geometría Analítica Plana y del Espacio.* México. Editorial McGraw-Hill.

19. Lehmann, C. (Vigésima Reimpresión). (1994). *Geometría Analítica.* México. Editorial Limusa Grupo Noriega Editores.

20. Maceratesi, M. I. (Primera Edición). (2007). *Ensayo sobre Educación grupal*. Bogotá.

21. Ministerio De Educación. (2010). *Libro de Matemáticas del noveno año de educación básica*.

22. Piortr, M. W. Gutiérrez, B. (2003). *Introducción a las Matemáticas Universitarias.* México. Interamericana Editorial.

23. Prieto, P. Herminio, J. (Primera Edición). (2006). *Matemáticas III.* México. Editorial Pearson Educación.

24. Smith, et al. (2001). *Algebra.* México. Editorial Pearson Addson Wesley.

25. Solis, Z. (Primera Edición). (2012). *Matemática 1.* Ecuador. Editorial EDISOL "Ediciones Solis"

26. Sullivan, M. (Cuarta Edición). (1997). *Precálculo.* México. Editorial Pearson Educación.

27. Suvorou. (Cuarta Edición). (1973). *Matemáticas Superiores.* Rusia. Editorial Mir.

28. Tejedor, J. F. (Primera Edición). (1998). *Los Alumnos de la Universidad de Salamanca, Características y Rendimiento Académico.* España. Editorial Ediciones Universidad de Salamanca.

29. Uribe, C. L. (Decima Novena Edición). (2003). *Alfa 9 Con Estándares Serie De Matemáticas*. Bogotá. Editorial Grupo Norma.

30. Zabala, A. (Segunda Edición). (2005). *Enfoque Globalizador y Pensamiento Complejo.* España. Editorial Graó, de Irif, S.L.

WEBGRAFÍA

1. Agudo, A., Campos, A., & Hernán, M. (2012). Aprendizaje Significativo. Recuperado de https://tice.wikispaces.com/Aprendizaje+significativo

2. Anónimo. (2013). *La alternativa*. Recuperado de http://es.wikipedia.org/wiki/Alternativa

3. Anónimo (2009). *Asistencia a clases*. Recuperando de http://www.aulafacil.com/cursos/l9291/autoayuda/autoayuda/tecnicas-de-estudio/asistencia-a-clase

4. Anónimo, (2012). *Aprendizaje Significativo*. Recuperado de http://es.wikipedia.org/wiki/Aprendizaje_significativo

5. Begoña, V. (2007). *Teoría de la decisión: Decisión con incertidumbre, Decisión multi criterio, Teoría de los juegos*. Recuperado de http://www.mat.ucm.es/~bvitoria/Archivos/a_dt_UCM.pdf

6. Cesar, Shirley. (2011), *En Blog Proyector*. Recuperado de http://proyecto-coljer-proyector.blogspot.com/p/que-funcion-cumple.html

7. Del Prado, Irma. (2011). *Aprendizaje Significativo (David Ausubel)*.Recuperado de http://portal.educ.ar/debates/eid/docenteshoy/materiales-escolares/aprendizaje-significativo-davi.php

8. Gómez, A. (2009). *Karl Pearson, El Creador de la Estadística Matemática*. Recuperado de http://www.mat.ucm.es/~villegas/ArtPearson2007.pdf

9. Hermandad Madrileña. (2013). *Definición y tipos de discapacidad física e intelectual.* Recuperado de http://www.hermandadmadrilena.es/blog/definicion-tipos-de-discapacidades/

10. Herrera, P., Duffau, G., & Lagos, R. (1997). *Importancia de las probabilidades pre prueba en el uso de pruebas diagnósticas*.

Recuperado de http://www.scielo.cl/pdf/rcp/v68n3/art04.pdf#page=1&zoom=auto,0,623

11. Instituto Tecnológico de Chihuahua, (2012). *Pruebas no paramétricas.* Recuperado de: http://www.itch.edu.mx/academic/industrial/estadistica1/cap04d.html

12. Morales, P. (2013). *Investigación experimental diseños y contraste de medias*. Recuperado de http://web.upcomillas.es/personal/peter/investigacion/Dise%F1osMedias.pdf

13. Sánchez, J. (2008). *La teoría de las decisiones*. Recuperado de http://academico.comunidadcoomeva.com/blog/uploads/TEORADEDECISIONESMIO.ppt.

14. Toledo, R. (2011). *Responsabilidad: Valor necesario para la formación integral, del estudiante universitario.* Recuperado de http://www.odiseo.com.mx/correos-lector/responsabilidad-valor-necesario-para-formacion-integral-estudiante-universitario#sthash.h04xIFIG.dpuf

15. Zapata, J. (2013). *Historia de la línea recta.* Recuperado de http://es.scribd.com/doc/120701764/HISTORIA-DE-LA-LINEA-RECTA

k. ANEXOS

l. Anexo 1: Proyecto de tesis aprobado

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN

CARRERA DE FÍSICO MATEMÁTICAS

TEMA

El proyector digital como recurso didáctico para el aprendizaje de la línea recta en los estudiantes del primer año, del Bachillerato General Unificado, paralelo A, de la Unidad Educativa Anexa a la Universidad Nacional de Loja, de la ciudad de Loja, periodo 2013 – 2014

Proyecto de tesis previo a la obtención de grado de Licenciado en Ciencias de la Educación mención Físico Matemáticas.

AUTOR

Luis Vinicio Calva Alvarez

LOJA – ECUADOR

2013

a. TEMA

EL PROYECTOR DIGITAL COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA EL APRENDIZAJE DE LA LÍNEA RECTA EN LOS ESTUDIANTES DEL PRIMER AÑO, DEL BACHILLERATO GENERAL UNIFICADO, PARALELO A, DE LA UNIDAD EDUCATIVA ANEXA A LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA, DE LA CIUDAD DE LOJA, PERIODO 2013 – 2014

b. PROBLEMÁTICA

- *Mapa mental de la realidad temática*

- Delimitación de la realidad temática
  - ✓ Delimitación temporal

La presente investigación se realizará en el periodo 2013 – 2014.

  - ✓ Delimitación institucional

La investigación tendrá lugar en el primer año del Bachillerato General Unificado, paralelo A, de la Unidad Educativa Anexa a la Universidad Nacional de Loja.

Esta Unidad Educativa se encuentra ubicada en la ciudad de lo Loja, en el barrio La Argelia, en la Ciudad Universitaria Guillermo Falconí Espinosa, ubicada en las calles Av. Reinaldo Espinoza y Pío Jaramillo Alvarado, s/n., formando parte del Área de la Educación, el Arte y la Comunicación de la Universidad Nacional de Loja.

La unidad educativa tiene su origen en el Colegio Experimental "Manuel Cabrera Lozano" que se crea mediante resolución del Honorable Consejo Universitario de la Universidad Nacional de Loja, el 28 de septiembre de 1971, como establecimiento anexo a la entonces Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación. Su finalidad fue la de servir como centro de práctica docente de los futuros egresados de la mencionada facultad, que hasta la presente viene formando los educadores que requiere el sistema educativo nacional.

La semana del 18 de julio del 2011, la Dra. Miriam González Serrano, Coordinadora Zonal de Educación, Zona 7, mediante acuerdo Nº 002-20-07-11 autorizó la conformación y funcionamiento de la Unidad Educativa Experimental anexa a la Universidad Nacional de Loja, en la cuidad y provincia de Loja, en sus tres niveles de educación: Inicial, Básica y Bachillerato, a partir del año 2011 – 2012, Régimen Sierra.

Actualmente la unidad educativa la conforman el Centro de Desarrollo Infantil, el Jardín de Infantes José Alejo Palacios, la Escuela Pedro Víctor Falconí y el Colegio Manuel Cabrera Lozano, quienes a través del Consejo Académico del Área de Educación, el Arte y la Comunicación de la Universidad Nacional de Loja, venían insistiendo ante el Ministerio de Educación la creación de la mencionada Unidad Educativa.

En la actualidad la unidad educativa cuenta con una planta administrativa y docente de 107. Que imparten sus conocimientos a los diferentes grados y años, además tiene una población de 1538 estudiantes que se encuentran legalmente matriculados, solo en el primer año de Bachillerato General Unificado existen 142 estudiantes organizados en cinco paralelos A, B, C, D, E y en cada paralelo constan de 32, 29, 34, 30 y 17 estudiantes respectivamente, la presente investigación se desarrollará en el paralelo A que cuenta con 32 estudiantes.

- ✓ Delimitación de beneficiarios

Los beneficiarios del presente trabajo investigativo son los estudiantes que actualmente están cursando el primer año de Bachillerato General Unificado, paralelo A, de la Unidad Educativa Anexa a la Universidad Nacional de Loja.

- ➢ Situación de la realidad temática

La enseñanza y el aprendizaje de la línea recta tiene gran complejidad teórica y metodológica, es por ello que para realizar un análisis de cómo se encuentran los conocimientos de los estudiantes, se ha aplicado una encuesta, con la finalidad de detectar deficiencias, falencias, carencias que presentan los alumnos en el aprendizaje de la línea recta, la misma que se detalla a continuación:

El 62,5% de los estudiantes muestran confusión al momento de conceptualizar un segmento recto de una línea recta, además el 50% de la población encuestada no saben definir analíticamente que es línea recta.

El 40,63% no conocen la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas, es por ello que el estudiantado carece de conocimientos teóricos respecto al estudio de la línea recta.

El 34,38% de los estudiantes no conocen el concepto básico de pendiente de una línea recta, a base de ello podemos afirmar que la mayoría del estudiantado encuestado no cuenta con suficientes conocimientos previos para el aprendizaje de la línea recta, es por ello que la mayoría del estudiantado presenta dificultades en la comprensión del estudio de la línea recta.

El 65,63% no puede reconocer en que cuadrante se encuentra un par ordenado dado, es por ello que el estudiantado presenta graves dificultades al momento del aprendizaje de la línea recta, la representación grafica de un par ordenado en el sistema de coordenadas rectangulares en la actualidad se aprende en el octavo grado de educación general básica. Para concluir con el análisis a la encuesta aplicada a los estudiantes puedo afirmar que carecen de conocimientos teóricos, cabe recalcar que la teoría es muy importante para la resolución de problemas de la línea recta, esta carencia se debe a que el estudiantado no cuenta con suficientes conocimientos previos para aprender el nuevo conocimiento.

Para realizar un análisis de como el docente imparte sus clases y si las mismas son aceptadas por los discentes, en una encuesta aplicada a los docentes de matemáticas del primer año de bachillerato general unificado se obtuvieron los siguientes datos:

Sacando una media aritmética para conocer el nivel de conocimiento de los docentes el 75% conocen la temática sobre la línea recta.

El 100% de los docentes se capacitan en el aprendizaje de la línea recta solamente cuando van a dictar clases, ese es un problema muy serio ya que la capacitación debe ser permanente no solo cuando toca dictar clases.

El 100% de los docentes toman como libro base para la enseñanza-aprendizaje el libro de CHARLES LEHMANN, “Geometría Analítica”, de acuerdo a estos resultados podemos decir que la bibliografía se muestra muy limitada para la enseñanza de la línea recta.

El 100% de los docentes aseguran que a veces la institución les facilita el material didáctico pertinente para la enseñanza de la línea recta, por la razón que el material didáctico que cuenta la institución está muy obsoleto.

- Pregunta de investigación.

De esta situación problemática se deriva la siguiente pregunta de investigación:

¿De qué manera el proyector digital como recurso didáctico mejora el aprendizaje de la línea recta en los estudiantes del primer año, paralelo A, del bachillerato general unificado de la unidad educativa anexa a la universidad nacional de Loja, de la ciudad de Loja, periodo 2013 – 2014?

c. JUSTIFICACIÓN

La investigación se justifica por las siguientes razones:

Por la necesidad de diagnosticar las dificultades y carencias que se presentan en el aprendizaje de la línea recta como son: la diferenciación y análisis de las diferentes formas de expresar una ecuación de línea recta, entre otros aspectos que involucran en el estudio de la línea recta; el conflicto en la interpretación de ejercicios y la carencia de utilización de las tecnologías de la información y comunicación como lo es el proyector digital, en los estudiantes de primer año de bachillerato general unificado paralelo A, de la unidad educativa Anexa a la Universidad Nacional de Loja.

Por la importancia que tiene aplicar el proyector digital como un recurso didáctico para optimizar el aprendizaje de la línea recta, en los estudiantes de primero de bachillerato general unificado paralelo A, de la unidad educativa Anexa a la Universidad Nacional de Loja.

Por el imperativo que tiene la carrera de Físico Matemáticas del Área de la Educación, el Arte y la Comunicación de la Universidad Nacional de Loja con la colectividad educativa, vincular la investigación de grado con la sociedad con la finalidad de dar, solución a las dificultades, problemas u obsolescencias evidenciadas en los estudiantes de física y matemática en los diferentes niveles de formación de la educación básica y bachillerato general unificado.

d. OBJETIVOS

General

Usar el proyector digital como recurso didáctico para mejorar el aprendizaje de la línea recta en los estudiantes del primer año del bachillerato general unificado, paralelo A de la unidad educativa anexa a la Universidad Nacional de Loja, de la ciudad de Loja, periodo académico 2013 – 2014.

Específicos:

- Comprender el aprendizaje de la línea recta.
- Diagnosticar las dificultades, obstáculos, obsolescencias y necesidades que se presentan en el aprendizaje de la línea recta.
- Diseñar la alternativa a través del proyector digital como recurso didáctico para el aprendizaje de la línea recta.
- Aplicar la alternativa propuesta del proyector digital como recurso didáctico para el aprendizaje de la línea recta.
- Valorar la efectividad de la misma para determinar su funcionalidad correcta en la educación, para su implementación y así potenciar el aprendizaje de la línea recta.

e. MARCO TEÓRICO

Contenido

1. REALIDAD TEMÁTICA
   - 1.1. Historia de la línea recta
   - 1.2. Segmento rectilíneo dirigido
   - 1.3. Sistema coordenado en el plano
     - 1.3.1. Representación de un par ordenado en el plano cartesiano
   - 1.4. Distancia entre dos puntos
   - 1.5. División de un segmento en una razón dada
   - 1.6. La línea recta
     - 1.6.1. Definición
   - 1.7. Ángulo de inclinación
   - 1.8. La pendiente de una recta
     - 1.8.1. Características
   - 1.9. Determinación de la ecuación de la recta
     - 1.9.1. Ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada
       - 1.9.1.1. Otras formas de la ecuación de la recta
       - a) Ecuación de la recta dada su pendiente y su ordenada en el origen
       - b) Ecuación de la recta que pasa por dos puntos
       - c) Ecuación simétrica de la recta
     - 1.9.2. Forma general de la ecuación de una recta
       - 1.9.2.1. Posiciones relativas de dos rectas
     - 1.9.3. Forma normal de la ecuación de la recta
       - 1.9.3.1. Procedimiento para obtener la forma normal de una recta a partir de su forma general
   - 1.10. Ángulo de intersección entre dos rectas
   - 1.11. Familia de rectas
   - 1.12. Aplicaciones de la forma normal de la ecuación de la recta
   - 1.13. Distancia entre rectas paralelas
2. DIAGNÓSTICO DEL APRENDIZAJE DE LA LÍNEA RECTA
3. EL PROYECTOR DIGITAL COMO RECURSO DIDÁCTICO
   - 3.1. Historia.

3.2. Definición de proyector digital
3.3. Tipos de proyectores
3.4. Características del proyector digital
3.5. Partes que componen el proyector
3.6. Función del proyector
3.7. Usos específicos del proyector digital
3.7.1. Usos para un proyector LCD en el aula
4. APLICACIÓN DEL PROYECTOR DIGITAL COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA EL APRENDIZAJE DE LA LÍNEA RECTA. MODALIDAD TALLER.

1. REALIDAD TEMÁTICA.

1.1. Historia de la línea recta.

Geometría proviene del griego *geo*, que significa “tierra” y *metrein*, “medir”, es una rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades del espacio. En su forma más elemental, la geometría se preocupa de problemas métricos como el cálculo del área y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos. Otros campos de la geometría son la geometría analítica, geometría descriptiva, topología, geometría de espacios con cuatro o más dimensiones, geometría fractal, y geometría no euclidiana.

Historia de la línea recta

Joan Zapata (2013). En la geometría desarrollada por Euclides, los términos primitivos como lo son: el punto, la recta, las relaciones de incidencia, orden y congruencia tienen un contenido material e intuitivo evidente, sin embargo, en el desarrollo de su fundamentación se desprecia de este desarrollo material e intuitivo. La vida de Euclides es poco conocida, salvo que vivió en Alejandría (actualmente Egipto) durante el reinado de Ptolomeo I. Fue un

matemático y geómetra griego (325 - 265 a.C.) Se le conoce como “El Padre de la Geometría”.

Euclides, en el siglo III a. C. configuró la geometría en forma axiomática, tratamiento que estableció una norma a seguir durante muchos siglos.

En la geometría euclidiana descrita en el libro «Los Elementos», se encuentra una definición de la línea recta recogida por su autor: *“Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella”*, conjuntamente se encuentran los siguientes postulados propuestos por Euclides:

- Una línea recta puede ser dibujada uniendo dos puntos cualesquiera.
- Un segmento de línea recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.
- Dado un segmento de línea recta, puede dibujarse un círculo con cualquier centro y distancia.
- Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
- Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela.

Además de esta supuesta definición recogida en los Elementos de Euclides, a lo largo de la historia otros pensadores han dado otras tan deficientes como:

- Es la línea que sus puntos intermedios hacen sombra a sus extremos (Platón, 427-347).
- Es el conjunto de puntos que permanecen invariantes cuando un cuerpo gira alrededor de dos de sus puntos (Leibniz, 1646-1716).
- Es el camino más corto entre dos puntos (Legendre, 1752-1833).
- Es la línea que, trazada de un punto a otro no se vuelve ni a la derecha ni a la izquierda, y es la más corta que puede trazar entre esos dos puntos (Simpson, 1710-1761).

- La recta es una serie de puntos, cada uno de los cuales equidista de tres puntos dados (Fourier, 1768-1830).
- Es una línea homogénea, es decir, cuyas partes, tomadas indiferentemente, son semejantes entre sí y no difieren más que en su longitud (Delboeuf, 1831-1896).
- Es una línea indefinida tal que por dos puntos dados no se puede hacer pasar más que una (Duhamel, 1797-1872).

La geometría avanzó muy poco desde el final de la era griega hasta la edad media. El siguiente paso importante en esta ciencia lo dio el filósofo y matemático francés René Descartes, cuyo tratado “El Discurso del Método”, publicado en 1637, hizo época. Este trabajo fraguó una conexión entre la geometría y el álgebra al demostrar cómo aplicar los métodos de una disciplina en la otra. Éste fundamento daría paso a lo que se conoce hoy en día como geometría analítica, que precisamente es la rama de las matemática que fusiona el estudio de la Geometría Euclidiana con el álgebra, en el análisis de las líneas y figuras por medio de expresiones algebraicas. Se llama Analítica a esta geometría porque implica un análisis estricto, lógico y racional para consignar en un plano de referencia los elementos geométricos básicos y luego hallar sus correspondencias en formulas y propiedades algebraicas. El principal de referencia es el plano cartesiano, llamado así en memoria de este gran hombre de las matemáticas y la filosofía. Es pues de esta manera como se convierte la línea recta en la introducción y parte de la geometría analítica.

1.2. Segmento rectilíneo dirigido.

Lehmann (1994, p. 1). La porción de una línea recta comprendida entre dos de sus puntos se llama segmento rectilíneo o simplemente segmento. Los dos puntos se llaman extremos del segmento.

Así para la recta *l,* AB es un segmento cuyos extremos son *A* y *B*. La longitud del segmento AB se representa por $\overline{AB}$.

El segmento *AB* es generado por un punto que se mueve a lo largo de la recta *l* de *A* hacia *B*. Decimos entonces que el segmento *AB* está dirigido de *A* a *B*, e indicamos esto por medio de una flecha como se lo muestra en la figura anterior. En este caso, el punto *A* se llama origen o punto inicial y el punto *B* extremo o punto final. Podemos también obtener el mismo segmento dirigiéndolo de *B* a *A*; entonces *B* es el origen y *A* el extremo, y el segmento se designa por BA. El sentido de un segmento dirigido se indica siempre escribiendo primero el origen o punto inicial.

1.3. Sistema coordenado en el plano.

Este sistema también se denomina *cartesiano* en honor a René Descartes, por haber sido quien lo unió al estudio del álgebra y la geometría plana para dar lugar a la geometría analítica.

