UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN

CARRERA DE FÍSICO MATEMÁTICAS

TÍTULO

USO DE TÉCNICAS COOPERATIVAS PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS ESTUDIANTES DE 2ºAÑO DE BACHILLERATO GENERAL UNIFICADO DE LA UNIDAD EDUCATIVA FERNANDO SUÁREZ PALACIO DE LA CIUDAD DE LOJA. PERÍODO 2015-2016

Tesis previa a la obtención del grado de Licenciada en Ciencias de la Educación, Mención: Físico Matemáticas

AUTORA

MÓNICA JANETH ARMIJOS LABANDA

DIRECTOR

DR. MANUEL AGUSTÍN MOROCHO LÓPEZ

1859

LOJA-ECUADOR

2016

CERTIFICACIÓN

Dr. Manuel Agustín Morocho López

DOCENTE DE LA CARRERA DE FÍSICO MATEMÁTICAS DEL ÁREA DE LA EDUCACIÓN EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

CERTIFICA

Haber dirigido y monitoreado con pertinencia y rigurosidad científica la ejecución del proyecto de tesis titulado **USO DE TÉCNICAS COOPERATIVAS PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS ESTUDIANTES DE 2ºAÑO DE BACHILLERATO GENERAL UNIFICADO DE LA UNIDAD EDUCATIVA FERNANDO SUÁREZ PALACIO DE LA CIUDAD DE LOJA. PERÍODO 2015-2016**, de autoría de la Srta. Mónica Janeth Armijos Labanda, Egresada de la Carrera de Físico Matemáticas.

Por lo que se autoriza su presentación y defensa ante un tribunal de grado.

Loja, 4 de mayo del 2016

Dr. Manuel Agustín Morocho López

DIRECTOR DE TESIS

AUTORÍA

Yo, Mónica Janeth Armijos Labanda, declaro ser la autora de la presente tesis y eximo expresamente a la Universidad Nacional de Loja y a sus representantes jurídicos de posibles reclamos o acciones por el contenido de la misma.

Adicionalmente declaro y autorizo a la Universidad Nacional de Loja, la publicación de mi tesis en el Repositorio Institucional – Biblioteca Virtual.

Autora: Mónica Janeth Armijos Labanda

Firma: ______________________

C.I.: 1105889404

Fecha: Loja, 4 de mayo del 2016

CARTA DE AUTORIZACIÓN DE TESIS POR PARTE DE LA AUTORA, PARA LA CONSULTA, REPRODUCCIÓN PARCIAL O TOTAL Y PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DEL TEXTO COMPLETO

Yo, Mónica Janeth Armijos Labanda, declaro ser la autora de la tesis titulada **USO DE TÉCNICAS COOPERATIVAS PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS ESTUDIANTES DE 2ºAÑO DE BACHILLERATO GENERAL UNIFICADO DE LA UNIDAD EDUCATIVA FERNANDO SUÁREZ PALACIO DE LA CIUDAD DE LOJA. PERÍODO 2015-2016**, como requisito para optar por el grado de Licenciada en Ciencias de la Educación, Mención Físico Matemáticas, autorizo al Sistema Bibliotecario de la Universidad Nacional de Loja para que con fines académicos, muestre al mundo la producción intelectual de la Universidad, a través de la visibilidad de su contenido en el repositorio Digital Institucional siempre considerando las normas APA.

Los usuarios pueden consultar el contenido de este trabajo en RDI, en las redes de información del país y del exterior, con las cuales tenga convenio la Universidad.

La Universidad Nacional de Loja, no se responsabiliza por el plagio o copia de tesis que realice un tercero.

Para constancia de esta autorización, en la ciudad de Loja a los cuatro días del mes de mayo del dos mil dieciséis, firma la autora.

Firma____________________________

Autora: Mónica Janeth Armijos Labanda

Número de cédula: 1105889404

Dirección: Loja, Cdla. Daniel Álvarez, Francisco Miranda entre Miguel Hidalgo y Salvador Allende.

Correo electrónico: janeth_m19@hotmail.es

Teléfono: 2583246 Celular: 0991407997

DATOS COMPLEMENTARIOS

Director de tesis: Dr. Manuel Agustín Morocho López

Presidente: Dra. Flor Celi, Mg. Sc.

Primer Vocal: Dr. Guido Benavides Criollo, Mg. Sc

Segundo Vocal: Dr. Luis Collahuazo Durazno, Mg. Sc.

AGRADECIMIENTO

Agradezco a Dios por darme salud, perseverancia y responsabilidad para culminar una más de mis metas.

A la Universidad Nacional de Loja, por los conocimientos impartidos y por el apoyo brindado por cada uno de los docentes de la Carrera de Físico Matemática, en mi formación profesional.