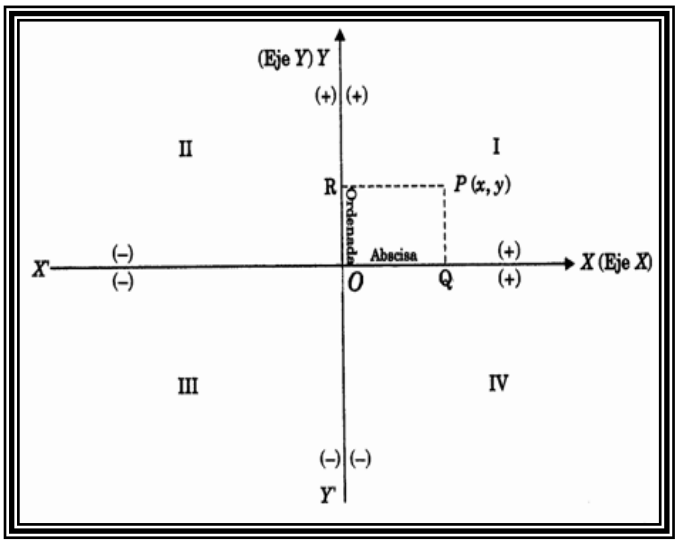
Además este se llama *sistema coordenado-bidimensional* o *plano.* El más importante, es el *sistema coordenado rectangular.*

Zambrano (2012, p. 6). Sistema coordenado rectangular, consta de dos rectas dirigidas, llamadas ejes de coordenadas, perpendiculares entre sí. La recta horizontal es el eje de las *abscisas o* eje de las *x;* la recta vertical es el eje de las *ordenadas* o eje de las y.

Usando un segmento unidad conveniente, se divide cada eje de manera que los números *enteros positivos* queden a la derecha del origen sobre el eje *x,* y arriba del origen sobre el eje *y.* Los *enteros negativos* quedan a la izquierda del origen sobre el eje *x,* y abajo del origen sobre el eje y.

Tomando los ejes como elementos de referencia, se puede localizar cualquier punto situado en el plano que forman, procediendo en la forma siguiente: se indica la distancia del punto a la derecha o a la izquierda del eje horizontal, y la distancia hacia arriba o hacia abajo del eje vertical.

A la abscisa y a la ordenada de un punto se les llaman *coordenadas del punto* y se escriben como un par de números dentro de un paréntesis separado por una coma; el primero de estos números representa siempre a la abscisa y el segundo a la ordenada.



En general, un punto cualquiera por ejemplo el punto A, cuya abscisa es *x* y la ordenada y se designa mediante la notación *A(x,* y).

Los ejes de coordenadas dividen al plano en cuatro partes, llamada cada una *cuadrante;* los cuadrantes se numeran con números romanos **I, II, III, IV** como se indica en la figura anterior.

El sistema coordenado rectangular en el plano establece una correspondencia biunívoca entre cada punto y un par ordenado de números reales. Lehmann (1994, p. 6).

1.3.1. Representación de un par ordenado en el plano cartesiano.

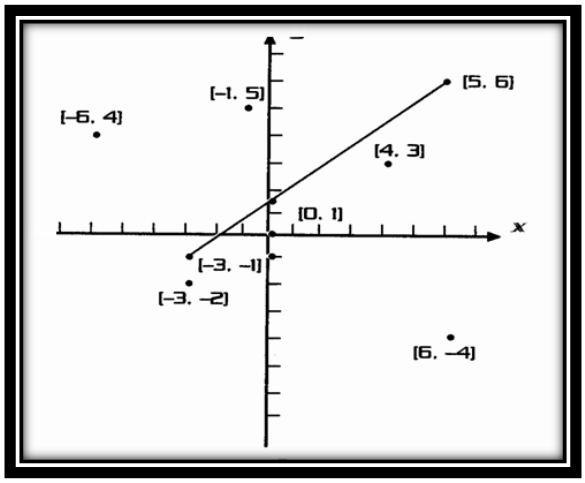
Ministerio de Educación (noveno año, 2010, p. 22). Para representar un par

ordenado en el plano cartesiano, utilizamos el sistema cartesiano de coordenadas, el mismo que consta de dos ejes perpendiculares, el eje de las X y el eje de las Y, los cuales se cortan en un punto O llamado origen. Estos ejes dividen al plano o sistema cartesiano en cuatro regiones llamadas cuadrantes: I, II, III, IV.

En el sistema de coordenadas rectangulares hay una relación que establece que *a cada par de números reales (x, y) le corresponde un punto definido del plano, y a cada punto del plano le corresponde un par único de coordenadas (x, y).*

En el proceso graficado hay que tomar en cuenta los signos de las coordenadas del punto para ubicarlo en los cuadrantes; para ello se emplea el papel cuadriculado o de coordenadas rectangulares, ya que facilita la localización y el marcado de puntos en el plano.

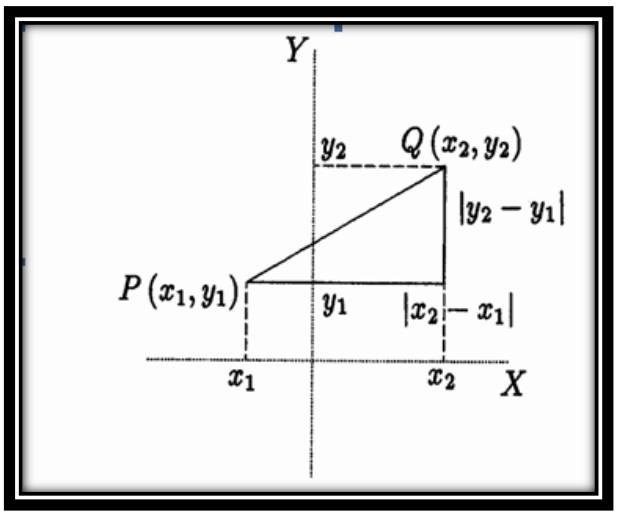
Ejemplo: Traza un sistema coordenado rectangular y señala los puntos siguientes: (4, 3), (-1, 5), (-3, -2), (0, 1), (6, -4), (-6, 4). Traza, además, el segmento de recta que une los puntos (-3, -1) con (5, 6).



1.4. Distancia entre dos puntos.

Ministerio de Educación (noveno año, 2010, p. 24). Si analizamos dos puntos cualesquiera del sistema cartesiano, podemos ver que existe una distancia entre dichos puntos. Para deducir dicha fórmula, supongamos que se quiere calcular la distancia entre dos puntos $P(x_1; x_1)$ y $Q(x_2; y_2)$ que no estén en la misma recta vertical u horizontal, construimos un triangulo rectángulo que tenga al segmento *PQ* por hipotenusa, como se muestra en la figura, las longitudes de los catetos son $|x_2 - x_1|$ y $|y_2 - y_1|$.

La distancia entre *P* y *Q* es la longitud de la hipotenusa del triángulo. Recordemos que el teorema de Pitágoras dice que: En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



Entonces:

$$d(P,Q)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \ ,$$

por lo tanto:

$$\boldsymbol{d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Observa que si los puntos están en la misma vertical o en la misma horizontal, uno de los dos sumandos de la formula vale cero, pero el

resultado sigue siendo cierto.

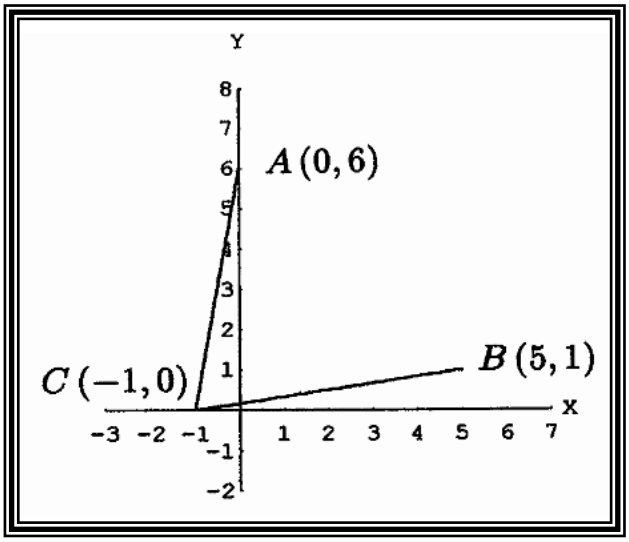
La fórmula anterior, además de permitirnos obtener la distancia entre dos puntos, nos capacita para solucionar, entre otros, los siguientes problemas:

- ✓ Determinar el perímetro de un triángulo o de algunas otras figuras geométricas.
- ✓ Comprobar que un triángulo es rectángulo, aplicando el teorema de Pitágoras a las distancias obtenidas al verificar que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
- ✓ Comprobar que un triángulo es isósceles, si dos de las distancias obtenidas son iguales.
- ✓ Comprobar que un triángulo es equilátero, si sus tres lados son iguales.

Para resolver un problema y de ser posible, se recomienda en todos los casas graficar los datos disponibles antes de realizar cualquier operación.

Ejemplo:

a. ¿Qué coordenadas tiene el punto del eje X que equidista de *A (0,6)* y *B (5,1)*?



Solución:

Llamemos *C* al punto buscado. Como *C* esta sobre el eje X, su segunda coordenada vale cero. Entonces *C(x,* 0). Nos falta determinar el valor de *x.* Como la distancia de *C* a A debe ser igual a la distancia de *C* a *B,* igualamos:

$$d(C, A) = d(C, B)$$

Sustituimos las coordenadas de los puntos;

$$\sqrt{(x-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (0-1)^2}$$

efectuando las operaciones dentro de log radicales, obtenemos;

$$\sqrt{x^2 + 36} = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 1}$$

elevamos al cuadrado los dos lados de la ecuación y encontramos el valor de *x;*

$$x^2 + 36 = x^2 - 10x + 25 + 1$$

$$10x = -36 + 26$$

$$x = \frac{-10}{10}$$

$$x = -1$$

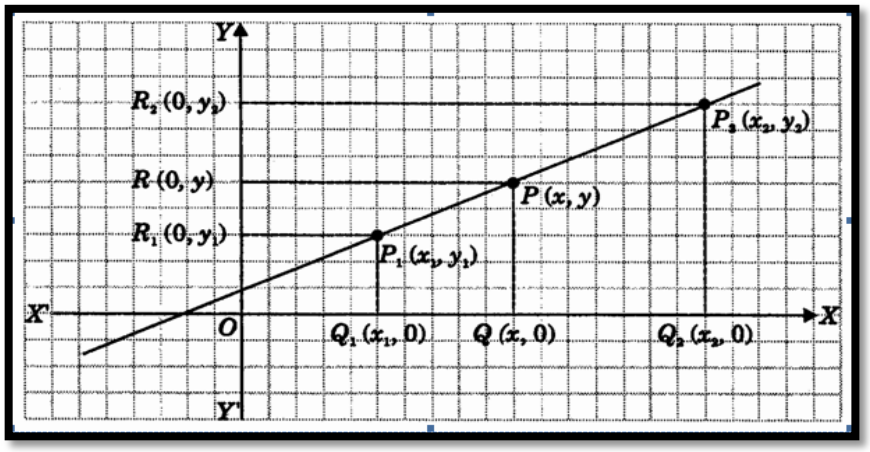
entonces el punto del eje *x* que equidista de *A* y *B* es *C (*-1,0).

1.5. División de un segmento en una razón dada.

Suvorou (1973, p. 12). Conociendo las coordenadas x_1, y_1, de un punto P_1 y las coordenadas x_2, y_2 del punto P_2, hállense las coordenadas x, y, de un tercer punto P, que divide al segmento P_1P_2 de tal modo que la razón

$r = \frac{P_1P}{PP_2}$. Para determinar las coordenadas de un punto *P* que divide a un segmento cuyos extremos son $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ *en la razón* $r = \frac{P_1P}{PP_2}$, se aplica el siguiente procedimiento.

Por los puntos P_1, *P* y P_2 se trazan perpendiculares a los ejes coordenados, como las rectas paralelas P_1Q_1, *PQ* y P_2Q_2 interceptan segmentos proporcionales sobre las dos transversales P_1P_2 y Q_1Q_2 se establece que $\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{Q_1Q}{QQ_2}$.



Las coordenadas de los puntos trazados sobre el eje *x* son: $Q_1(x_1, 0)$, y $Q(x, 0)$ y $Q_2(x_2, 0)$, y sobre el eje *y* son: $R_1(0, y_1)$, y R $(0, y)$ y $R_2(0, y_2)$.

La distancia dirigida de cada segmento $Q_1Q = x - x_1$ y $QQ_2 = x_2 - x$, se sustituye en la ecuación de la razón, y resulta:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{Q_1Q}{QQ_2}$$

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

$$x - x_1 = r(x_2 - x)$$

$$x - x_1 = rx_2 - rx$$

$$x - rx = x_1 + rx_2$$

$$x(1+r) = x_1 + rx_2$$

$$\therefore\ x = \frac{x_1 + rx_2}{(1+r)} \quad \rightarrow r \neq -1$$

Las rectas paralelas P_1R_1, PR y P_2R_2 interceptan segmentos proporcionales sobre las dos transversales P_1P_2 y R_1R_2; por lo anterior:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{R_1R}{RR_2}$$

La distancia dirigida de cada segmento $R_1R = y - y_1$ y $RR_2 = y_2 - y$, se sustituye en la ecuación de la razón, y resulta:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{R_1R}{RR_2}$$

$$r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$$y - y_1 = r(y_2 - y)$$

$$y - y_1 = ry_2 - ry$$

$$y - ry = y_1 + ry_2$$

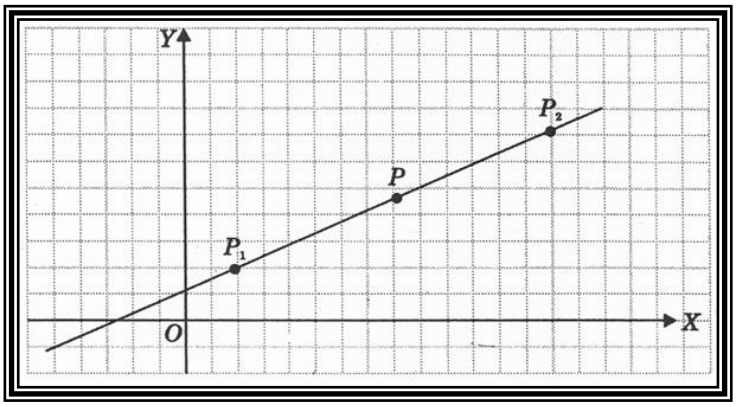
$$y(1+r) = y_1 + ry_2$$

$$\therefore\ y = \frac{y_1 + ry_2}{(1+r)} \quad \rightarrow r \neq -1$$

Teorema: Las coordenadas de un punto P que divide a un segmento cuyos extremos son $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la razón dada $r = \frac{P_1P}{PP_2}$ son:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{(1+r)} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{(1+r)} \quad \rightarrow r \neq -1$$

Si $P(x, y)$ es el punto medio del segmento P_1P_2, la razón es igual a la unidad, es decir:



Si $r = \frac{P_1P}{PP_2}$ y como $P_1P=PP_2$, resulta:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{P_1P}{P_1P} = \frac{PP_1}{PP_2} = 1$$

Al sustituir $r=1$ en las siguientes ecuaciones, tenemos:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{(1+r)} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{(1+r)}$$

$$x = \frac{x_1 + (1)x_2}{1+1} \qquad y = \frac{y_1 + (1)y_2}{1+1}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{2}$$

Corolario: Las coordenadas de un punto *P* que es el punto medio de un segmento cuyos extremos son $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, son:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ejemplos:

a. Encontrar las coordenadas del punto P que divide al segmento determinado por A(8,2) y B(-5,7) en la razón $r = \frac{3}{4}$

Al sustituir en:

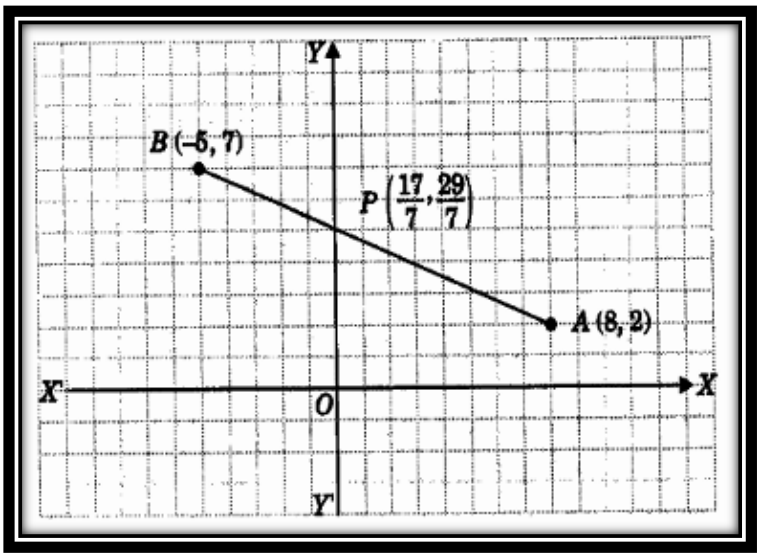
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{2}$$

$$x = \frac{8 + \left(\frac{3}{4}\right)(-5)}{1 + \frac{3}{4}} \qquad y = \frac{2 + \left(\frac{3}{4}\right)(7)}{1 + \frac{3}{4}}$$

$$x = \frac{17}{7} \qquad y = \frac{29}{7}$$

$$\therefore \textit{las coordenadas del punto buscado son } P\left(\frac{17}{7}, \frac{29}{7}\right)$$

Al graficar:



1.6. La línea recta.

1.6.1. Definición

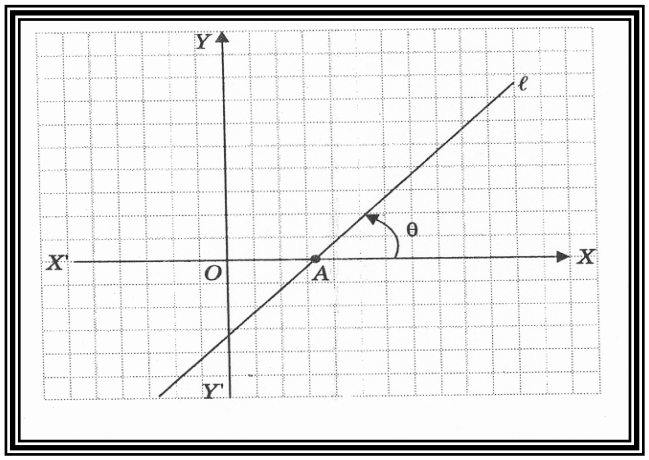
Una línea recta, analíticamente, es una ecuación lineal o de primer grado en dos variables. Recíprocamente, la representación grafica del lugar geométrico cuya ecuación sea de primer grado en dos variables es una recta. Una recta queda determinada completamente si se conocen dos

condiciones, por ejemplo, dos de sus puntos, un punto y su dirección (pendiente o coeficiente angular), etc. Schaum (1984, p. 22)

1.7. Ángulo de inclinación.

Sea *l* una recta no paralela al eje *x* y que lo intersecta en el punto *A.*

Oteyza, Elena, et al. (2011, p. 34). Dada una recta no horizontal, el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ que se obtiene al hacer girar el eje x alrededor del punto A en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj hasta que coincida con la recta.



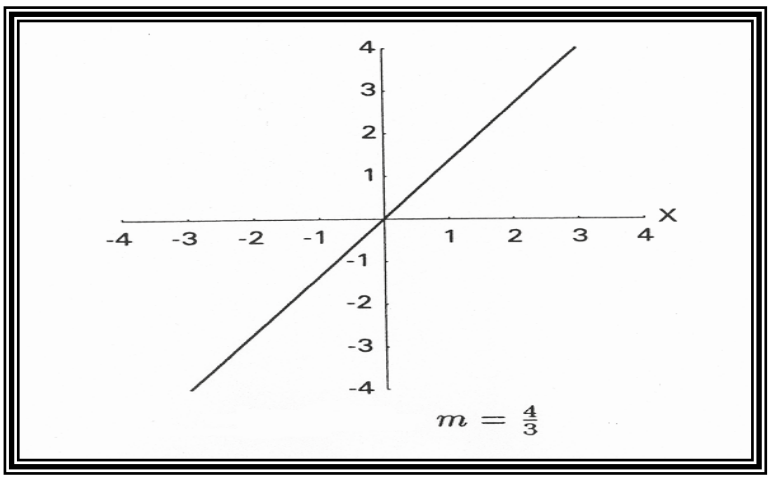
La dirección de la recta en relación con los ejes coordenados puede indicarse si se conoce el ángulo $\boldsymbol{\theta} < 180°$ que se obtiene al girar la semirrecta *AX* en sentido contrario a las manecillas del reloj hasta coincidir con la recta *l.*

1.8. La pendiente de una recta.

Se llama pendiente *m* o coeficiente angular de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación. Jiménez (2011, p. 49).

La pendiente de una recta no vertical es un número que mide que tan

inclinada esta la recta y hacia donde esta inclinada. La recta de la figura por cada 3 unidades que avanza hacia la derecha, sube 4 unidades,



decimos que la pendiente de la recta es $\frac{4}{3}$

Usualmente se denota con la letra *m* a la pendiente. Para encontrar la pendiente de una recta no vertical, tomamos dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ de la recta y calculamos el cociente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad x_1 \neq x_2$$

Si tomamos otro par de puntos *P'* y *Q'* en la misma recta, como se muestra en la figura, se obtienen dos triángulos rectángulos semejantes, y por lo tanto, la razón de sus catetos es la misma. Es decir, la pendiente de una recta puede determinarse usando dos puntos cualesquiera.