A mis padres, por haberme dado la vida; por su comprensión; por ser mi inspiración; por su apoyo económico y moral durante mi preparación universitaria.

A mis hermanos por brindarme su apoyo incondicional en cada etapa de mi vida.

A mis amigas Gabriela y Adriana, por brindarme su amistad y hacer más amenos los años de preparación universitaria.

Al Director de Tesis Dr. Manuel Morocho López por su paciencia, responsabilidad y asesoría necesarias para mejorar este trabajo de investigación.

A la Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio, por la apertura brindada para la realización del trabajo de campo de mi investigación.

Mónica Janeth Armijos Labanda

DEDICATORIA

A mis padres Segundo y Clemencia, por tener el privilegio de su existencia; por ser maravillosos, ejemplos de vida, trabajo y sacrificio; por fomentar en mí valores y principios que me han permitido tomar responsabilidad de mi vida y me han hecho ser una mejor persona.

A mis hermanos César, Carla y Daniela, por hacer posibles momentos impredecibles en mi vida, por su alegría para enfrentar las cosas, pero sobre todo por confiar en mí, por ser mi compañía y darme ánimos en momentos difíciles.

Mónica Janeth Armijos Labanda

MATRIZ DE ÁMBITO GEOGRÁFICO

ÁMBITO GEOGRÁFICO DE LA INVESTIGACIÓN												
BIBLIOTECA: ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN												
TIPO DE DOCUMENTO	AUTOR / NOMBRE DEL DOCUMENTO	FUENTE	FECHA AÑO	ÁMBITO GEOGRÁFICO						OTRAS DESAGREGACIONES	OTRAS OBSERVACIONES
				NACIONAL	REGIONAL	PROVINCIAL	CANTÓN	PARROQUIA	BARRIO COMUNIDAD		
TESIS	MÓNICA JANETH ARMIJOS LABANDA / USO DE TÉCNICAS COOPERATIVAS PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS ESTUDIANTES DE 2ºAÑO DE BACHILLERATO GENERAL UNIFICADO, DE LA UNIDAD EDUCATIVA FERNANDO SUÁREZ PALACIO DE LA CIUDAD DE LOJA. PERÍODO 2015-2016	UNL	2016	ECUADOR	ZONA 7	LOJA	LOJA	EL VALLE	CARIGÁN	CD	LICENCIADA EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, MENCIÓN: FÍSICO MATEMÁTICAS

MAPA GEOGRÁFICO Y CROQUIS

UBICACIÓN GEOGRÁFICA DEL CANTÓN DE LOJA

CROQUIS DE LA INVESTIGACIÓN

UNIDAD EDUCATIVA FERNANDO SUÁREZ PALACIO

ESQUEMA DE TESIS

a. TÍTULO

USO DE TÉCNICAS COOPERATIVAS PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS ESTUDIANTES DE 2ºAÑO DE BACHILLERATO GENERAL UNIFICADO DE LA UNIDAD EDUCATIVA FERNANDO SUÁREZ PALACIO DE LA CIUDAD DE LOJA. PERÍODO 2015-2016

b. RESUMEN

La presente investigación hace referencia al uso de técnicas cooperativas para mejorar el aprendizaje de funciones trigonométricas en los estudiantes de 2º Año de Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio de la Ciudad de Loja. Período 2015-2016; para el estudio se realizó un diagnóstico, a fin de conocer las falencias y dificultades que presentan ellos al momento de aprender funciones trigonométricas, llegando así al cumplimiento del siguiente objetivo: aprovechar la importancia que tienen las técnicas cooperativas para mejorar el aprendizaje de funciones trigonométricas en los estudiantes de 2º Año de Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio. La investigación responde a un diseño descriptivo y explicativo por lo que se aplicaron las siguientes fases: comprensión, diagnóstico, modelación, taller pedagógico y prueba de Rangos-Signos de Wilcoxon. Luego de aplicada la alternativa se concluyó que las técnicas de aprendizaje cooperativo mejoran el aprendizaje de funciones trigonométricas, pudiendo así recomendar el uso de estas técnicas.

SUMMARY

The present investigation refers to the use of cooperative techniques learning to enhance the learning of trigonometric functions in the 2nd year students of General Unified Baccalaureate in the Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio of Loja city. Period 2015-2016, for the study was made a diagnosis, in order to know the shortcomings and difficulties presented them, at time to learn trigonometric functions, thus leading to compliance with the following objective: seize the importance of cooperative techniques to improve learning of trigonometric functions 2nd year students of Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio. The research responds to a descriptive and pre experimental design so that the following steps were apply: understanding, diagnosis, modeling, educational workshop and signs-ranges Wilcoxon's test. After applying the alternative, was concluded that cooperative learning techniques improve learning of trigonometric functions and were recommend the use of these techniques.

c. INTRODUCCIÓN

En el Ecuador se viene ejecutando el Plan Nacional del Buen Vivir cuyo socialismo "se identifica con la consecución del bien común y la felicidad individual, alejados de la acumulación y el consumo excesivos. Se obtiene con el máximo aprovechamiento de talentos y capacidades personales y colectivas. Es un espíritu vigoroso que impulsa el aprendizaje y la superación. Está presente en el amor, en la fraternidad, en la solidaridad y en la armonía con la naturaleza" (buenvivir.gob.ec, 2015, pág. 24)

Debido al socialismo del plan del buen vivir se hace necesario contribuir con el cumplimiento de dicho plan, es por eso que se realizó la investigación: uso de técnicas cooperativas para mejorar el aprendizaje de funciones trigonométricas en los estudiantes de 2º Año de Bachillerato General Unificado, cuyo problema de investigación es: ¿De qué manera el uso de técnicas cooperativas mejora el aprendizaje de funciones trigonométricas en los estudiantes de 2º Año de Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio de la ciudad de Loja, período 2015-2016?

En esta perspectiva se establecieron los siguientes objetivos:

- Elaborar una perspectiva teórica sobre el aprendizaje de funciones trigonométricas.
- Elaborar un diagnóstico de las deficiencias de los estudiantes o de las dificultades en el aprendizaje de funciones trigonométricas.
- Diseñar un modelo alternativo de técnicas cooperativas para que los estudiantes mejoren su aprendizaje de funciones trigonométricas.
- Utilizar el taller como técnica didáctica para experimentar el modelo de técnicas cooperativas para mejorar el aprendizaje de funciones trigonométricas en los estudiantes de 2º Año de Bachillerato General Unificado.
- Valorar el nivel de impacto del uso de técnicas cooperativas en el mejoramiento del aprendizaje de funciones trigonométricas en los estudiantes de 2º Año de Bachillerato General Unificado.

En este trabajo de investigación se desarrolla la siguiente información:

a) Título.
b) Resumen
c) Introducción.
d) Revisión de literatura.
e) Materiales y métodos.
f) Resultados.
g) Discusión.
h) Conclusiones.
i) Recomendaciones.
j) Bibliografía.
k) Anexos.

Se desarrollan contenidos sobre el estudio de funciones trigonométricas, además se plantea y desarrolla un diseño experimental de trabajo con las técnicas de aprendizaje cooperativo (TAC) para aprender dichas funciones. La aplicación del diseño experimental de técnicas cooperativas se lo hizo mediante un taller pedagógico, la valoración de la efectividad de esta alternativa se realizó mediante la prueba de los Rangos- Signos de Wilcoxon.

El diseño metodológico de la investigación es descriptivo, pre experimental, para lo cual se basa en las siguientes fases procedimentales y teóricas: inductiva, deductiva, modelación, diagnóstico y prueba de los rangos-signos de Wilcoxon.

La investigación tiene un enfoque cualitativo-cuantitativo en la cual se trabajó con una muestra de 23 estudiantes pertenecientes al paralelo “A” de 2° Año BGU de la Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio.

De los resultados obtenidos se concluyó que si se realiza un taller utilizando las técnicas de aprendizaje cooperativo se mejora el aprendizaje de las funciones trigonométricas, dado que se establece el cambio que puede generar dicha alternativa se recomienda el uso de técnicas de aprendizaje cooperativo para mejorar el aprendizaje de funciones trigonométricas en los estudiantes.

d. REVISIÓN DE LITERATURA

APRENDIZAJE DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

El modelo pedagógico que se ha considerado para realizar el estudio de las funciones trigonométricas corresponde al aprendizaje sociocultural de Lev Semionóvich Vigotsky.

Funciones trigonométricas desde la perspectiva de Lev Vigotsky

El aprendizaje de funciones trigonométricas se analizará desde la perspectiva del aprendizaje sociocultural de Vigotsky, haciendo relación de esta teoría con los contenidos teóricos de funciones trigonométricas que permitan propiciar aprendizajes en cada uno de los estudiantes.

Se parte de un problema luego se hace uso de funciones mentales, habilidades psicológicas, herramientas psicológicas, mediación y finalmente se analiza la zona de desarrollo próximo para cada subtema.

- Problema

  Para Pozo (1998:18) un problema es "una situación nueva o diferente de lo ya aprendido que requiere utilizar de modo estratégico técnicas ya conocidas".

- Funciones mentales

  - Las funciones mentales inferiores: "Sensación, atención reactiva, memoria espontánea, inteligencia sensomotora" (Serrano, 2012).
  - Las funciones mentales superiores: Memoria, agnosia, gnosia, praxia, apraxia, lenguaje y habla, inteligencia (Haniff, 2011).