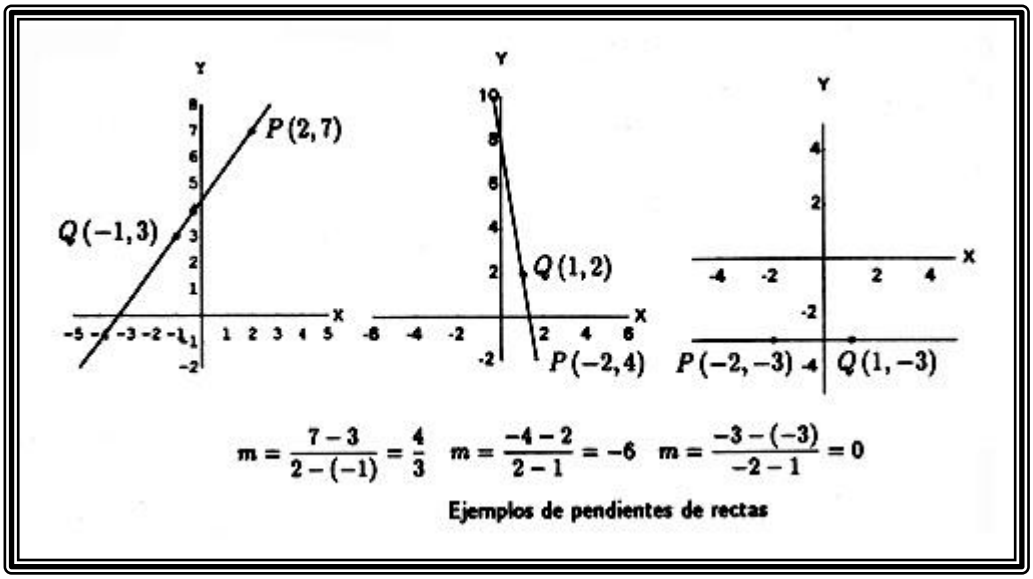
Si la recta es vertical, todos los puntos de la recta tienen la misma primera coordenada, entonces el denominador de la expresión anterior vale cero y por lo tanto, no puede evaluarse *m*, así que las rectas verticales no tienen pendiente.

1.8.1. Características:

- ✓ La pendiente es positiva cuando la recta esta inclinada hacia la

derecha.

- ✓ La pendiente es cero cuando la recta es horizontal.
- ✓ La pendiente es negativa cuando la recta esta inclinada hacia la izquierda.
- ✓ Conforme el valor absoluto de la pendiente es mayor, la recta está más inclinada.
- ✓ Una recta vertical no tiene pendiente.



1.9. Determinación de la ecuación de la recta.

1.9.1. Ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada.

Uribe (2003, p. 44). La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ y cuya pendiente sea *m*.

Si *Q (x, y)* es cualquier otro punto de la recta, se debe satisfacer:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

puesto que $Q \neq P$ y la recta no es vertical, $x \neq x_1$, multiplicando por $x - x_1$,

obtenemos:

$$\boxed{\textbf{Ecuación 1:} \quad \boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}}$$

Esta forma de la ecuación de la recta también se la conoce como ecuación *punto-pendiente* de la recta, ya que la obtuvimos conociendo la pendiente y un punto de ella, y recíprocamente si vemos una ecuación de este tipo, podemos saber porque el punto pasa por la recta y que pendiente tiene.

Ejemplos:

a. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por (4, -1) y tiene pendiente -2.

Solución:

$m = -2$

$(x_1, y_1) = (4, -1)$

Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = (-2)(x - 4)$$

$$y + 1 = -2(x - 4)$$

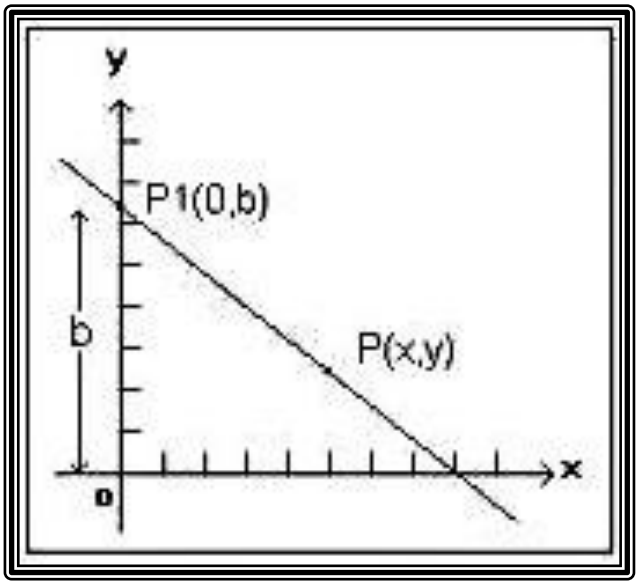
$$y + 1 = -2x + 8$$

1.9.1.1. Otras formas de la ecuación de la recta.

Lehmann (1994, p. 59). Una recta es o no paralela al eje *Y*. Si es paralela al eje *Y* su ecuación es de la forma $x = k$; si no es paralela a dicho eje, su pendiente está definida por la ecuación 1.

Como todas las rectas caen bajo una de estas dos clasificaciones, cualquiera otra forma de ecuación de una recta debe reducirse, necesariamente, a una de estas dos formas. Para algunos tipos de problemas, sin embargo, son más convenientes otras formas; a continuación consideramos algunas de ellas:

a) Ecuación de la recta dada su pendiente y su ordenada en el origen.



Jiménez (2006, p. 68) Consideremos una recta *l* cuya pendiente es *m* y cuya ordenada al origen, es decir, su intercepción con el eje *Y*, es *b*, como se muestra en el gráfico anterior. Como se conoce *b*, el punto cuyas coordenadas son *(0,b)* está sobre la recta. Por tanto, el problema se reduce a hallar la ecuación de la recta que pasa por un punto *(0, b)* y tiene una pendiente dada.

Según la ecuación 1 la ecuación buscada es:

$$y - b = m(x - 0)$$

O sea,

$$y = mx + b$$

Podemos enunciar este resultado con el siguiente teorema:

Teorema: La recta cuya pendiente es *m* y cuya ordenada en el origen es *b* tiene por ecuación:

Ecuación 2: $\boldsymbol{y = mx + b}$

A esta última forma de la ecuación de la recta se le conoce como la ecuación *pendiente-ordenada al origen* de la recta.

Ejemplos:

a. Encontrar la ecuación de la recta que tiene pendiente 3 y que corta al eje Y en el punto -1.

Solución:

Sustituimos *m* = 3 y *b* = -1 en la ecuación 2:

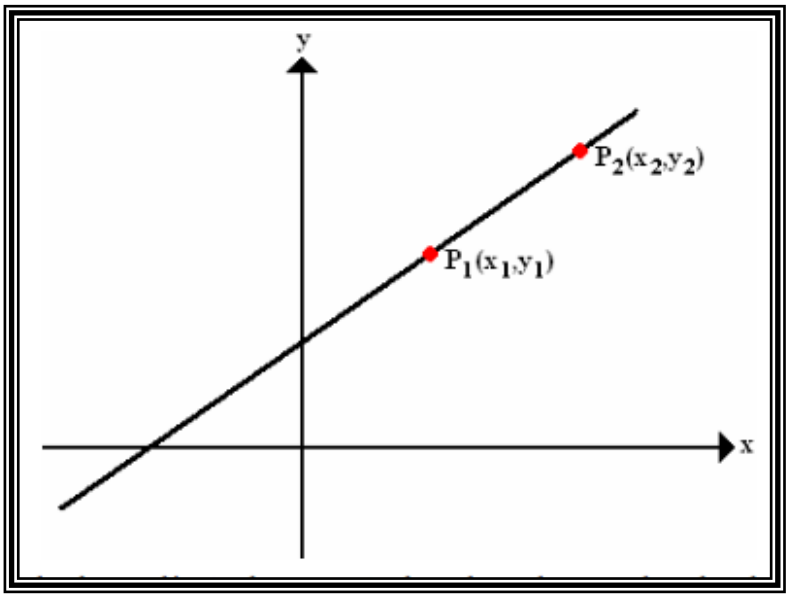
$$y = 3x + (-1)$$

Obteniendo

$$y = 3x - 3$$

b) Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

Geométricamente, una recta queda perfectamente determinada por dos puntos cualesquiera de la misma. Analíticamente, la ecuación de una recta también queda perfectamente determinada conociendo las coordenadas de dos puntos cualesquiera de la misma.



Teorema: La recta que pasa por dos puntos dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ tiene por ecuación:

Ecuación 3: $$\boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - y_2}(x - x_1)} \quad , \qquad \boldsymbol{x_1 \neq x_2}$$

Demostración: Sea la recta P_1P_2 como se muestra en la figura anterior. Como se conocen dos de sus puntos, su pendiente está dada por:

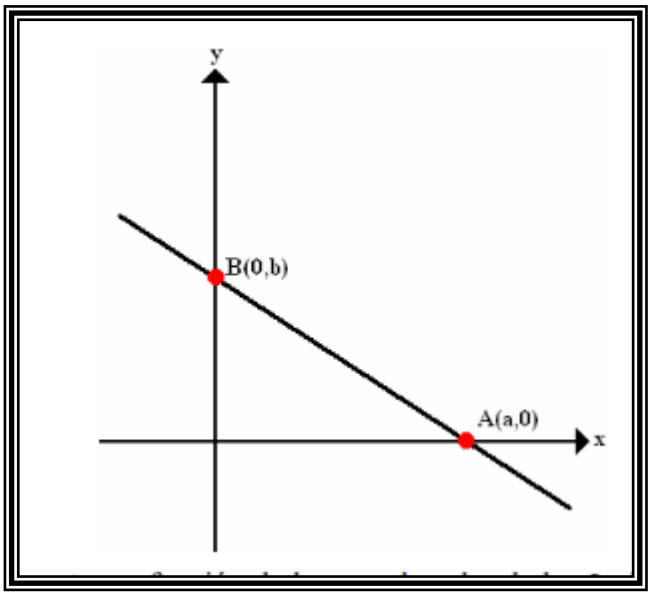
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad x_1 \neq x_2$$

Por lo tanto, con esta pendiente y el punto $P_1(x_1, y_1)$, el problema se reduce a hallar la ecuación de una recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada. En consecuencia, sustituyendo este valor de la pendiente en la ecuación 1, obtenemos la ecuación 3, tal como se quería demostrar.

c) Ecuación simétrica de la recta.

Jiménez (2006, p. 74). Sean $a \neq 0$ y $b \neq 0$ los segmentos que una recta determina sobre los ejes *X* y *Y* como se muestra en la figura siguiente, es

decir, sus intercepciones.



Entonces $(a, 0)$ y $(0, b)$ son dos puntos de la recta. Por lo tanto el problema de obtener la ecuación de una recta cuando se conocen los segmentos que determina sobre los ejes se reduce a hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos y tenemos, por la ecuación 3:

$$\boldsymbol{y - 0 = \frac{0 - b}{a - 0}(x - a)}$$

de donde,

$$ay = -bx + ab$$

Trasponiendo – $\boldsymbol{bx}$ al primer miembro y dividiendo por *ab*, obtenemos:

$$ay + bx = ab$$

$$\frac{ay}{ab} + \frac{bx}{ab} = \frac{ab}{ab}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Esta ecuación es la llamada ecuación simétrica de la recta de aquí el

siguiente:

Teorema: La recta cuyas intersecciones con los ejes *X* y *Y* son $a \neq 0$ y $b \neq 0$, respectivamente, tiene por ecuación:

Ecuación Simétrica 4: $\boldsymbol{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$

Esta forma de la ecuación de la recta se llama *ecuación simétrica* de la recta y tiene la ventaja de que podemos ver explícitamente en ella los puntos en los que la recta corta a los dos ejes, en efecto, si hacemos $x = 0$, obtenemos *y* = *b,* y con $y = 0$, obtenemos *x* = *a,* es decir, la recta corta al eje *Y* en *y* = *b* y corta al eje *X* en *x* = *a.*

Ejemplo:

a) Encontrar los puntos de intersección de la recta *5x* + *8y* -6 = 0 con los ejes.

Solución:

Pasamos el término independiente del otro lado de la ecuación y dividimos entre el:

$$5x + 8y - 6 = 0$$

$$5x + 8y = 6$$

$$\frac{5x}{6} + \frac{8y}{6} = \frac{6}{6}$$

$$\frac{x}{\frac{6}{5}} + \frac{y}{\frac{3}{4}} = 1$$

así que la recta corta a los ejes en $\left(\frac{6}{5}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{3}{4}\right)$.

1.9.2. Forma general de la ecuación de una recta.

Según Oteyza (2011, p. 53). La forma de la ecuación de la recta que cubre todas las rectas ya sean estas rectas verticales como a las que no lo son. Esta forma es la *ecuación general* de la recta y se obtiene pasando todos los términos de la ecuación a un miembro de manera que este quede igualado a cero.

Ecuación general de la recta 5: $Ax + By + C = 0$

En donde ya sea *A* o *B* debe ser diferente de cero y *C* puede o no ser igual a cero. Recordemos que dos ecuaciones son *equivalentes* cuando obtenemos una a partir de la otra efectuando las operaciones siguientes:

- Sumar la misma cantidad (que puede ser una expresión algebraica) de ambos lados de una ecuación.
- Multiplicar ambos lados de una ecuación por la misma cantidad distinta de cero.

Dos ecuaciones que son equivalentes representan el mismo lugar geométrico, en el caso de ecuaciones lineales en dos variables, representan la misma recta.

Observa que la ecuación general de la recta no es única, ya que si multiplicamos la ecuación anterior por una constante λ distinta de cero, obtenemos la ecuación:

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$$

que es de la misma forma que la anterior. Así, las tres ecuaciones siguientes son equivalentes y todas están en la forma general:

$$3x - 6y + 12 = 0$$

$$x - 2y + 4 = 0$$

$$-x + 2y - 4 = 0$$

y representan a la recta cuya ecuación pendiente-ordenada al origen es:

$$y = 2x + 2$$

y esta ecuación es equivalente a las anteriores, pues se obtiene a partir de cualquiera de las anteriores utilizando sucesivamente las dos operaciones enunciadas anteriormente.

Ejemplo:

II. Escribir la ecuación general de la recta que pasa por *P(* -3,2) y tiene pendiente 8.

Solución: La ecuación punto-pendiente de la recta es

$$y - 2 = 8(x + 3)$$

efectuando las operaciones y pasando todos los términos de un lado de la ecuación obtenemos la ecuación en la forma general:

$$8x - y + 26 = 0$$

2.9.2.1. Posiciones relativas de dos rectas.

Ahora consideremos las posiciones relativas de dos rectas, cuyas ecuaciones pueden ponerse en las formas generales:

$Ax + By + C = 0$ (1)

$A´x + B´y + C´ = 0$ (2)

“En particular, determinamos las condiciones analíticas bajo las cuales estas dos rectas son: a) paralelas; b) perpendiculares; c) coinciden; d) se cortan en uno y solamente en un punto.

a) La pendiente de (1) es $-\frac{A}{B}$ si $B \neq 0$, y la pendiente de (2) es $-\frac{A´}{B´}$ si $B´ \neq 0$. Por lo tanto la condición necesaria y suficiente para que las rectas (1) y

(2) sean paralelas es que

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A´}{B´}$$

o sea,

$$-\frac{A}{A´} = \frac{B}{B´}$$

es decir, los coeficientes de x y y deben ser proporcionales.

Si $B = 0$, la recta (1) es paralela al eje Y. Si la recta (2) es paralela a la (1) , también es paralela al eje *Y,* luego también $B´ = 0$.

En este caso la última proporción establecida no tiene sentido; lo mismo sucede si *A* y *A´* son cero, es decir, si ambas rectas son paralelas al eje *X.* Pero, si escribimos esta relación en la forma

$$AB´ - A´B = 0,$$

tenemos una relación verdadera para todos los casos". Lehmann (1994, p. 67).

"Dos rectas l_1 y l_2 con pendientes m_1 y m_2, respectivamente, son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales". Jiménez (2010, p. 55).

$$\boldsymbol{m_1 = m_2}$$

b) "Una condición necesaria y suficiente para que las rectas (1) y (2) sean perpendiculares es que

$$\left(-\frac{A}{B}\right)\left(-\frac{A´}{B´}\right) = -1$$

o sea,

$$AA´ + BB´ = 0$$

El estudiante debe demostrar que la última relación es también verdadera si una de las rectas es paralela al eje *Y* y, por lo tanto, no tiene pendiente."

Lehmann (1994, p. 68).

“Dos rectas l_1 y l_2 con pendientes m_1 y m_2, respectivamente, son perpendiculares si y solo si sus pendientes son reciprocas y de signo contrario”. Jiménez (2010, p. 56).

$$\boldsymbol{m_1 = -\frac{1}{m_2}, \qquad o\ bien, \qquad m_1 m_2 = -1}$$

c) Dos rectas coinciden si tiene un punto común y la misma dirección o pendiente. La intersección de la recta (1) con el eje X es el punto de abscisa $-\frac{C}{A}$, y la recta (2) es el punto de abscisa $-\frac{C'}{A'}$. Por tanto, debemos tener

$$-\frac{C}{A} = \frac{C'}{A'}$$

o sea

$$\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'} \qquad (3)$$

También, por ser las pendientes iguales,

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$$

o sea,

$$-\frac{A}{A'} = -\frac{B}{B'} \qquad (4)$$

De (3) y (4) tenemos

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \ ; \qquad (5)$$

es decir, dos rectas coinciden si y solamente si sus coeficientes correspondientes son proporcionales.

La proporción (5) se ha escrito suponiendo que todos los coeficientes de las ecuaciones (1) y (2) son diferentes de cero. Si, en vez de esto, uno o más coeficientes son cero, esta proporción no tiene sentido en su totalidad o en parte. Pero si escribimos

$A = kA'$; $B = kB'$; $C = kC'$

en donde *k* es una constante diferente de cero, obtendremos relaciones verdaderas para todos los casos.

d) Geométricamente, dos rectas se cortan en uno y solamente en un punto en el caso de que no sean paralelas. Analíticamente, si las rectas (1) y (2) no son paralelas, del apartado (a) anterior se deduce que

$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$, o sea, que $AB' - A'B \neq 0$

Podemos hacer el resumen de los resultados anteriores en el siguiente teorema:

"Teorema: Si las ecuaciones de dos rectas son $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$, las relaciones siguientes son condiciones necesarias y suficientes para:

V. *Paralelismo,* $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$, o sea, que $AB' - A'B = 0$

VI. *Perpendicularidad,* $AA' + BB' = 0$

VII. *Coincidencia,* $A = kA'$; $B = kB'$; $C = kC'$

VIII. *Intersección en uno y solamente un punto,* $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$, o sea, que $AB' - A'B \neq 0$." Lehmann (1994, p. 68).

Ejemplo:

La ecuación de una recta *l* es $5x - 7y + 11 = 0$. Escribir la ecuación que representa a todas las rectas paralelas *l*. A partir de esta última ecuación hallar la de la recta paralela a *l* y que pasa por el punto (4,2).

Solución: Representamos por $Ax + By + C = 0$ la ecuación de todas las rectas paralelas a *l*. Por lo estudiado anteriormente se verifica que

$$\frac{A}{5} = \frac{B}{7}\text{, o sea, } B = -\frac{7}{5}A$$

Por lo tanto, la ecuación de todas las rectas paralelas a *l* es

$$Ax - \frac{7A}{5}y + C = 0$$

De donde,

$$5x - 7y + \frac{5C}{A} = 0$$

O sea

$$5x - 7y + k = 0 \qquad (6)$$

En donde $k = \frac{5C}{A}$ es una constante arbitraria.

Si la recta (6) debe pasar por el punto (4,2), las coordenadas deben satisfacer la ecuación (6). Por lo tanto:

$$5(4) - 7(2) + k = 0$$

$$20 - 14 + k = 0$$

$$k = -6$$

De donde $k = -6$, y la recta buscada es

$$5x - 7y - 6 = 0$$

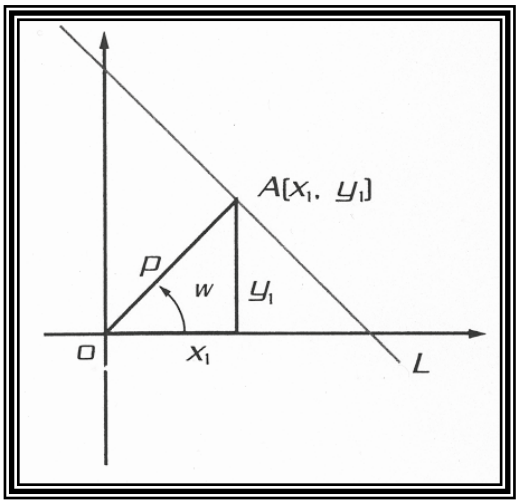
2.9.3. Forma normal de la ecuación de la recta.

Según el libro del Colegio Nacional de Matemáticas (2010, p. 319). Sea $\overline{OA}$

un segmento perpendicular a la recta $Ax + By + C = 0$ de longitud *p,* y *w* el ángulo determinado por el segmento y el eje X.

La recta *L* queda determinada por la longitud de su perpendicular trazada desde el origen y el ángulo positivo W que la perpendicular forma con el eje de las *x.* La perpendicular OA a la recta *L,* representada por *P,* se *considera siempre positiva* por ser una distancia. El ángulo W engendrado por *OA* varia de 0°≤ W < 360°.

Si damos valores a *p* y *W*, la recta *L* trazada por $A(x_1, y_1)$ queda determinada por la ecuación de la recta en su *forma normal* que se obtiene en la forma siguiente:



Observando la figura anterior, tenemos:

$\cos w = \frac{x_1}{p}$ $\sin w = \frac{y_1}{p}$

Despejamos: Despejamos:

$x_1 = p\cos w$ $y_1 = p\sin w$

Sustituimos los dos valores anteriores en $A = (x_1, y_1)$, con lo cual obtenemos las coordenadas del punto *A,* que son:

$$A = (p\cos W, p\sin W)$$

Par su parte, la pendiente *m* de *OA* es:

$$m = \tan W$$

Como la recta *L* es perpendicular a la recta *GA,* sus pendientes están relacionadas con:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

es decir, *la recíproca con signo cambiado.* Como ya sabemos que la pendiente de OA es $\tan W$, la inversa de esta función con signo cambiado de la recta *L* perpendicular a *GA* es:

$$-\cot W$$

de donde,

$$m = -\cot W = \frac{\cos W}{\sin W}$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente los valores de x_1, y_1 y de *m*, queda:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - p \sin W = -\frac{\cos W}{\sin W}(x - p \sin W)$$

Quitamos el denominador $\sin W$ y desarrollamos:

$$y \sin W - \mathrm{p} \sin^2 W = -x \cos W + \mathrm{p} \cos^2 W$$

Agrupando:

$$x \cos W + y \sin W = \mathrm{p} \sin^2 + \mathrm{p} \cos^2 W$$

Factorizamos el segundo miembro:

$$x\cos W\ + y\sin W = p(\sin^2 W + \cos^2 W)$$

Aplicamos la identidad pitagórica:

$$\sin^2 W + \cos^2 W = 1$$

Sustituimos:

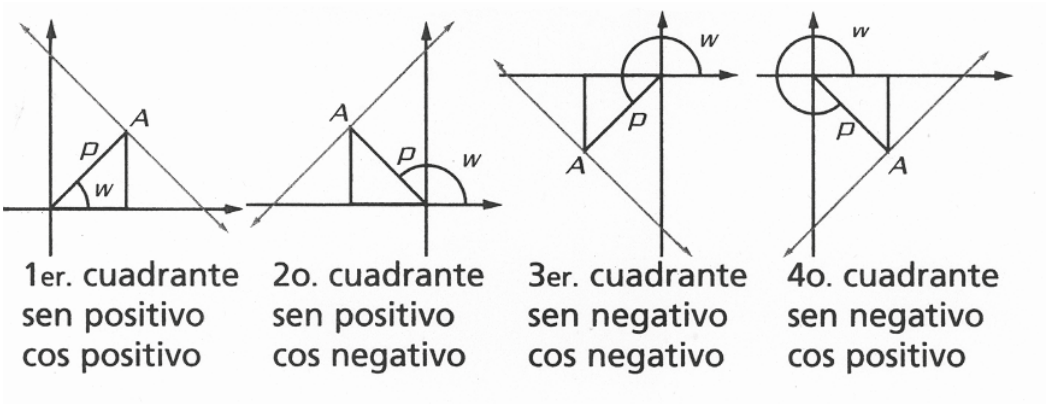
$$x\cos w\ + y\sin w = p$$

De donde

Forma normal de la ecuación de la recta 6: $\boldsymbol{x\cos w\ + y\sin w - p = 0}$

Relación en la que w y *p* son las constantes arbitrarias o parámetros, y el valor de $\sin w$ y $\cos w$ puede ser positivo o negativo, de acuerdo con el cuadrante en que este el lado terminal del ángulo w.

Recordando el círculo geométrico, tenemos:



Ejemplo:

I. Determina la ecuación de la recta en su forma normal, con w = 60° y p = 3 y grafica.

Solución:

Sustituimos en:

$x \cos w \ + y \sin w - p = 0$

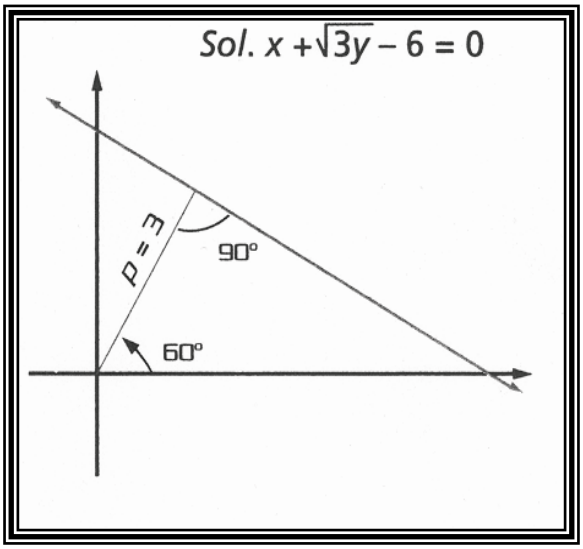
$x \cos 60° \ + y \sin 60° - 3 = 0$

Como $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} y - 3 = 0$

$x + \sqrt{3}\, y - 6 = 0$



2.9.3.1. Procedimiento para obtener la forma normal de una recta a partir de su forma general.

Según Lehmann (1994, p. 75). Usualmente, la ecuación de una recta en su forma general $Ax + By + C = 0$, queremos representarla en su forma normal $x \cos w \ + y \sin w - p = 0$.

Con $Ax + By + C = 0$, siendo K una constante distinta de cero, procedemos como sigue:

Dividimos cada término de $Ax + By + C = 0$ entre K; así tenemos:

$\frac{Ax}{K} + \frac{By}{K} + \frac{C}{K} = 0$; identificando esta expresión con la forma normal, obtenemos:

$\cos w = \frac{A}{K}$, $\sin w = \frac{B}{K}$, $-p = \frac{C}{K}$ y $p = -\frac{C}{K}$

Elevamos al cuadrado:

$\cos w = \frac{A}{K}$ Obtenemos $\cos^2 w = \frac{A^2}{K^2}$

$\sin \mathrm{w} = \frac{A}{K}$ Obtenemos $\sin^2 \mathrm{w} = \frac{B^2}{K^2}$

Sumamos miembro a miembro de la igualdad:

$\cos^2 w + \sin^2 \mathrm{w}^2 = \frac{A^2}{K^2} + \frac{B^2}{K^2}$; como $\cos^2 w + \sin^2 \mathrm{w} = 1$, sustituyendo nos queda:

$$1 = \frac{A^2}{K^2} + \frac{B^2}{K^2}$$

Quitamos el denominador y despejamos $K^2 = A^2 + B^2$; $K = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$ y sustituyendo el valor de K tenemos:

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{Ax}}{\pm\sqrt{\boldsymbol{A^2 + B^2}}} + \frac{\boldsymbol{By}}{\pm\sqrt{\boldsymbol{A^2 + B^2}}} + \frac{\boldsymbol{C}}{\pm\sqrt{\boldsymbol{A^2 + B^2}}} = \mathbf{0}}$$

Fórmula para obtener la forma normal de una recta a partir de su forma general.

Para escoger el signo que precederá al radical $\pm\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}$ se toman en consideración los conceptos siguientes:

c. *El signo que se anteponga al radical debe ser el signo contrario al que tiene el coeficiente de* C.

Ejemplo:

En $x + y - 4 = 0$, como $C = -4$, el signo que precederá al radical será el (+).

d. *Si sucede que:*

C = 0, A ≠ 0, *B* ≠ 0; en este caso el signo del radical será el que tiene *B.*

Ejemplo:

Determina la forma normal de la recta $12x - y - 4 = 0$ así como los valores de *p,* W, y traza la gráfica.

Sustituimos en:

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

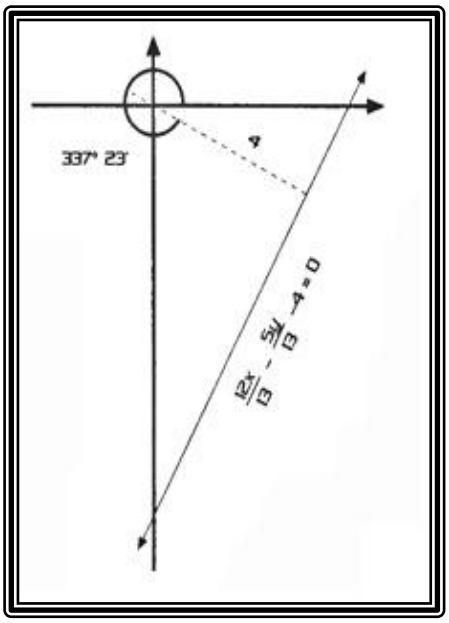
$A=12;\ B=-5;\ C=-52;\ \pm\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}=\sqrt{169}=13$

Como el coeficiente de C esta precedido del signo (-), tomamos el signo positivo del radical:

$$\frac{12x}{13}-\frac{5y}{13}-\frac{52}{13}=0$$

$$\frac{12x}{13}-\frac{5y}{13}-4=0$$

de donde,



$\cos w=\frac{12}{13};\ \sin w=-\frac{5}{13};$

$p=|-4|;\ p=4$

Como el seno w es negativo y coseno de w es positivo, el ángulo w debe medirse en el cuarto cuadrante; su valor es 337° 23'.

$\cos w=\frac{12}{13}=0{,}9230 \qquad \sin w=-\frac{5}{13}=-0{,}3846$

$w=22°37´ \qquad w=-22°37´$

$w=359°60´-22°37´$

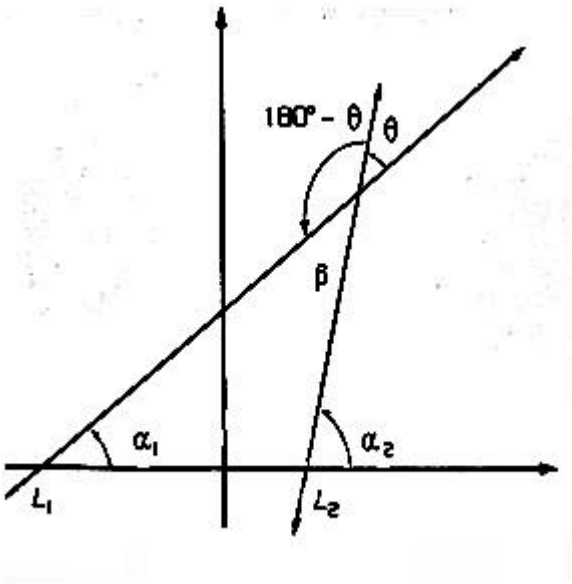
$w=337°23´$

Sol. $\frac{12x}{13}-\frac{5y}{13}-4=0$

$w=337°23´;\ p=4$

2.10. Ángulo de intersección entre dos rectas.

Según Lehmann (1994, p. 21). Si la recta *Ll,* con ecuación $y = m_l x + bl,$ se interseca con la recta $L_2,$ con ecuación $y = m_2 x + b_2,$ se forman dos ángulos, el ángulo θ y su suplementario 180°- θ.



Para obtener el valor del ángulo θ procedemos en la forma siguiente:

Como "en todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a él":

$$\alpha_1 + \beta = \alpha_2$$

Despejando:

$$\beta = \alpha_2 - \alpha_1$$

Como $\beta = \theta$ por ser opuestos por el vértice queda,

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

El problema lo resolveremos usando la función tangente; en consecuencia, podemos indicar que:

$\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1).$

En trigonometría se demostró que la tangente de la diferencia de dos ángulos es:

$$\tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + (\tan\alpha_1)(\alpha_2)}$$

Como $\tan \alpha_2 = m_2$; $\tan \alpha_1 = m_1$

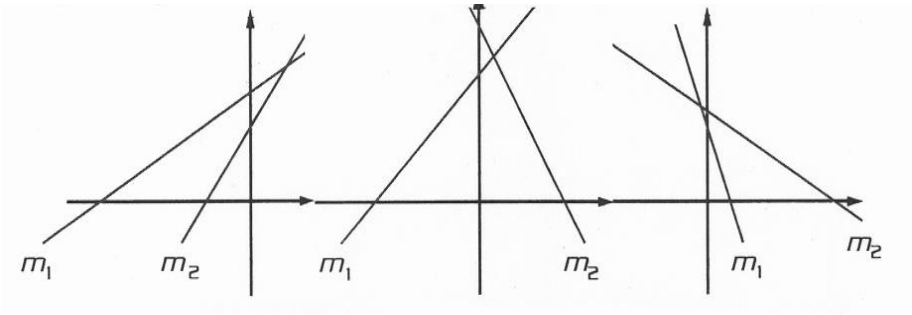
Sustituyendo queda:

Fórmula para obtener el valor del ángulo θ:

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + (m_1)(m_2)}$$

Para aplicar esta relación se debe tener sumo cuidado al determinar cuál es la pendiente m_1 y cual m_2. Para ello se deben seguir las indicaciones siguientes:

d. Si las dos pendientes son *positivas,* m_2 es la mayor y m_2 la menor.
e. Cuando una pendiente es *positiva* y la otra *negativa,* m_2 es la pendiente negativa y m_1 la positiva.
f. Cuando las dos pendientes *son negativas,* m_2 tiene mayor valor absoluto.



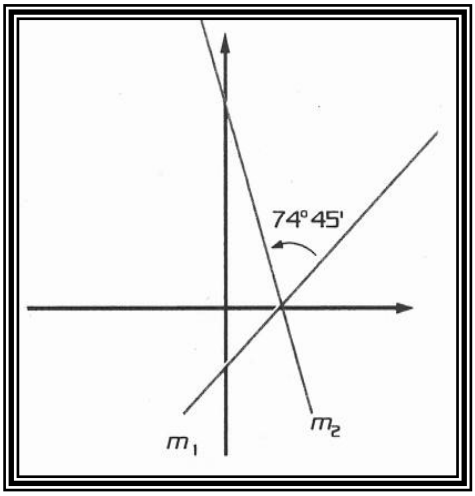
Observa: m_2 es la pendiente de la recta que forma el ángulo mayor con el sentido positivo del eje de las x.

CONCLUSIÓN:

1. Expresamos las ecuaciones de las rectas en su *forma común.*
2. Trazamos las gráficas.
3. Determinamos cual es m_1 y cual m_2. Sustituimos en la fórmula.
4. Obtenemos el valor del ángulo de la función tangente en las tablas de valores naturales de las funciones trigonométricas.

Ejemplo:

Determina el valor del ángulo que forman las rectas $3x + y - 6 = 0$ con $2x - 3y + 6 = 0$ (ángulo menor).



Solución:

Pendiente *m* de la recta 3x + y – 6 = 0:

$$y = -3x + 6$$

De donde $m = -3$

Pendiente *m* de la recta

2x – 3y – 4 = 0:

$$-3y = -2x + 4$$

$$-y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

De donde $m = \frac{2}{3}$

Determinamos cual es m_1 y cual m_2.

Como una es positiva y la otra negativa, m_2 es la pendiente negativa y m_1 la positiva; en consecuencia:

$m_2 = -3$ y $m_1 = \frac{2}{3}$

Sustituimos en la fórmula:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + (m_1)(m_2)}$$

$$\tan\theta = \frac{-3 - \left(\frac{2}{3}\right)}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)(-3)} = \frac{\frac{-9-2}{3}}{1 + (-2)} = \frac{\frac{-11}{3}}{-1} = \frac{-11}{-3} = 3{,}666$$

$$\theta = 74° 45´$$

2.11. Familia de rectas.

La ecuación de una recta, como ya lo estudiamos, queda determinada por dos condiciones independientes: dos puntos, la pendiente y un punto, la pendiente y su intersección con el eje, y la intersección de la recta con los dos ejes coordenados. En consecuencia aceptamos que una recta que satisface una sola condición, *no es una recta única,* ya que hay infinidad de rectas que cumplen la misma condición.

Todas las rectas que satisfacen una condición geométrica previamente establecida forman una *familia* o *haz de rectas.*

En la ecuación de la recta $y = mx + b$, las constantes *m* y *b* son los parámetros. Si asignamos un valor particular a uno de los parámetros, se obtiene la ecuación de una familia de rectas del otro parámetro que identificaremos como *K (K* debe ser un número real).

Ejemplo:

Si *m* = 3, resulta y = *3x* + *K,* que es la familia de todas las rectas paralelas cuya pendiente *m* es igual a 3.

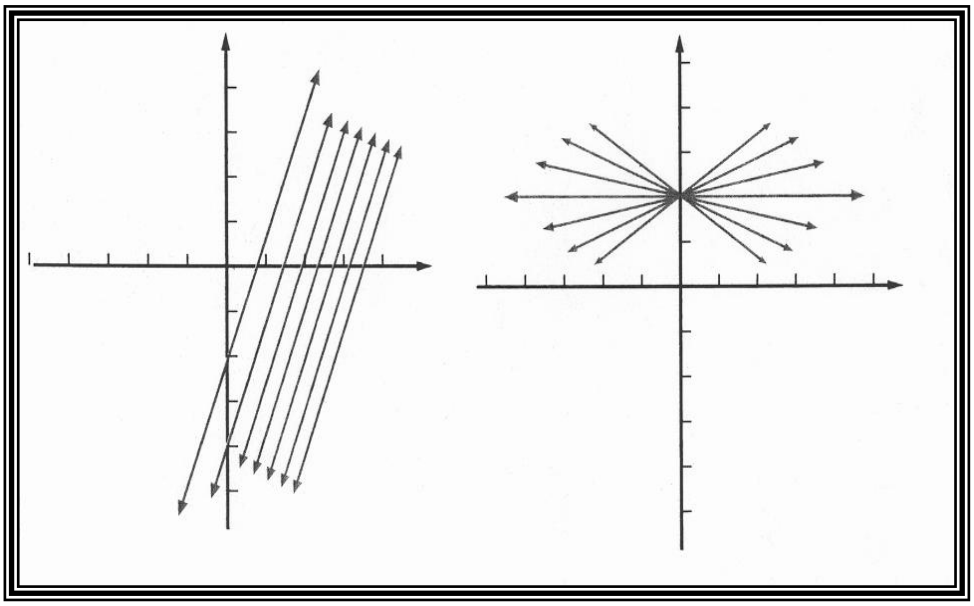
En forma semejante, si en la ecuación y = mx + *b* ponemos *b* = 2, resulta y = *Kx* + 2, que es la ecuación de la familia o haz de rectas cuya intersección con el eje *y* es la misma, en este ejemplo.

Observa que hay una recta *x* = 0 (el eje *y*) que no está incluida en $y = Kx + 2$, puesto que se necesitaría que $k = \infty$, lo cual no está permitido puesto que indicamos que *K* debe ser un numero real.

Sol. *y* = *Kx* + 2, con la recta *x* = 2, que también forma parte de la familia.

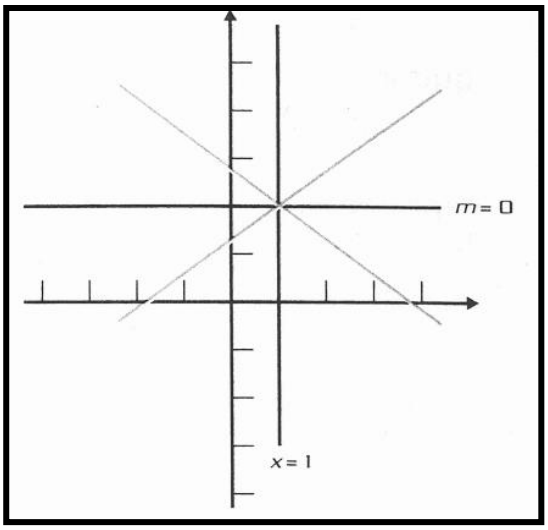
A veces, una familia de rectas tiene excepciones, que deben indicarse para

hacer las notar en la solución, como en el ejemplo que se acaba de analizar.



Ejemplo:

Determina la ecuación de la familia de rectas que pasan a través de (1, 2). Bosqueja la gráfica.



Solución: *Sol.* $y - 2 = K(x, 1)$, con la recta x = 1.

Utilizamos la ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Esta familia se representa analíticamente con la ecuación:

$$y - -2 = m(x - 1)$$

Como a *m* se le puede asignar cualquier valor dentro de los números reales, queda:

$$y - 2 = K(x - 1)$$

m no está definida para una recta paralela al eje *y*; por ello, la ecuación anterior no incluye a la recta *x = 1*, que también pasa por el punto (1, 2) y, por consiguiente, pertenece a la familia:

Ejemplo:

Determina la ecuación de la familia de las rectas que son paralelas a $3x + 4y + 2 = 0$. Haz la gráfica.

Solución: *Sol.* $y = -\frac{3}{4}x - K$

Utilizamos la ecuación de la recta pendiente-intersección *y = mx + b*

Quitamos el denominador 4 y queda:

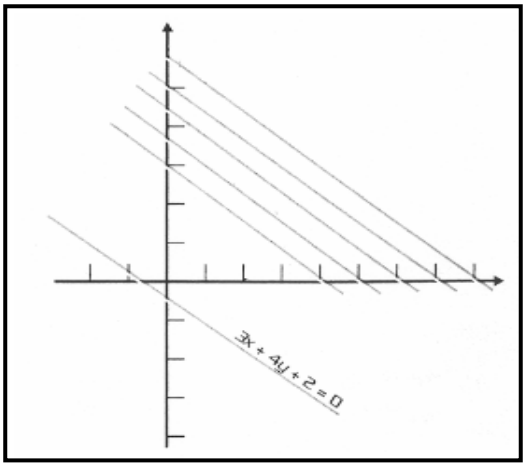
3x + 4y + *K* = 0

Como a *b* se le puede asignar cualquier valor dentro de los números reales, queda:

$$y = mx + K$$

$$3x + 4y + 2 = 0$$

$$4y = -3x - 2$$



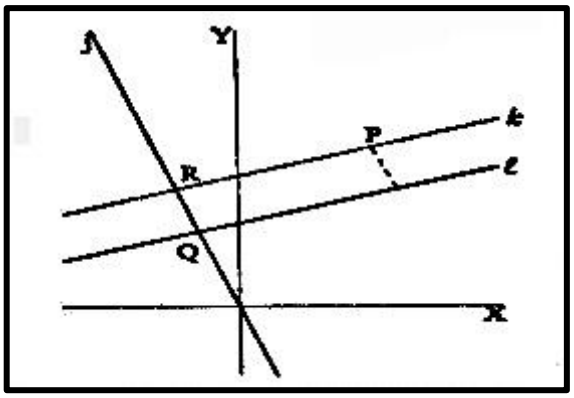
$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{2}{4}$$

de donde la pendiente de cada miembro de la familia debe ser: $-\frac{4}{3}$ y el valor de *K* arbitrario. De esta forma la familia se representa con:

$y = -\frac{3}{4}x - K$ O en la forma general $3x + 4y + K = 0$.

2.12. Aplicaciones de la forma normal de la ecuación de la recta.

Zambrano (2012, p. 56). Consideremos una recta *l* cualquiera y un punto P (X_l, Y_l) que no esté en la recta. La distancia de la recta *l* a *P* se define como la *distancia* de *P* al punto de *l* que esté más cercano a él. Construyamos una recta *k,* paralela a *l* que pase por *P y* la recta *j*, perpendicular a *l* que pasa por el origen.



La recta *j* corta a *l* y a *k* en *Q* y *R* respectivamente. Observa en la figura que la distancia de *P* a *l* es la misma que la distancia de *Q* a *R.* Para encontrar esta distancia debemos encontrar las coordenadas de *Q* y de *R* y aplicar la fórmula de la distancia entre dos puntos.

Para encontrar las coordenadas de *Q* y *R,* escribimos las ecuaciones de *l, k* y j:

$$l: Ax + By + C = 0$$

$$k: Ax + By + C' = 0$$

$$j: Bx - Ay = 0$$

En la ecuación de *k* aparece una constante *C'* que determinaremos posteriormente. Resolviendo simultáneamente las ecuaciones de *l* y j, obtenemos las coordenadas de *Q:*

$$Q\left(\frac{-AC}{A^2 + B^2}, \frac{-BC}{A^2 + B^2}\right)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones de *k* y *j*, obtenemos las coordenadas de R:

$$R\left(\frac{-AC´}{A^2+B^2},\frac{-BC´}{A^2+B^2}\right)$$

Calculamos ahora el cuadrado de la distancia de *R* a *Q:*

$$d^2=\frac{(AC-AC´)^2}{(A^2+B^2)}+\frac{(BC-BC´)^2}{(A^2+B^2)},$$

Simplificando la expresión anterior, obtenemos:

$$d^2=\frac{(C-C´)^2}{(A^2+B^2)},$$

Extrayendo l a raíz cuadrada, encontramos:

$$d=\frac{(C-C´)}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

Para determinar *C′*, usamos el hecho de que $P(x_1, y_1)$ pertenece a K, así que (x_1, y_1) satisface la ecuación de K*:*

$$Ax_1+By_1+C´=0$$

de donde,

$$C´=-Ax_1-By_1$$

Sustituyendo el valor de *C′* en la formula de la distancia, obtenemos:

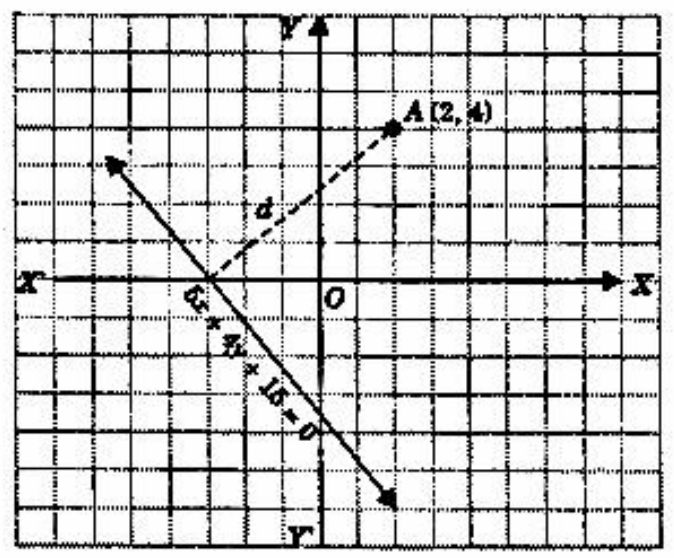
$$d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

Como la distancia debe ser un número no negativo, el signo de la raíz se escoge para que *d* sea positiva.

Ejemplo:

1. Determinar la distancia de la recta $5x + 4y + 15 = 0$ al punto A (2, 4).

Al graficar los datos dados, tenemos:



La distancia pedida se considera absoluta, es decir, no dirigida. Al sustituir los datos en la ecuación para distancia absoluta, obtenemos:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|5x + 4y + 15|}{\sqrt{(5)^2 + (4)^2}}$$

Y al sustituir las coordenadas del punto A (2, 4), tenemos:

$$d = \frac{|5(2) + 4(4) + 15|}{\sqrt{25 + 16}}$$

$$d = \frac{|10 + 16 + 15|}{\sqrt{41}}$$

$$\therefore\ d = \frac{|41|}{\sqrt{41}}$$

La distancia de la recta $5x + 4y + 15 = 0$ al punto A (2, 4) es:

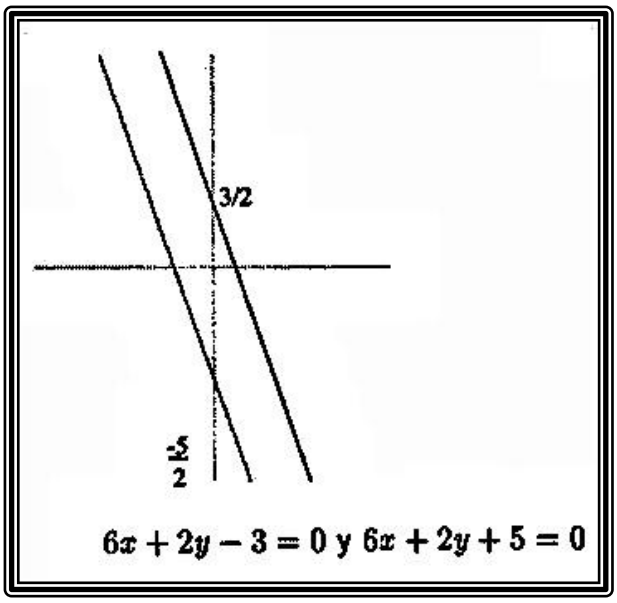
$$d = \frac{|41|}{\sqrt{41}}$$

2.13. Distancia entre rectas paralelas.

Según el Colegio Nacional de Matemáticas (2010, p. 327). Para encontrar la distancia entre dos rectas paralelas, tomamos un punto en una de ellas y encontramos la distancia de ahí a la otra recta.

Ejemplo:

Encontrar la distancia entre las rectas *6x + 2y - 3 = 0* y *6x + 2y + 5 = 0*.



Solución: Las rectas son paralelas, pues mediante un cálculo directo se ve que la pendiente de ambas es $m = -3$. Elegimos un punto cualquiera en la primera recta. Para ello, tomamos cualquier valor de *x,* por ejemplo *x* = 1, lo sustituimos en la ecuación y encontramos el valor de *y* correspondiente:

$$6(1) + 2y - 3 = 0$$

$$y = -\frac{3}{2}$$

Así que el punto P $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ pertenece a la primera recta. Calculamos ahora la distancia de *P* a la segunda recta:

$$D = \frac{6(1) + 2\left(-\frac{3}{2}\right) + 5}{\sqrt{6^2 + 2^2}} = \frac{8}{\sqrt{40}} = \frac{8}{2\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

Así que la distancia entre las rectas es: $\frac{4}{10}$

2. DIAGNÓSTICO DEL APRENDIZAJE DE LA LÍNEA RECTA.

Los siguientes criterios e indicadores servirán para diagnosticar el nivel de conocimiento del aprendizaje de la línea recta.

2.1. Aprendizaje de la historia de la línea recta.

La historia evolutiva de la línea recta es una parte muy importante en el aprendizaje de la línea recta, pues conocer cómo surgió su estudio, da una clara idea de cómo se presentó, y se presenta en la actualidad este fenómeno, además de conocer quiénes fueron los talentos humanos que brindaron sus aportaciones para descubrir la línea recta, da paso a valorar su vida y obra. Todo esto se podrá diagnosticar a través de los siguientes indicadores:

2.1.1. Aprecie la vida y obra de los talentos humanos que crearon la línea recta.
2.1.2. Examine la importancia de la evolución histórica de la línea recta.
2.1.3. Construya una agenda de eventos significativos en la historia de la línea recta.

2.2. Aprendizaje de conocimientos previos en el estudio de la línea recta.

Al momento de diagnosticar el aprendizaje de la línea recta, se debe tomar en cuenta los conocimientos previos antes de empezar con el estudio de la línea recta ya que el estudiantado debe tener claro lo que es la línea recta con el fin que se facilite su estudio, para diagnosticar este criterio, se utilizarán estos indicadores:

2.2.1. Defina lo que es un segmento de recta.
2.2.2. Represente un par ordenado en el plano cartesiano.
2.2.3. Calcule la distancia entre dos puntos.
2.2.4. Determine la división de un segmento en una razón dada.
2.2.5. Construya un concepto de la pendiente de una recta.
2.2.6. Calcule la pendiente de una línea recta.
2.2.7. Compare y contraste los distintos tipos de segmentos.

2.3. Aprendizaje de la línea recta.

Al momento de diagnosticar el aprendizaje de la línea recta, se debe considerar que existen diversas definiciones propuestas por múltiples autores, pero sin duda todas estas convergen en una misma idea sobre la línea recta, es por esto que se vuelve indispensable el dominio de esta definición para poder evidenciar el aprendizaje de la línea recta, para diagnosticar este criterio, se utilizarán estos indicadores:

2.3.1. Defina el concepto de la línea recta.
2.3.2. Identifique los elementos que intervienen en el estudio de la línea recta.

2.4. Aprendizaje de las ecuaciones de una recta.

El aprendizaje de las ecuaciones de la línea recta son un criterio sumamente importante pues permiten afianzar y fortalecer la definición de la línea recta, además la confusión entre las ecuaciones de la línea recta es una dificultad

que se presenta a menudo, he aquí la necesidad de identificar cada uno de las ecuaciones de la línea recta, ya que tener la capacidad de diferenciar entre cada una de las ecuaciones de la línea recta, para lo cual necesitamos de los siguientes indicador:

2.4.1. Identifique la ecuación general de una línea recta.
2.4.2. Describa la ecuación normal de una recta.
2.4.3. Relacione la ecuación normal de una línea recta con la ecuación general de una línea recta.
2.4.4. Clasifique las otras formas de la ecuación de la recta.

2.5. Aprendizaje de la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares o paralelas.

Dentro del campo de la matemática como en la vida diaria, se puede evidenciar las condiciones necesarias y suficientes para que dos rectas sean paralelas y perpendiculares, ya que el aprendizaje de la línea recta nos permitirá resolver problemas de la vida cotidiana por la cual nos vamos apoyar en los siguientes indicadores:

2.5.1. Reconozca la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares.
2.5.2. Identifique la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas.
2.5.3. Relaciona la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas y la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares.

2.6. Aprendizaje de familias de rectas.

El siguiente indicador se plantea para diagnosticar el aprendizaje de las familias de rectas.

2.6.1. Reconozca las familias de rectas.

2.7. Aprendizaje de la bibliografía de autores sobre la línea recta.

Es imperativo el aprendizaje de los diferentes autores acerca de la línea recta, puesto que teniendo una bibliografía muy amplia facilitara el aprendizaje de la línea recta, además al adquirir estos conocimientos, se vuelve mucho más sencilla la diferenciación de las diferentes ecuaciones de la línea recta, el diagnóstico del aprendizaje de la bibliografía acerca de la línea recta se llevará a cabo en función de los siguientes indicadores:

2.7.1. Clasifique la bibliografía de autores, que faciliten el aprendizaje de la línea recta.

2.8. Aprendizaje de material didáctico para el estudio de la línea recta.

2.8.1. Identifique el material didáctico que se utiliza en el estudio de la línea recta.

3. EL PROYECTOR DIGITAL COMO RECURSO DIDÁCTICO.

3.1. Historia.

Historia del proyector digital. (s. f.). En tipos de proyectores y su historia. Recuperado de http://historiadelproyector.site90.net/

En más de 50 años, desde la invención de la televisión, la forma en que se genera la imagen y los colores dentro de estos aparatos ha cambiado poco, particularmente en su principio de funcionamiento basado en los pesados y voluminosos CRT (Tubos de Rayos Catódicos).

A principios de 1980, apareció una nueva tecnología para el despliegue de imágenes de video llamada Pantallas de Matriz Activa de Cristal Líquido de Transistores de Película Fina (TFT), la cual es un dispositivo de imagen de tipo transmisivo. En realidad los primeros descubrimientos del fenómeno del

cristal líquido vienen de 1888 cuando un botánico Austriaco descubrió que un derivado del colesterol tenía compuestos que reflejaban muchas propiedades de cristales anisotropitos, algunas de las cuales, como la velocidad de transmisión de la luz, variaba dependiendo en la dirección en que se midiera. En un cristal anisotropito, el orden en que los átomos se acomodan para formar una estructura cristalina, tiene un efecto llamado birrefringencia, lo cual significa que cuando la luz pasa por el cristal, se divide en dos rayos de luz polarizada. Un prisma es un ejemplo simple de una estructura anisotropita, sin embargo, la luz es dividida en sus componentes del espectro en lugar de dos rayos. Lo que hizo de estos compuestos muy inusuales es que demostraban propiedades típicas de estructuras cristalinas sólidas mientras se encontraban en estado líquido.

Por más de 70 años estos descubrimientos han permanecido dormidos ya que la industria y comercialización de los CRT se ha dedicado a refinar estos Tubos de Rayos Catódicos y la electrónica que los controla, prácticamente al límite. Luego en 1963, los ingenieros de RCA en su búsqueda por nuevas formas para desplegar imágenes, obtuvieron el gran descubrimiento al encontrar que si aplicaban una carga eléctrica en este compuesto de cristal líquido, su orientación aleatoria cambiaría a un perfecto orden estructurado, con el efecto de bloquear la luz. Luego en 1968, otro científico de RCA inventó el primer dispositivo práctico de despliegue de cristal líquido monocromático. A principios de los 80 apareció la primera pantalla de matriz pasiva de cristal líquido a color. Posteriormente, a finales de los 80, con la aparición de microprocesadores veloces, y con el desarrollo del Transistor de Película Fina (TFT), fue posible retener la carga eléctrica que polariza el cristal líquido y se obtuvo la primera pantalla de matriz activa a color, capaz de refrescar 30 cuadros por segundo, lo cual es indispensable para obtener video totalmente animado.

La tecnología, fue desarrollada por un físico norteamericano, el Dr. Larry Hornbeck, en 1977 y además poseedor de más de 27 patentes en el desarrollo de los CCD utilizados en las cámaras de video.

Esta tecnología está basada en el Chip DMD, Digital Micromirror Device, la cual consiste en un dispositivo de imagen reflectivo, construido con más de 508,000 micro espejos que se mueve cada uno a velocidades hasta de 1000 pulsos por segundo. Los primeros prototipos de proyectores DLP aparecieron en 1994, cuando el Phd. William E. Nelson desarrolló un proceso para utilizar el chip DMD en proyectores e impresoras digitales para la Texas Instruments Corporation de Dallas Texas.

Los sistemas de proyección han evolucionado dramáticamente en este tiempo. Actualmente contamos con importantes avances tanto en la tecnología de proyección digital, como es el sistema DLP (Digital Light Processing) desarrollado por Texas Instruments Corp., líder mundial en tecnología de proyección digital, que ha sido galardonada por varios premios, incluyendo un Emmy Award en Junio de 1998, por ser un gran desarrollo que revolucionará la industria del video.

Solamente 3 años después de este premio, y 6 años después de haber sido inventada, la tecnología DLP recibió en el año 2001, la certificación oficial de los estudios cinematográficos de Hollywood, para ser utilizada en la proyección de películas en formato de cine digital, al extraordinario proyector digital DLP de 3 Chips, desarrollado conjuntamente por Texas Instruments Corp. y Christie Digital Systems, el DigiPro. Actualmente existen unas 30 salas de cine en el mundo que utilizan y forman parte de un plan piloto que procura afinar detalles, para volverla más simple y accesible para la industria cinematográfica.

Aparte de la tecnología de proyección, también han surgido grandes avances en los sistemas de grabación y distribución de video, como es el caso del conocido reproductor de DVD, el cual además de contar con un formato de bajo costo, compacto y larga duración, también puede reproducir y conservar toda la calidad disponible en los formatos utilizados para la televisión, como lo es el formato Beta Cam SP, Beta Cam Digital, DVCPRO.

Actualmente, estos dispositivos LCD y DLP son empleados en novedosos y compactos televisores, monitores de computadoras, y sistemas de proyección para aplicaciones tan variadas como la educación, la informática y el entretenimiento. Los equipos de proyección para video y datos han sido los más favorecidos con esta tecnología ya que, la calidad de la imagen, el brillo y la portabilidad se han visto mejorados sustancialmente.

Sin duda alguna, la televisión evolucionará al punto de fusionarse con las telecomunicaciones, la informática y la realidad virtual, en nuestras labores cotidianas. Sin embargo, esta no llegará a su máxima expresión sin haber dado el próximo paso, la televisión de alta definición y lo último en la tecnología, la realidad inmersa en tercera dimensión.

3.2. Definición de proyector digital.

El proyector digital es un dispositivo encargado de recibir por medio de un puerto, las señales de video procedentes de la computadora, procesar la señal digital y descodificarla para poder ser enviada por medio de luz a unos micros espejos encargados de la proyección digital en alguna superficie clara.

Figura 2. Proyector, marca ViewSonic®, modelo PJ513DB, tamaño de pantalla hasta 167 pulgadas, 2200 Lumens.

Como apoyo a la comprensión del tema, te ofrecemos una animación sobre el funcionamiento interno de un proyector digital:

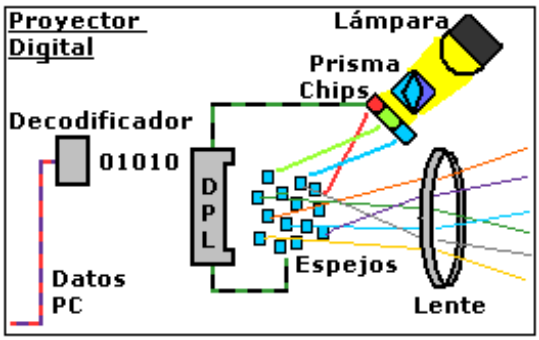


Figura 1. Animación del principio de funcionamiento interno en un proyector digital

- ✓ Los datos son enviados desde la computadora por medio del puerto de video a los circuitos del proyector digital.
- ✓ El dispositivo se encarga de la decodificación de señales digitales y arma una imagen digitalizada.
- ✓ Esta imagen se envía a un dispositivo denominado DPL ("*Digital Processing Light*") ó procesador digital de luz.
- ✓ Por medio de la luz blanca de la lámpara, un prisma toma luz y la divide en 3 colores por medio de chips para los colores básicos (rojo, verde y azul) y los dirige al DPL.
- ✓ El DPL reacciona a la luz enviada y mueve aproximadamente 1.3 millones de micro espejos, ello para crear la imagen de luz.
- ✓ Esta imagen luminosa pasa por el lente y es la que se puede proyectar hacia una superficie blanca.

3.3. Tipos de proyectores

e. Proyector de diapositivas en carrusel (incluye los proyectores estilo *tray*).

f. Proyector dual de diapositivas.

g. Proyector de diapositivas de formato grande.

h. Proyector 3D, proyector de última generación que muestra imágenes en una pantalla especial tratada de manera que las imágenes que proyecta envuelven al espectador dando la sensación de imagen envolvente. Recuperado de http://es.wikipedia.org/wiki/Proyector_de_v%C3%ADdeo

3.4. Características del proyector digital.

Shirley Cesar (2013). En proyector digital de Informática moderna. com. Recuperado de http://www.informaticamoderna.com/Proyector.htm

- Brillo: Se trata de la luminosidad que es capaz de proyectar, la medida utilizada es el Lumen (unidad de medida del flujo luminoso) y está estandarizado por la ANSI ("*Asociation National Standard Institue*"), por ello se maneja como X ANSI Lumen, actualmente alcanzan hasta 2500 Lumens.
- Capacidad de la lámpara: Se refiere al consumo en Watts y el tiempo de vida que se le garantiza en años.
- Distancia de alcance: Se mide en pulgadas (") y es la máxima distancia que puede visualizarse de manera correcta sin perder definición.
- Consumo: Es la cantidad total de energía que utiliza al funcionar, esto incluye la lámpara funcionando, el ventilador interno y todos los circuitos que intervienen. Se mide en Watts.
- Resolución: Es la cantidad máxima de píxeles que puede mostrar sin pérdida de definición de imagen. Se mide en píxeles ó Mega píxeles (1000000 píxeles).

3.5. Partes que componen el proyector

Internamente cuenta con los circuitos electrónicos necesarios para su correcto funcionamiento, mientras que externamente las partes que lo componen son las siguientes:

1. *Panel de controles:* Permite manipular las funciones del proyector, como posición, brillo, nitidez, etc.

2. *Cañón:* Se encarga de dirigir y proyectar las imágenes.
3. Cubierta: Protege los circuitos internos y da estética al proyector.
4. Interruptor: Enciende y apaga de manera mecánica el proyector.
5. Puertos: Permite la entrada de señales de video procedentes de la computadora, videocámaras, etc.
6. Conector de alimentación: Permite recibir el suministro de corriente eléctrica desde el enchufe.

3.6. Función del proyector

Shirley Cesar (2011). En Blog Proyector. Recuperado de http://proyecto-coljer-proyector.blogspot.com/p/que-funcion-cumple.html

Un proyector no solamente es utilizado en colegios y empresas sino que también puede ser utilizado en el hogar como forma de entretenimiento.

En los colegios es utilizado para proyecciones académicas al igual que las empresas y las universidades.

Su función principal es proyectar imágenes, videos o películas de tamaño pequeño al tamaño que lo deseen las personas.

3.7. Usos específicos del proyector digital

Se utilizan para visualizar la información que envía la computadora en una superficie plana y de gran tamaño, esto en clases, conferencias,

exposiciones, etc., ya que para esta actividad la pantalla de una Laptop ó un monitor CRT de una computadora es muy pequeño para visualizar a distancia. El proyector digital ha reemplazado los proyectores de acetatos convencionales.

3.7.1. Usos para un proyector LCD en el aula

Usos del proyector. (s. f.). En usos del proyector en el aula de ehowenespanol.com. Recuperado de http://www.ehowenespanol.com/usos-proyector-lcd-escuela-lista_146094/

Un proyector LCD se puede utilizar en una sala de clases para ver películas educativas, mostrar presentaciones de lecciones o incluso para que los estudiantes participen con diapositivas interactivas. Los administradores pueden utilizar un proyector LCD para mostrar una presentación de diapositivas de eventos escolares divertidos y para la interacción con los estudiantes o como una herramienta educativa en la formación docente. Muchos distritos escolares añaden proyectores LCD a sus aulas debido a la variedad de formas en que se pueden utilizar:

d. Pizarra

Cuando un proyector LCD se utiliza para mostrar una imagen en una pizarra, el profesor tiene la opción de utilizar marcadores de borrado en seco para dibujar sobre la imagen. Esto puede ser útil en una variedad de temas,

desde la demostración de una reacción química hasta para diagramar oraciones o etiquetar grupos de músculos en una clase de anatomía. Los estudiantes pueden utilizar marcadores de diferentes colores para participar. Por ejemplo, un profesor puede mostrar un punto en la pantalla y pedir a los alumnos que marquen los errores en la pizarra. Después de la demostración, la pizarra se puede borrar y el proyector LCD puede pasar a la siguiente imagen. Esta técnica es más fácil que usar un retroproyector, donde todas las imágenes se deben copiar en una placa transparente. También, es mejor que los proyectores de diapositivas, que no pueden producir imágenes tan claras como las de un proyector LCD.

e. Presentaciones

Los profesores pueden preparar presentaciones en una computadora y visualizarlas en un proyector LCD. Esto puede ser muy útil para crear planes de lecciones que se pueden usar año tras año. Proporciona una imagen grande y clara que los estudiantes puedan ver desde cualquier punto de la habitación. Algunos administradores utilizan proyectores LCD para presentaciones en cursos de formación de maestros o talleres. En una noche de padres o en una asamblea escolar, los proyectores LCD permiten mostrar fácilmente a los estudiantes y padres la misión de la escuela a través de una presentación o de diapositivas de fotos.

f. Proyección de videos

Los proyectores LCD permiten a los maestros mostrar fácilmente películas educativas. Pueden mostrar videos que han encontrado en línea o reproducir un DVD. Esto es especialmente útil para las escuelas que antes dependían de los televisores que se colocaban en soportes con ruedas y tenían que ser trasladados de una habitación a otra. Todo lo que los profesores necesitan es una pizarra blanca o una pantalla desplegable donde mostrar el video.

4. APLICACIÓN DEL PROYECTOR DIGITAL COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA EL APRENDIZAJE DE LA LÍNEA RECTA. MODALIDAD TALLER.

4.1. Definiciones de taller

Gonzales (1999), la palabra Taller proviene del francés “atelier”, y significa estudio, obrador, obraje, oficina. También define una escuela o seminario de ciencias a donde asisten los estudiantes. Aparentemente el primer taller fue el de un obrador de tallas.

Maceratesi (1999) considera que un taller consiste en la reunión de un grupo de personas que desarrollan funciones o papeles comunes o similares, para estudiar y analizar problemas y producir soluciones de conjunto.

El taller combina actividades tales como trabajo de grupo, sesiones generales, elaboración y presentación de actas e informes, organización y ejecución de trabajos en comisiones, investigaciones y preparación de documentos. Entre las ventajas del taller se encuentran las de desarrollar el juicio y la habilidad mental para comprender procesos, determinar causas y escoger soluciones prácticas. Estimula el trabajo cooperativo, prepara para el trabajo en grupo y ejercita la actividad creadora y la iniciativa. Exige trabajar con grupos pequeños, aunque conlleva a ser manejado por uno o dos líderes, por lo cual se debe manejar con propiedad técnica y poseer conocimientos adecuados sobre la materia a tratar.

“El taller se basa principalmente en la actividad constructiva del participante. Es un modo de organizar la actividad que favorece la participación y propicia que se comparta en el grupo lo aprendido individualmente, estimulando las relaciones horizontales en el seno del mismo. El papel que desempeña el docente consiste en orientar el proceso, asesorar, facilitar información y recursos, etc., a los sujetos activo, principales protagonistas de su propio aprendizaje.

Evidentemente, taller, en el lenguaje corriente, es el lugar donde se hace, se construye o se repara algo” Betancourt (2011, p. 17).

4.2. Taller 1

Tema: Presentación de diapositivas para explicar los elementos que intervienen en el aprendizaje de la línea recta.

a) Prueba de conocimientos, actitudes y valores (prueba resultados para comparar x).

- La prueba de conocimientos, actitudes y valores se la realizará mediante la aplicación de un TEST sobre el aprendizaje de la Línea Recta.

b) Datos informativos

Facilitador:	**Tema:** Presentación de diapositivas para facilitar el aprendizaje de la Línea Recta.
Estudiantes: 29	
Docentes: 1	
Fecha:	**Tiempo de duración:**

c) Objetivos:

- Conocer los principales elementos que intervienen en el aprendizaje de la línea recta.
- Presentar videos por medio del proyector digital para fortalecer el aprendizaje de la línea recta.
- Resolver problemas de la línea recta.

d) Recursos

- Computadora

- Proyector digital
- Puntero
- Material de pizarra
- Libro del estudiante
- Hojas impresas

e) Programación

1. Introducción al Taller Educativo: Presentación de diapositivas para facilitar el aprendizaje de la línea recta.
2. Se aplicará un test previo al desarrollo del Taller Educativo.
3. Para que los participantes tengan una idea clara del tema a tratarse se hará una revisión de los contenidos teóricos sobre el tema.
4. El facilitador presentará a su auditorio una presentación de diapositivas donde a través de varios recursos multimedia se explicará los elementos que intervienen en el aprendizaje de la línea recta.
5. Se realizará una explicación y un análisis comentado de la temática que permitirá entenderlo de manera clara.
6. Además se apoyarán en los recursos listados anteriormente, incluido el libro guía que poseen los estudiantes.
7. Se presentara videos para reforzar el aprendizaje de los elementos que intervienen en el aprendizaje de la línea recta.
8. Los estudiantes comentaran opiniones y sugerencias acerca del trabajo realizado en la clase.
9. Se aplicará el test luego del desarrollo del taller para la obtención de resultados sobre la efectividad de la herramienta.

f) Resultados de aprendizaje (prueba resultados para comparar y)

Los resultados de aprendizaje se obtendrán mediante la aplicación del TEST que permitirá evaluar los conocimientos pre y post aplicación del taller educativo.

g) Conclusión

La innovación en el uso de diapositivas facilita el aprendizaje de la línea recta.

h) Recomendaciones

- Buscar el uso de nuevas estrategias que permitan el aprendizaje de la línea recta.
- Ser claro y conciso con las explicaciones para evitar confusiones.
- Utilizar de manera adecuada los recursos.

i) Bibliografía

- BETANCOURT, Rinarda. EL TALLER COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA, Bogotá, Primera edición, 2011, Editorial Universidad De La Salle.
- BARTOLOMÉ, Antonio, Recursos tecnológicos para el aprendizaje, Costa Rica, Primera edición, 2011, Editorial Universidad Estatal a Distancia San José, ISBN 978-9968-31-859

4.3. Taller 2

Tema: Presentación de diapositivas para explicar el aprendizaje de las ecuaciones de la línea recta.

a) Prueba de conocimientos, actitudes y valores (prueba resultados para comparar x).

- La prueba de conocimientos, actitudes y valores se la realizará mediante la aplicación de un TEST sobre el aprendizaje de las ecuaciones de la línea recta.

b) Datos informativos

Facilitador:	**Tema:** Presentación de diapositivas para facilitar el aprendizaje de la Línea Recta.
Estudiantes: 29	
Docentes: 1	
Fecha:	**Tiempo de duración:**

.

c) Objetivos:

- Conocer las principales ecuaciones de la línea recta.
- Presentar videos por medio del proyector digital para fortalecer el aprendizaje de las ecuaciones de la línea recta.
- Resolver problemas de la línea recta.

d) Recursos

- Computadora
- Proyector digital
- Puntero
- Material de pizarra
- Libro del estudiante
- Hojas impresas

e) Programación

1. Introducción al Taller Educativo: Presentación de diapositivas para facilitar el aprendizaje de la línea recta.
2. Se aplicará un test previo al desarrollo del Taller Educativo.
3. Para que los participantes tengan una idea clara del tema a tratarse se hará una revisión de los contenidos teóricos sobre el tema.

4. El facilitador presentará a su auditorio una presentación de diapositivas donde a través de varios recursos multimedia se explicará las ecuaciones en el aprendizaje de la línea recta.
5. Se realizará una explicación y un análisis comentado de la temática que permitirá entenderlo de manera clara.
6. Además se apoyarán en los recursos listados anteriormente, incluido el libro guía que poseen los estudiantes.
7. Se presentara videos para reforzar el aprendizaje de las ecuaciones de la línea recta.
8. Los estudiantes comentaran opiniones y sugerencias acerca del trabajo realizado en la clase.
9. Se aplicará el test luego del desarrollo del taller para la obtención de resultados sobre la efectividad de la herramienta.

f) Resultados de aprendizaje (prueba resultados para comparar y)

Los resultados de aprendizaje se obtendrán mediante la aplicación del TEST que permitirá evaluar los conocimientos pre y post aplicación del taller educativo.

g) Conclusión

La innovación en el uso de diapositivas facilita el aprendizaje de la línea recta.

h) Recomendaciones

- Buscar el uso de nuevas estrategias que permitan el aprendizaje de la línea recta.
- Ser claro y conciso con las explicaciones para evitar confusiones.
- Utilizar de manera adecuada los recursos.

i) Bibliografía

- BETANCOURT, Rinarda. EL TALLER COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA, Bogotá, Primera edición, 2011, Editorial Universidad De La Salle.
- BARTOLOMÉ, Antonio, Recursos tecnológicos para el aprendizaje, Costa Rica, Primera edición, 2011, Editorial Universidad Estatal a Distancia San José, ISBN 978-9968-31-859

f. METODOLOGÍA

Para desarrollar la investigación se utilizará la siguiente metodología:

- Determinación del diseño de investigación

Responde a un diseño de tipo descriptivo porque se realizará un diagnóstico del aprendizaje de la línea recta determinar dificultades, carencias o necesidades.

Adicionalmente con esta información se planteara un diseño cuasi experimental por cuanto intencionadamente se potenciara el aprendizaje de la línea recta en base al uso del proyector digital como recurso didáctico método heurístico, en el primer año de bachillerato general unificado y en un tiempo y espacio determinado para aplicar la propuesta alternativa y observar sus bondades.

- Proceso metodológico

Se teoriza el objeto de estudio de la realidad temática de la siguiente manera:

a) Elaboración de un mapa mental del objeto de estudio.
b) Elaboración de un esquema de trabajo del objeto del estudio.
c) Fundamentación teórica de cada descriptor del esquema de trabajo.
d) El uso de las fuentes de información se toma en forma histórica y utilizando las nomas APA.

Para el diagnóstico de la realidad temática se procederá de la siguiente manera:

a) Elaboración de un mapa del aprendizaje de la línea recta.
b) Evaluación diagnóstica.
c) Planteamiento de criterios e indicadores.

d) Definición de lo que diagnostica el criterio con tales indicadores.

Para encontrar el mejor modelo de la propuesta alternativa, como elemento de solución en el aprendizaje de la línea recta se llevará a cabo el siguiente proceso:

a) Definición del proyector digital como recurso didáctico.
b) Concreción de un modelo teórico del proyector digital como recurso didáctico.
c) Análisis procedimental de cómo funciona el modelo.

Delimitados los modelos de la alternativa en la potenciación del aprendizaje se procederá a su aplicación mediante talleres.

Los talleres que se plantearan versan sobre las siguientes temáticas:

Taller 1: Presentación de diapositivas para explicar los elementos que intervienen en el aprendizaje de la línea recta.

Taller 2: Presentación de diapositivas para explicar el aprendizaje de las ecuaciones de la línea recta.

- Para valorar la efectividad del uso del proyector digital como recurso didáctico para el aprendizaje de la línea recta, se realizó:

f) La aplicación de un test de actitudes y valores sobre el aprendizaje de la línea recta, pre test.
g) El uso del proyector digital como recurso didáctico.
h) La aplicación del mismo test anterior después del taller, post test.
i) La comparación de los resultados con los test aplicados utilizando como artificio: los pre test tomados antes del taller asignados con X y los post test aplicados después del taller asignados con Y.

j) Los puntajes obtenidos en las pruebas se realizó mediante la Prueba Signo Rango de Wilcoxon, donde se comprueba la efectividad de la alternativa.

Para el cálculo de la Prueba Signo Rango de Wilcoxon se utiliza las siguientes fórmulas:

Nº	X	Y	$\mathbf{D = \lvert Y - X \rvert}$	RANGO +	RANGO -
			TOTAL	$\sum \mathbf{R+}$	$\sum \mathbf{R-}$

Se calcula el rango real:

$$\boldsymbol{W} = \left(\sum \mathbf{R+}\right) - \left(\sum \mathbf{R-}\right)$$

La alternativa no funciona: Las puntuaciones X son iguales o inferiores a las puntuaciones Y (**X = Y).**

La alternativa funciona: Las puntuaciones Y son superiores a las puntuaciones X (**Y > X).**

$$\boldsymbol{\mu_W} = \mathbf{W^+} - \frac{\mathbf{N(N+1)}}{\mathbf{4}}$$

Dónde:

$\boldsymbol{\mu_W} = \text{Media}$

$\mathbf{N} = \text{Tamaño de la muestra}$

$\mathbf{W^+} = \text{Valor estadístico de Wilcoxon}$

Para el cálculo de la desviación estándar o cálculo del error estándar $(\boldsymbol{\sigma_W})$ se utiliza:

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{N(N+1)(2N+1)}}{\boldsymbol{24}}}$$

Mientras la clasificación Z se calcula por medio de la fórmula:

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{W - \mu_W}}{\boldsymbol{\sigma_W}}$$

Para construir los resultados se tomará en cuenta el diagnóstico de la realidad temática y la aplicación de la alternativa.

a) Resultados del diagnóstico de la realidad temática
b) Resultados de la aplicación del proyector digital como recurso didáctico.

La discusión se verá enmarcada dentro de dos campos:

a. Discusión con respecto al diagnostico de la realidad temática.
b. Discusión con respecto de la aplicación del proyector digital como recurso didáctico.

Las conclusiones serán de dos clases:

a. Conclusiones con respecto al diagnóstico del aprendizaje de la línea recta.
c. Conclusiones con respecto de la aplicación del proyector digital como un recurso didáctico.

Las recomendaciones serán elaboradas para que los actores educativos tomen al proyector digital como una alternativa para mejorar el aprendizaje de la línea recta.

Población y muestra

Quiénes / Informantes	Población	Muestra
Directivos	-	-
Estudiantes	29	-
Padres de familia	25	-
Profesores	1	-

Cálculo de la muestra:

$$n = \frac{PQ.N}{(N-1)\frac{E^2}{K^2} + PQ}$$

PQ= primer cuartil= 0,25

N= población =200

E= error de muestreo admisible = 15% = 0,15

K=constante de proporcionalidad=2

Si N es mayor a 50 determinamos muestra

Si N es igual o menor a 50, trabajamos con la población

g. CRONOGRAMA

TIEMPO / ACTIVIDADES	2013				2014																																			
	Sep	Oct	Nov	Dic	Ene	Feb	Marzo				Abril				Mayo				Junio				Julio				Agosto				Septiembre				Octubre			
Proyecto de tesis																																								
Construcción del titulo																																								
Construcción de preliminares																																								
Construcción de introducción y resumen en castellano e ingles																																								
Construcción de la revisión de literatura																																								
Construcción de materiales y métodos																																								
Construcción de resultados																																								
Construcción de la discusión																																								
Construcción de conclusiones y recomendaciones																																								
Construcción de la bibliografía																																								
Construcción de anexos																																								
Construcción de informes de tesis																																								
Estudio y calificación privado																																								
Agregado de sugerencias del tribunal a la tesis																																								
Construcción del artículo científico																																								
Grado público																																								

h. PRESUPUESTO Y FINANCIAMIENTO

CONCEPTO	PARCIAL	INGRESOS	GASTOS
INGRESOS			
Aportes personales del investigador		**5000,00**	
Aportes para la investigación			
Diseño del proyecto	**600,00**		
Desarrollo de la investigación	**2700,00**		
Grado	**1400,00**		
GASTOS CORRIENTES/GASTOS			
BIENES Y SERVICIOS DE CONSUMO			
Servicios básicos			**350,00**
Energía eléctrica	**50,00**		
Telecomunicaciones	**300,00**		
Servicios generales			**1450,00**
Edición, impresión, reproducción y publicaciones	**650,00**		
Difusión, información, y publicidad	**350,00**		
Traslados, instalación, viáticos y subsistencias	**200,00**		
Pasaje del interior			
Pasaje al exterior			
Viáticos y subsistencias en el interior	**250,00**		
Instalación, mantenimiento y reparación			
Edificios, locales y residencias mobiliarios			
Contratación de estudios e investigaciones			**1300,00**
Servicios de capitación			
1 especialista por 10 días	**650,00**		
1 profesor de estadística	**650,00**		
Gastos de informática			**100,00**
Mantenimiento y reparación de equipos y de sistemas informáticos/ equipos informáticos	**100,00**		
Bienes de uso y consumo corriente			**1000,00**
Materiales de oficina	**150,00**		
Materiales de aseo	**50,00**		
Materiales de impresión, fotografía, producción y reproducción	**600,00**		
Materiales didácticos, repuestos y accesorios	**200,00**		
Bienes muebles			**800,00**
Mobiliario	**300,00**		
Libros y colecciones	**500,00**		
TOTAL DE INGRESOS Y GASTOS		**$5000,00**	**$5000,00**

i. BIBLIOGRAFÍA

- Libro de Matemáticas del noveno año de educación básica, del Ministerio de Educación, 2010.
- CHARLES LEHMANN, *Geometría Analítica,* México, Vigésima Reimpresión, 2009, Editorial Limusa Grupo Noriega Editores.
- SUVOROV, *Matemáticas Superiores,* Rusia, Cuarta Edición, 1973, Editorial Mir.
- DE OTEYZA, ELENA, *Geometría Analítica,* México, Tercera Edición, 2011, Editorial Pearson Educación.
- AGUILAR M. ARTURO Y OTROS, *Geometría, Trigonometría y Geometría Analítica,* México, Primera Edición, 2010, Editorial Pearson Educación.
- KINDLE JOSEPH H. *Teoría y Problemas de Geometría Analítica,* Bogotá Colombia, 1982, Editorial Andes.
- ZAMBRANO SOLIS, *Matemática 1,* Ecuador, Nueva Edición, 2012, Editorial EDISOL "Ediciones Solis"
- URIBE CAMARGO LEONOR, *Alfa 9 con estándares serie de matemáticas,* Bogotá, Decima novena edición, 2003, Editorial Grupo Norma
- PIORTR MARIAN WISNIEWSKI, ANA LAURA GUTIÉRREZ BANEGAS, *Introducción a las Matemáticas Universitarias,* México, 2003, Interamericana Editorial.
- JIMÉNEZ RENÉ, *Geometría Analítica,* México, Primera Edición, 2006, Editorial Pearson Educación.
- WOOTON, BECKENBANCH, FLEMING, *Geometría Analítica Moderna*, México, Sexta Reimpresión, 1979, Editorial Publicaciones Cultural S.A.
- BARONA ROBERTO LUIS, *El Mundo De La Matemática Moderna,* España, 1979, Ediciones Océano S.A.

- APONTE GLADYS, PAGAN ESTELA, PONS FRANCISCA, *Fundamento de Matemática Básicas,* México, Segunda Edición, 2010, Editorial Pearson Educación.
- COLEGIO NACIONAL DE MATEMÁTICAS, *Geometría Trigonometría y Geometría Analítica,* México, Primera Edición, 2010, Editorial Pearson Educación.
- JIMÉNEZ RENÉ, *Matemáticas III, Geometría Analítica,* México, Segunda Edición, 2011, Editorial Pearson Educación.
- BETANCOURT, Rinarda. EL TALLER COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA, Bogotá, Primera edición, 2011, Editorial Universidad De La Salle.
- BARTOLOMÉ, Antonio, Recursos tecnológicos para el aprendizaje, Costa Rica, Primera edición, 2011, Editorial Universidad Estatal a Distancia San José, ISBN 978-9968-31-859
- Escrito por Ashley Henshaw Traducido por Patricia A. Palma (http://www.ehowenespanol.com/usos-proyector-lcd-escuela-lista_146094/)
- Proyector digital (http://www.informaticamoderna.com/Proyector.htm)
- Wikipedia (http://es.wikipedia.org/wiki/Proyector_de_v%C3%ADdeo)
- Shirley Cesar, En Blog Proyector. 2011 (http://proyecto-coljer-proyector.blogspot.com/p/que-funcion-cumple.html)
- Historia del proyector digital. (s. f.). En tipos de proyectores y su historia. (http://historiadelproyector.site90.net/)

ANEXOS

Encuestas exploratorias:

Anexo 1 (encuesta a estudiantes)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN

CARRERA DE FÍSICO MATEMÁTICA

Estimado estudiante, con la finalidad de realizar nuestro proyecto de tesis previo a la obtención de grado de Licenciado en Ciencias de la Educación mención Físico Matemática, apelando a su gran sensibilidad de servicio y colaboración, le solicito de la manera más respetuosa dígnese a responder las siguientes interrogantes:

Encierre en una circunferencia el literal que corresponde a la respuesta correcta de las siguientes preguntas del 1 al 9:

1. **Segmento recto es:**
   a) Una línea
   b) Una porción de línea recta
   c) Un segmento de curva
   d) Ninguna de las anteriores

2. **Se llama línea recta:**
   a) Dada una ecuación interpretarla geométricamente.
   b) El lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo.
   c) Al lugar geométrico de los puntos tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera del lugar, el valor de la pendiente m resulta siempre constante.
   d) La condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación.

3. **Cuál de los siguientes literales es la ecuación de una recta:**
   a) $x^2 + 6x - 9 = 0$
   b) $x + 9y - 3 = 0$
   c) $2x^2 + 2y^2 + 10x - 6y + 9 = 0$
   d) $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

4. **La ecuación general de la recta es:**
   a) $Ax + By + C = 0$
   b) $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$
   c) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
   d) $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

5. **Si las ecuaciones de dos rectas son $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$ y $\boldsymbol{A'x + B'y + C' = 0}$, la condición necesaria y suficiente para que sean paralelas es:**
   a) $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$; o sea que; $AB' - A'B = 0$
   b) $AA' + BB' = 0$
   c) $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$; o sea; $AB' - A'B \neq 0$
   d) Ninguna de las anteriores

6. **La pendiente m de una recta:**
   a) Es la tangente de su ángulo de inclinación con respecto del eje de las abscisas.
   b) Es el ángulo de dos rectas dirigidas formado por los dos lados que se alejan del vértice.
   c) Es la tangente del ángulo que forma la línea recta con el eje vertical.
   d) Es el punto que divide a la recta en dos partes iguales.

7. **El ángulo de inclinación de una recta fluctúa entre:**
   a) 0º a 90º

b) 0º a 270º
c) 0º a 179º
d) Ninguna de las anteriores

8. El siguiente par ordenado (2,-8) en que cuadrante se encuentra:

a) Primer cuadrante
b) Segundo cuadrante
c) Cuarto cuadrante
d) Tercer nivel

9. Cuál de los siguientes literales es una característica de la línea recta:

a) Tener una pendiente dada y pasar por un determinado punto.
b) Por un punto pasa una y solamente una recta.
c) Tener una pendiente y pasar por más de un determinado punto.
d) Corta a los ejes de coordenadas en partes iguales.

10. Defina con sus propias palabras que entiende por línea recta.

……

……

¡GRACIAS POR SU COLABORACIÓN!

Anexo 2 (encuesta a docentes):

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN
CARRERA DE FÍSICO MATEMÁTICA

Estimado señor(a) docente, como estudiante de la Universidad Nacional de Loja, con la finalidad de realizar nuestro proyecto de tesis previo a la obtención de grado de Licenciado en Ciencias de la Educación mención Físico Matemática, apelando a su gran sensibilidad de servicio y colaboración, le solicito de la manera más respetuosa dígnese responder las siguientes interrogantes:

Encierre en una circunferencia el literal que corresponde a la respuesta correcta de las siguiente preguntas del 1 al 3:

1. **Si las ecuaciones de dos rectas son $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$ y $\boldsymbol{A'x + B'y + C' = 0}$, la condición necesaria y suficiente para que sean perpendiculares es:**
   e) $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$; o sea que; $AB' - A'B = 0$
   f) $AA' + BB' = 0$
   g) $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$; o sea; $AB' - A'B \neq 0$
   h) $A = kA'$; $B = kB'$; $C = kC'$, $(k \neq 0)$

2. **Familia de rectas es:**
   a) La totalidad de líneas que satisfacen una única condición geométrica.
   b) La totalidad de las rectas que satisfacen una única condición geométrica.
   c) Al lugar geométrico de los puntos tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera del lugar, el valor de la pendiente m resulta siempre constante.
   d) La condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación.

3. **La ecuación normal de la recta es:**

e) $Ax + By + C = 0$

f) $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$

g) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

h) $x\sin\varphi + y\cos\varphi - p = 0$

4. **¿Cada qué tiempo usted se está capacitando en el aprendizaje de la línea recta?**

- Quincenal ( )
- Mensual ( )
- Trimestral ( )
- Quimestral ( )
- Anual ( )
- Cuando dicta clases ( )

Otros……

5. **Para el proceso enseñanza-aprendizaje de la línea recta en sus alumnos, cuáles de los siguientes libros utiliza como libro base:**

- CHARLES LEHMANN, *Geometría Analítica.* ( )
- SUVOROV, *Matemáticas Superiores.* ( )
- DE OTEYZA, ELENA, *Geometría Analítica.* ( )
- AGUILAR M. ARTURO, *Geometría, Trigonometría y Geometría Analítica.* ( )
- KINDLE JOSEPH H. *Teoría y Problemas de Geometría Analítica*. ( )
- PIORTR MARIAN WISNIEWSKI, ANA LAURA GUTIÉRREZ BANEGAS, *Introducción a las Matemáticas Universitarias.* ( )
- Otros ( )

Cuales……

Porque……

6. **¿Qué dificultades ha evidenciado en el aprendizaje de la línea recta en sus educandos?**

……

7. **La institución a la que presta sus servicios le facilita el material didáctico adecuado para impartir sus clases sobre la línea recta a sus educandos.**
   - ✓ Siempre ( )
   - ✓ A veces ( )
   - ✓ Nunca ( )

Material didáctico: Regla, Compás, Escuadras, Graduador.

8. **Cuál de los siguientes ítems son necesarios como conocimientos previos para el aprendizaje de la línea recta:**
   - ✓ Factorización ( )
   - ✓ Sistema de coordenadas rectangulares ( )
   - ✓ Trigonometría ( )
   - ✓ Cocientes y productos notables ( )
   - ✓ Sistema de coordenadas polares ( )
   - ✓ Distancia entre dos puntos ( )
   - ✓ Grado de una ecuación ( )

9. **¿Utiliza algún tipo de material didáctico para el aprendizaje de la línea recta?**

Cual(es)…….

Porque……

¡GRACIAS POR SU COLABORACIÓN!

Técnicas para el diagnóstico:

Anexo 3 (encuesta a estudiantes)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN

CARRERA DE FÍSICO MATEMÁTICA

ENCUESTA DIRIGIDA A ESTUDIANTES

Señor (ita) Estudiante:

Al saludarle, deseo invitarle a responder el presente cuestionario que tiene como propósito obtener información acerca del aprendizaje de la línea recta.

Sus respuestas serán anónimas, para ello debe marcar con una (x) el casillero correspondiente de acuerdo a su apreciación según corresponda de las siguientes preguntas:

1. **¿Conoce usted la historia de la línea recta?**
   a) Nunca ( )
   b) Parcialmente ( )
   c) En su mayor parte ( )
   d) Totalmente ( )

2. **Segmento recto es:**
   a) Una línea recta ( )
   b) Una porción de línea recta ( )
   c) Un segmento de curva ( )
   d) Ninguna de las anteriores ( )

3. **identifique la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos:**
   a) $A = \pi r^2$ ( )
   b) $d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ( )

c) $Ax + By + C = 0$ ( )

d) $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ ( )

4. La siguiente formula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ corresponde a:

a) La circunferencia ( )

b) Línea recta ( )

c) Pendiente de una recta ( )

d) Segmento recto ( )

5. Se llama línea recta:

a) Dada una ecuación interpretarla geométricamente. ( )

b) El lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo. ( )

c) Al lugar geométrico de los puntos tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera del lugar, el valor de la pendiente m resulta siempre constante. ( )

d) La condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación. ( )

6. Cuál de las siguientes ecuaciones es una ecuación de una línea recta:

a) $x^2 + 6x - 9 = 0$ ( )

b) $x + 9y - 3 = 0$ ( )

c) $2x^2 + 2y^2 + 10x - 6y + 9 = 0$ ( )

d) $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ( )

7. La ecuación general de la línea recta es:

a) $Ax + By + C = 0$ ( )

b) $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ ( )

c) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ( )

d) $y = mx + b$ ( )

8. La ecuación normal de la línea recta es:

a) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ( )

b) $Ax + By + C = 0$ ( )

c) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ( )

d) $x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$ ( )

9. Cuál es la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas:

a) $m_1 = m_2$ ( )

b) $Ax + By + C = 0$ ( )

c) $AB = A'$ ( )

d) $x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$ ( )

10. Cuál es la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares:

a) $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$ ( )

b) $m_1 m_2 = -1$ ( )

c) $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$; o sea; $AB' - A'B \neq 0$ ( )

d) Ninguna de las anteriores ( )

11. La pendiente es la tangente del ángulo de inclinación de la línea recta:

a) Verdadero ( )

b) Falso ( )

12. Si $\boldsymbol{a \neq b}$ entonces $\boldsymbol{(a, b) \neq (b, a)}$

a) Verdadero ( )

b) Falso ( )

13. Cualquier par ordenado de la forma $(a, 0)$ se ubica sobre el eje Y.

a) Verdadero ( )

b) Falso ( )

14. La longitud de un segmento es la distancia entre sus extremos:

a) Verdadero ( )

b) Falso ( )

15. Una recta vertical no tiene pendiente:

a) Verdadero ( )

b) Falso ( )

¡GRACIAS POR SU COLABORACIÓN!

Anexo 4 (encuesta al docente)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN

CARRERA DE FÍSICO – MATEMÁTICAS

ENCUESTA DIRIGIDA A DOCENTES

Señor Profesor:

Al saludarle, deseo invitarle a responder el presente cuestionario que tiene como propósito acumular datos cualitativos y cuantitativos para la realización de la tesis de grado de Licenciado en Ciencias de la Educación Mención Físico- Matemáticas, le solicito respetuosa y comedidamente a usted, se digne proporcionar la información requerida para tal propósito.

Sus respuestas serán anónimas, para ello debe marcar con una x el casillero correspondiente de acuerdo a su apreciación según usted crea conveniente:

1. **¿Conoce usted la historia de la línea recta?**
   a) Nunca ( )
   b) Parcialmente ( )
   c) En su mayor parte ( )
   d) Totalmente ( )

2. **¿Qué es un segmento recto?**
   a) Una línea recta ( )
   b) Una porción de línea recta ( )
   c) Un segmento de curva ( )
   d) Ninguna de las anteriores ( )

3. **identifique la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos:**
   a) $A = \pi r^2$ ( )
   b) $d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ( )

c) $Ax + By + C = 0$ ( )

d) $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ ( )

4. La siguiente formula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ nos permite hallar el valor de la:

a) La circunferencia ( )

b) Línea recta ( )

c) Pendiente de una recta ( )

d) Segmento recto ( )

5. Se llama línea recta:

a) Dada una ecuación interpretarla geométricamente. ( )

b) El lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo. ( )

c) Al lugar geométrico de los puntos tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera del lugar, el valor de la pendiente m resulta siempre constante. ( )

d) La condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación. ( )

6. Cuál de las siguientes ecuaciones es una ecuación de una línea recta:

a) $x^2 + 6x - 9 = 0$ ( )

b) $x + 9y - 3 = 0$ ( )

c) $2x^2 + 2y^2 + 10x - 6y + 9 = 0$ ( )

d) $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ( )

7. La ecuación general de la línea recta es:

a) $Ax + By + C = 0$ ( )

b) $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ ( )

c) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ( )

d) $y = mx + b$ ( )

8. La ecuación normal de la línea recta es:

a) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ( )

b) $Ax + By + C = 0$ ( )

c) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ( )

d) $x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$ ( )

9. Cuál es la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas:

a) $m_1 = m_2$ ( )

b) $Ax + By + C = 0$ ( )

c) $AB = A'$ ( )

d) $x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$ ( )

10. Cuál es la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares:

a) $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$ ( )

b) $m_1 m_2 = -1$ ( )

c) $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$; o sea; $AB' - A'B \neq 0$ ( )

d) Ninguna de las anteriores ( )

11. La pendiente es la tangente del ángulo de inclinación de la línea recta:

c) Verdadero ( )

d) Falso ( )

12. Si $\boldsymbol{a \neq b}$ entonces $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$

c) Verdadero ( )

d) Falso ( )

13. Cualquier par ordenado de la forma $(a, 0)$ se ubica sobre el eje Y.

c) Verdadero ( )

d) Falso ( )

14. La longitud de un segmento es la distancia entre sus extremos:

c) Verdadero ( )

d) Falso ( )

15. Una recta vertical no tiene pendiente:

c) Verdadero ( )

d) Falso ( )

¡GRACIAS POR SU COLABORACIÓN!

Anexo 5 (encuesta a padres de familia)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN

CARRERA DE FÍSICO – MATEMÁTICAS

ENCUESTA DIRIGIDA A PADRES DE FAMILIA

Señor Padre de Familia:

Al saludarle, deseo invitarle a responder el presente cuestionario que tiene como propósito acumular datos cualitativos y cuantitativos para la realización de la tesis de grado de Licenciado en Ciencias de la Educación Mención Físico- Matemáticas, le solicito respetuosa y comedidamente a usted, se digne proporcionar la información requerida para tal propósito.

Sus respuestas serán anónimas, para ello debe marcar con una x el casillero correspondiente de acuerdo a su apreciación según usted crea conveniente:

1. **¿Conoce usted la historia de la línea recta?**
   a) Nunca ( )
   b) Parcialmente ( )
   c) En su mayor parte ( )
   d) Totalmente ( )

2. **Su hijo asiste regularmente a clases.**
   a) Si ( )
   b) No ( )

3. **Su representado es responsable y cumplidor con las obligaciones del colegio**
   a) Si ( )
   b) No ( )
   c) En parte ( )

4. **Su hijo presenta alguna discapacidad física o mental:**
   a) Si ( )
   b) No ( )
   c) En parte ( )

5. **Usted cada qué tiempo se acerca a la institución educativa a preguntar el rendimiento académico de su representado:**
   a) Semanal ( )
   b) Quincenal ( )
   c) Mensual ( )
   d) Trimestral ( )
   e) Quimestral ( )
   f) Cuando lo notifican ( )

6. **Tiene algún conocimiento sobre el aprendizaje de la línea recta:**
   a) Nunca ( )
   b) Parcialmente ( )
   c) En su mayor parte ( )
   d) Totalmente ( )

7. **Cuál es el nivel de estudio que usted cuenta:**
   a) Primaria ( )
   b) Secundaria ( )
   c) Educación Superior ( )

8. **Cuál es la relación que usted tiene con su hijo:**
   a) Buena ( )
   b) Regular ( )
   c) Mala ( )

¡GRACIAS POR SU COLABORACIÓN!

Técnica para valorar la efectividad de la alternativa:

Anexo 6 – test 2 taller 1

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN

CARRERA DE FÍSICO MATEMÁTICA

TEST TALLER 1

Señor (ita) Estudiante:

Al saludarle, deseo invitarle a responder el presente cuestionario que tiene como propósito obtener información acerca del aprendizaje de la línea recta.

1. Se tiene los siguientes par de puntos:

- Grafíquelos en un plano de coordenadas
- Determine la distancia entre ellos
- Obtenga el punto medio del segmento que los une

a) (1, -6) y (-1, -3)

b) (3, 4) y (-3, -4)

2. Hallar la pendiente m de los siguientes puntos:

a) (2, -1) y (4, 3)

b) (6, -2) y (-1, 3)

3. ¿Cuál es el valor de x si la distancia entre P (8, -1) y Q (x, 3) es $4\sqrt{10}$?

4. ¿El o la docente utiliza el proyector digital en la enseñanza de la línea recta?

- Nunca ( )
- Parcialmente ( )
- En su mayor parte ( )
- Totalmente ( )

5. ¿El o la docente utiliza el infocus y la computadora para impartir los conocimientos sobre la línea recta?

- Nunca ( )
- Parcialmente ( )
- En su mayor parte ( )
- Totalmente ( )

6. ¿Considera que el uso del proyector digital fija los conocimientos adquiridos en el estudio de la línea recta?

- Nunca ( )
- Parcialmente ( )
- En su mayor parte ( )
- Totalmente ( )

7. ¿Considera que el docente a través del uso del proyector convierte las clases más activas y participativas?

- Nunca ( )
- Parcialmente ( )
- En su mayor parte ( )
- Totalmente ( )

8. ¿Considera que el uso del proyector digital facilita el aprendizaje de la línea recta?

- Nunca ( )
- Parcialmente ( )
- En su mayor parte ( )
- Totalmente ( )

9. ¿Considera que la aplicación del proyector digital en las clases de la línea recta desarrolla en ti habilidades para analizar y sintetizar contenidos?

- Nunca ( )
- Parcialmente ( )
- En su mayor parte ( )
- Totalmente ( )

10. ¿Considera que la aplicación del proyector digital te ayuda a desarrollar la capacidad para resolver problemas de la línea recta?

- Nunca ( )
- Parcialmente ( )
- En su mayor parte ( )
- Totalmente ( )

11. ¿El o la docente aprovecha el proyector digital para cimentar en ti conocimientos para la vida?

- Nunca ( )
- Parcialmente ( )
- En su mayor parte ( )
- Totalmente ( )

¡GRACIAS POR SU COLABORACIÓN!

Anexo 7 – test 2 taller 2

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN

CARRERA DE FÍSICO MATEMÁTICA

TEST TALLER 2

Señor (ita) Estudiante:

Al saludarle, deseo invitarle a responder el presente cuestionario que tiene como propósito obtener información acerca del aprendizaje de la línea recta.

1. Será que los puntos H(-2, 5), F(4, 4), L(1, 2), N(-2, 0) pertenecen a la recta 2X-3Y+4=0?

2. Halla la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las rectas X+7Y-23=0 y 7X-4Y-2=0 y es perpendicular a la recta X+2Y+8=0. Grafique las cuatro rectas.

3. Dibuja y halla la pendiente de la recta que pasa por los puntos P (-2, -1) y Q (3,5). Señala el ángulo de dirección α que se forma entre el eje positivo de las x y la recta

4. Hallar la ecuación canónica y general de la recta que pasa por el punto (-4, 3) y tiene pendiente $\frac{1}{2}$

5. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 3) y cumple la condición siguiente:
   a) Es paralela a la recta 2x+37-5=0

   b) Es perpendicular a la recta 4x+5y-20=0

6. Hallar la distancia d desde: La recta 8x+15y-24=0 al punto (-2, -3)

¡GRACIAS POR SU COLABORACIÓN!

TÉCNICAS EXPLORATORIAS PARA EL DESARROLLO DE LA PROBLEMÁTICA

Anexo 2 (encuesta a estudiantes)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN

CARRERA DE FÍSICO MATEMÁTICA

Estimado estudiante, con la finalidad de realizar nuestro proyecto de tesis previo a la obtención de grado de Licenciado en Ciencias de la Educación mención Físico Matemática, apelando a su gran sensibilidad de servicio y colaboración, le solicito de la manera más respetuosa dígnese a responder las siguientes interrogantes:

Encierre en una circunferencia el literal que corresponde a la respuesta correcta de las siguientes preguntas del 1 al 9:

11. Segmento recto es:

e) Una línea
f) Una porción de línea recta
g) Un segmento de curva
h) Ninguna de las anteriores

12. Se llama línea recta:

e) Dada una ecuación interpretarla geométricamente.
f) El lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo.
g) Al lugar geométrico de los puntos tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera del lugar, el valor de la pendiente m resulta siempre constante.
h) La condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación.

13. Cuál de los siguientes literales es la ecuación de una recta:

e) $x^2 + 6x - 9 = 0$

f) $x + 9y - 3 = 0$

g) $2x^2 + 2y^2 + 10x - 6y + 9 = 0$

h) $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

14. La ecuación general de la recta es:

i) $Ax + By + C = 0$

j) $x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$

k) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

l) $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

15. Si las ecuaciones de dos rectas son $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$ y $\boldsymbol{A'x + B'y + C' = 0}$, la condición necesaria y suficiente para que sean paralelas es:

i) $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$; o sea que; $AB' - A'B = 0$

j) $AA' + BB' = 0$

k) $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$; o sea; $AB' - A'B \neq 0$

l) Ninguna de las anteriores

16. La pendiente m de una recta:

e) Es la tangente de su ángulo de inclinación con respecto del eje de las abscisas.

f) Es el ángulo de dos rectas dirigidas formado por los dos lados que se alejan del vértice.

g) Es la tangente del ángulo que forma la línea recta con el eje vertical.

h) Es el punto que divide a la recta en dos partes iguales.

17. El ángulo de inclinación de una recta fluctúa entre:

e) 0º a 90º
f) 0º a 270º
g) 0º a 179º
h) Ninguna de las anteriores

18. El siguiente par ordenado (2,-8) en que cuadrante se encuentra:

e) Primer cuadrante
f) Segundo cuadrante
g) Cuarto cuadrante
h) Tercer nivel

19. Cuál de los siguientes literales es una característica de la línea recta:

e) Tener una pendiente dada y pasar por un determinado punto.
f) Por un punto pasa una y solamente una recta.
g) Tener una pendiente y pasar por más de un determinado punto.
h) Corta a los ejes de coordenadas en partes iguales.

20. Defina con sus propias palabras que entiende por línea recta.

……

……

¡GRACIAS POR SU COLABORACIÓN!

Anexo 3 (encuesta a docentes):

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN

CARRERA DE FÍSICO MATEMÁTICA

Estimado señor(a) docente, como estudiante de la Universidad Nacional de Loja, con la finalidad de realizar nuestro proyecto de tesis previo a la obtención de grado de Licenciado en Ciencias de la Educación mención Físico Matemática, apelando a su gran sensibilidad de servicio y colaboración, le solicito de la manera más respetuosa dígnese responder las siguientes interrogantes:

Encierre en una circunferencia el literal que corresponde a la respuesta correcta de las siguiente preguntas del 1 al 3:

1. **Si las ecuaciones de dos rectas son $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$ y $\boldsymbol{A'x + B'y + C' = 0}$, la condición necesaria y suficiente para que sean perpendiculares es:**

   m) $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$; o sea que; $AB' - A'B = 0$

   n) $AA' + BB' = 0$

   o) $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$; o sea; $AB' - A'B \neq 0$

   p) $A = kA'$; $B = kB'$; $C = kC'$, $(k \neq 0)$

2. **Familia de rectas es:**

   e) La totalidad de líneas que satisfacen una única condición geométrica.

   f) La totalidad de las rectas que satisfacen una única condición geométrica.

   g) Al lugar geométrico de los puntos tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera del lugar, el valor de la pendiente m resulta siempre constante.

   h) La condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación.

3. **La ecuación normal de la recta es:**

m) $Ax + By + C = 0$

n) $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$

o) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

p) $x\sin\varphi + y\cos\varphi - p = 0$

4. **¿Cada qué tiempo usted se está capacitando en el aprendizaje de la línea recta?**

- Quincenal ( )
- Mensual ( )
- Trimestral ( )
- Quimestral ( )
- Anual ( )
- Cuando dicta clases ( )

Otros……

5. **Para el proceso enseñanza-aprendizaje de la línea recta en sus alumnos, cuáles de los siguientes libros utiliza como libro base:**

- CHARLES LEHMANN, *Geometría Analítica.* ( )
- SUVOROV, *Matemáticas Superiores.* ( )
- DE OTEYZA, ELENA, *Geometría Analítica.* ( )
- AGUILAR M. ARTURO, *Geometría, Trigonometría y Geometría Analítica.* ( )
- KINDLE JOSEPH H. *Teoría y Problemas de Geometría Analítica*. ( )
- PIORTR MARIAN WISNIEWSKI, ANA LAURA GUTIÉRREZ BANEGAS, *Introducción a las Matemáticas Universitarias.* ( )
- Otros ( )

Cuales……

Porque……

6. **¿Qué dificultades ha evidenciado en el aprendizaje de la línea recta en sus educandos?**

……

7. **La institución a la que presta sus servicios le facilita el material didáctico adecuado para impartir sus clases sobre la línea recta a sus educandos.**
   - ✓ Siempre ( )
   - ✓ A veces ( )
   - ✓ Nunca ( )

Material didáctico: Regla, Compás, Escuadras, Graduador.

8. **Cuál de los siguientes ítems son necesarios como conocimientos previos para el aprendizaje de la línea recta:**
   - ✓ Factorización ( )
   - ✓ Sistema de coordenadas rectangulares ( )
   - ✓ Trigonometría ( )
   - ✓ Cocientes y productos notables ( )
   - ✓ Sistema de coordenadas polares ( )
   - ✓ Distancia entre dos puntos ( )
   - ✓ Grado de una ecuación ( )

9. **¿Utiliza algún tipo de material didáctico para el aprendizaje de la línea recta?**

Cual(es)…….

Porque……

¡GRACIAS POR SU COLABORACIÓN!

TÉCNICAS PARA EL DIAGNÓSTICO DEL APRENDIZAJE DE LÍNEA RECTA

Anexo 4 (encuesta a estudiantes):

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN

CARRERA DE FÍSICO MATEMÁTICA

ENCUESTA DIRIGIDA A ESTUDIANTES

Señor (ita) Estudiante:

Al saludarle, deseo invitarle a responder el presente cuestionario que tiene como propósito obtener información acerca del aprendizaje de la línea recta.

Sus respuestas serán anónimas, para ello debe marcar con una (x) el casillero correspondiente de acuerdo a su apreciación según corresponda de las siguientes preguntas:

1. **¿Conoce usted la historia de la línea recta?**
   e) Nunca ( )
   f) Parcialmente ( )
   g) En su mayor parte ( )
   h) Totalmente ( )

2. **Segmento recto es:**
   e) Una línea recta ( )
   f) Una porción de línea recta ( )
   g) Un segmento de curva ( )
   h) Ninguna de las anteriores ( )

3. **identifique la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos:**
   e) $A = \pi r^2$ ( )
   f) $d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ( )
   g) $Ax + By + C = 0$ ( )
   h) $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ ( )

4. **La siguiente formula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ corresponde a:**
   e) La circunferencia ( )
   f) Línea recta ( )
   g) Pendiente de una recta ( )
   h) Segmento recto ( )

5. **Se llama línea recta:**
   e) Dada una ecuación interpretarla geométricamente. ( )
   f) El lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo. ( )
   g) Al lugar geométrico de los puntos tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera del lugar, el valor de la pendiente *m* resulta siempre constante. ( )
   h) La condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación. ( )

6. **Cuál de las siguientes ecuaciones es una ecuación de una línea recta:**
   e) $x^2 + 6x - 9 = 0$ ( )
   f) $x + 9y - 3 = 0$ ( )
   g) $2x^2 + 2y^2 + 10x - 6y + 9 = 0$ ( )
   h) $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ( )

7. **La ecuación general de la línea recta es:**
   e) $Ax + By + C = 0$ ( )
   f) $x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$ ( )
   g) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ( )
   h) $y = mx + b$ ( )

8. **La ecuación normal de la línea recta es:**
   e) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ( )
   f) $Ax + By + C = 0$ ( )
   g) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ( )
   h) $x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$ ( )

9. **Cuál es la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas:**
   e) $m_1 = m_2$ ( )
   f) $Ax + By + C = 0$ ( )
   g) $AB = A'$ ( )
   h) $x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$ ( )

10. **Cuál es la condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares:**
   e) $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$ ( )
   f) $m_1 m_2 = -1$ ( )
   g) $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$; o sea; $AB' - A'B \neq 0$ ( )
   h) Ninguna de las anteriores ( )

11. La pendiente es la tangente del ángulo de inclinación de la línea recta:

e) Verdadero ( )
f) Falso ( )

12. Si $a \neq b$ entonces $(a, b) \neq (b, a)$

e) Verdadero ( )
f) Falso ( )

13. Cualquier par ordenado de la forma $(a, 0)$ se ubica sobre el eje Y.

e) Verdadero ( )
f) Falso ( )

14. La longitud de un segmento es la distancia entre sus extremos:

e) Verdadero ( )
f) Falso ( )

15. Una recta vertical no tiene pendiente:

e) Verdadero ( )
f) Falso ( )

¡GRACIAS POR SU COLABORACIÓN!

Anexo 5 (encuesta a docentes):

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN

CARRERA DE FÍSICO – MATEMÁTICAS

ENCUESTA DIRIGIDA A DOCENTES

Señor Profesor:

Al saludarle, deseo invitarle a responder el presente cuestionario, sus respuestas serán anónimas, para ello debe marcar con una x el casillero correspondiente de acuerdo a su apreciación según usted crea conveniente:

1. **¿Conoce usted la historia de la línea recta?**
   e) Nunca ( )
   f) Parcialmente ( )
   g) En su mayor parte ( )
   h) Totalmente ( )

2. **Sus estudiantes cuentan con los conocimientos previos necesarios sobre el estudio de la línea recta.**
   e) Si ( )
   f) No ( )
   g) En parte ( )
   ¿Por qué?.....

3. **El proceso de enseñanza-aprendizaje que maneja con los estudiantes los hace desde una perspectiva:**
   - Empírica ( )
   - Científica ( )
   - Ambas ( )

4. **Escriba el número de estudiantes que poseen las siguientes calificaciones:**

   e) 9 - 10 ( )

   f) 7 - 8 ( )

   g) Menos de 7 ( )

   ¿Por qué?.....

5. **La ecuación general de la línea recta es:**

   e) $Ax + By + C = 0$ ( )

   f) $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$ ( )

   g) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ( )

   h) $y = mx + b$ ( )

¡GRACIAS POR SU COLABORACIÓN!

Anexo 6 (encuesta a padres de familia):

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN

CARRERA DE FÍSICO – MATEMÁTICAS

ENCUESTA DIRIGIDA A PADRES DE FAMILIA

Señor Padre de Familia:

Al saludarle, deseo invitarle a responder el presente cuestionario que tiene como propósito acumular datos cualitativos y cuantitativos para la realización de la tesis de grado de Licenciado en Ciencias de la Educación, Mención Físico- Matemáticas, le solicito respetuosa y comedidamente a usted, se digne proporcionar la información requerida para tal propósito.

Sus respuestas serán anónimas, para ello debe marcar con una x el casillero correspondiente de acuerdo a su apreciación según usted crea conveniente:

1. **Su hijo asiste regularmente a clases.**
   c) Si ( )
   d) No ( )

2. **Su representado es responsable y cumplidor con las obligaciones del colegio.**
   d) Si ( )
   e) No ( )
   f) En parte ( )

3. **Su hijo presenta alguna discapacidad física o mental:**
   d) Si ( )
   e) No ( )
   f) En parte ( )
   ¿Cuál?.....
   ....

4. **Usted cada qué tiempo se acerca a la institución educativa a preguntar el rendimiento académico de su representado:**
   g) Semanal ( )
   h) Quincenal ( )
   i) Mensual ( )
   j) Trimestral ( )
   k) Quimestral ( )
   l) Cuando lo notifican ( )

5. **Cuál es la relación que usted tiene con su hijo:**
   d) Buena ( )
   e) Regular ( )
   f) Mala ( )

¡GRACIAS POR SU COLABORACIÓN!

Anexo 7 Test 1

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN

CARRERA DE FÍSICO MATEMÁTICA

TEST TALLER 1

1. **Responda verdadero (v) o falso (f), según corresponda:**
   - Euclides fue el primer matemático en el estudio de la línea recta ( )
   - Isaac Newton fue considerado el padre de la geometría ( )
   - René Descartes unió el algebra con la geometría ( )
   - La recta paralela al eje "y" no tiene pendiente ( )
2. **Complete las siguientes frases:**
   - Al eje "x" se lo conoce también con el nombre de ……
   - El plano cartesiano consta de…..... líneas …… entre……..
   - La pendiente de una recta es igual a la ……del ángulo de ……..que forma la recta con el ……..

3. **Hallar la pendiente m de los siguientes puntos:**

   c) (2, -1) y (4, 3) b) (6, -2) y (-1, 3)

4. **Se tiene el siguiente par de puntos (1, -6) y (-1, -3):**
   - Grafíquelos en un plano cartesiano
   - Determine la distancia entre ellos

Anexo 8 Test 2

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN

CARRERA DE FÍSICO MATEMÁTICA

1. **Halla la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $x + 2y + 8 = 0$. Grafique las rectas.**

2. **Hallar la ecuación general de la recta que pasa por el punto (-4, 3) y tiene pendiente $\frac{1}{2}$.**

3. **Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 3) y es paralela a la recta $\mathbf{2x + 3y - 5 = 0}$**

4. **Defina que es una línea recta.**

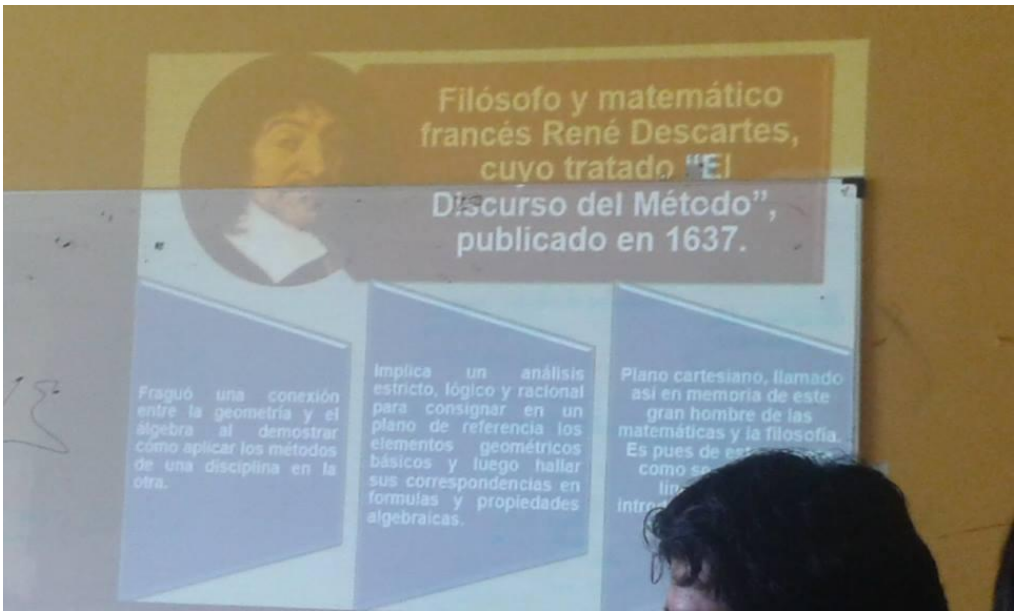
……

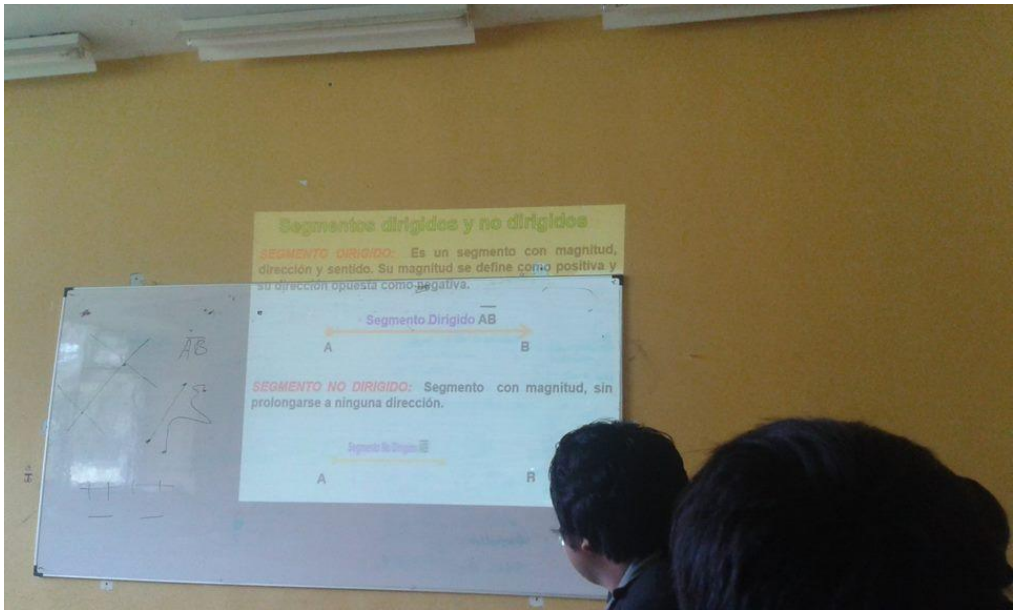
……

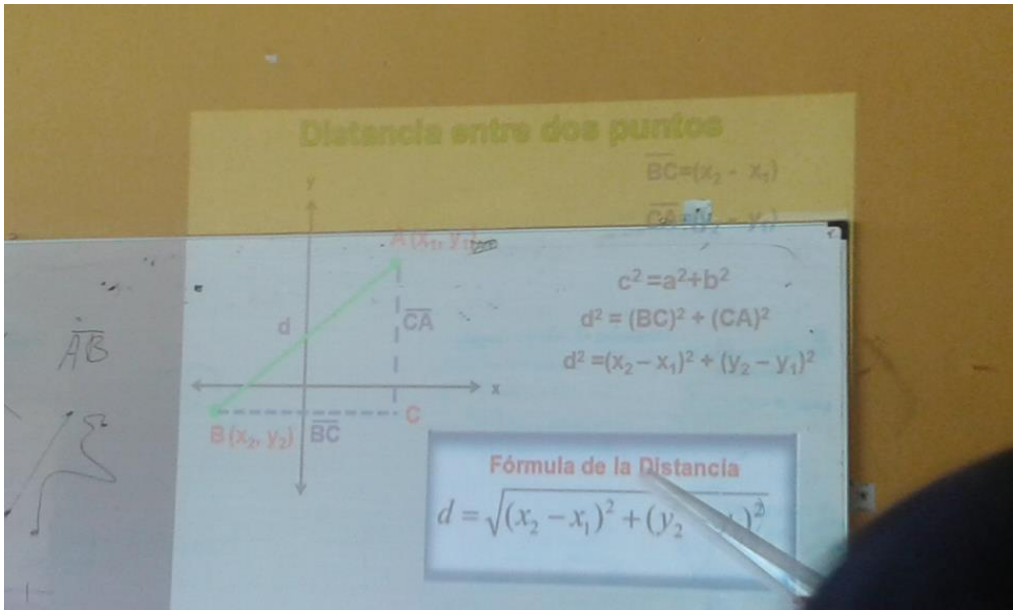
……

¡GRACIAS POR SU COLABORACIÓN!

Anexo 9: Fotografías






Distancia entre dos puntos
$\overline{BC}=(x_2 - x_1)$
$c^2 = a^2 + b^2$
$d^2 = (BC)^2 + (CA)^2$
$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$
$A(x_1, y_1)$
$B(x_2, y_2)$
$\overline{CA}$
$\overline{BC}$
d
C
x
y
$\overline{AB}$
Fórmula de la Distancia

ÍNDICE

- CERTIFICACIÓN iv
- AUTORÍA v
- CARTA DE AUTORIZACIÓN DE TESIS vi
- AGRADECIMIENTO vii
- DEDICATORÍA viii
- MATRIZ DE ÁMBITO GEOGRÁFICO iv
- MAPA GEOGRÁFICO Y CROQUIS x
- ESQUEMA DE TESIS xi

a. TÍTULO 1
b. RESUMEN EN CASTELLANO Y TRADUCIDO AL INGLES 2
c. INTRODUCCIÓN 4
d. REVISIÓN DE LITERATURA 7
   1. Línea recta……...7
   2. Aprendizaje de la línea recta……..……..50
   3. El proyector digital como recurso didáctico…….….53
   4. Estrategia de aplicación del proyector digital como recurso didáctico 62
   5. Valoración de la efectividad de la alternativa……72
e. MATERIALES Y MÉTODOS…….……78
f. RESULTADOS……..……..85
   - Resultados del diagnóstico 85
   - Resultados de la aplicación de los medios audiovisuales... 121
g. DISCUSIÓN 129
h. CONCLUSIONES…….....137
i. RECOMENDACIONES 139
j. BIBLIOGRAFÍA 140
k. ANEXOS 145
   Índice 267