- Habilidades psicológicas

  Vigotsky considera que en cualquier punto del desarrollo hay problemas que el niño está a punto de resolver. Este andamiaje puede reducirse gradualmente conforme el niño se haga cargo de la orientación.

★ <u>Herramientas psicológicas</u>

Las herramientas psicológicas son el puente entre las funciones mentales inferiores y las funciones mentales superiores. En este caso se va a utilizar el:

- "<u>Lenguaje gráfico</u>: como las señales en calles y carreteras son un código
- <u>Lenguaje oral y escrito</u>: el alfabeto es un código" (Hernández, 2000)
- <u>Signos</u>: Withers (s.f.) afirma

> Las palabras son signos. En lugar de hacerlos partícipes de un sistema de signos primario, en el que los objetos se denominan simplemente como ellos mismos, los adultos introducen a los niños en un sistema de signos secundario, en el que las palabras representan objetos e ideas.

Los signos además de palabras pueden ser las abreviaturas de las funciones trigonométricas, y las letras griegas que se usan comúnmente para referirse a ángulos. Se considera el alfabeto griego que es el más común en la trigonometría, y de manera especial en la denominación de ángulos, tenemos:

	LATEX	Render
Minúsculas griegas	alpha, \beta, \gamma, \delta,	$\alpha, \beta, \gamma, \delta,$
	epsilon, \zeta, \eta, \theta,	$\epsilon, \zeta, \eta, \theta,$
	\iota, \kappa, \lambda, \mu,	$\iota, \kappa, \lambda, \mu,$
	nu, \xi, \pi, \rho,	$\nu, \xi, \pi, \rho,$
	sigma, \tau, \upsilon, \phi,	$\sigma, \tau, \upsilon, \phi,$
	Chi, \psi, \omega.	χ, ψ, ω

Fuente: Santisi (2006)

★ <u>La mediación</u>

La cultura proporciona las orientaciones que estructuran el comportamiento de los individuos. La cultura nos dice que pensar y cómo pensar; nos da el conocimiento y la forma de construir ese conocimiento. Se establecerá de acuerdo a cada subtema.

- ★ Zona de desarrollo próximo: La zona de desarrollo próximo según Yola, Samantha & Rina (2012) es:

> El momento del aprendizaje que es posible en unos estudiantes dados las condiciones educativas apropiadas (…) (adulto y niño, tutor y pupilo, modelo y observador, experto y novato) trabajan juntos en las tareas que el estudiante no podría realizar solo, dada la dificultad del nivel (…) quienes saben más o son más diestros comparten sus conocimientos y habilidades con los que saben menos para completar una empresa.

Dentro de la zona de desarrollo próximo se considera el uso de grupos cooperativos definidos como "equipos reducidos de alumnos, generalmente de composición heterogénea en rendimiento y capacidad, aunque ocasionalmente pueden ser más homogéneos, utilizando una estructura de actividad tal que asegure al máximo la participación igualitaria" (Pujolás, 2009).

♾ ***Orígenes y aportadores de las funciones trigonométricas***

Se considera apropiado empezar el aprendizaje de funciones trigonométricas, con el estudio del origen y aportadores de las mismas, debido a que Vigotsky, considera al alumno como un ser histórico cultural, lo que se traduce a que el alumno está en cierta etapa de la historia y depende de la cultura en la que se encuentra, considerándose pertinente hacer un análisis de todos los acontecimientos desarrollados en años anteriores que permitieron dar lugar al estudio de funciones trigonométricas.

- ★ Problema: Elaborar un diagrama secuencial del origen e historia de las funciones trigonométricas, así como de los aportadores de las funciones trigonométricas haciendo uso de datos históricos de las mismas.

- ★ La mediación: En este tema se va a usar el siguiente medio para el aprendizaje:

Origen de las funciones trigonométricas

Haciendo un análisis del origen y desarrollo de las funciones trigonométricas, se conoce que:

> Hace unos 4000 años en Babilonia (antiguo reino localizado en la región de Mesopotamia) y Egipto se determinó y establecieron aproximaciones de medidas de ángulos y de longitudes de los lados de los triángulos rectángulos para ampliar y desarrollar medidas tanto en la agricultura como en la construcción de pirámides. Los egipcios fijaron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. Además se utilizaba la trigonometría para el estudio de la astronomía.
>
> 
>
> Luego de Egipto y Babilonia, el estudio de la trigonometría se asentó en Grecia, donde el matemático y astrónomo Griego Hiparco de Nicea, fue uno de los principales y más importantes desarrolladores de la Trigonometría. Este matemático construyó una tabla de cuerdas para solucionar triángulos. Comenzando con un ángulo de 71° y aproximándose hasta 180° con ampliaciones de 71°, la tabla facilitaba la longitud de la cuerda limitada por los lados del ángulo central ya que fragmentaba a una circunferencia de radio r. Hasta el momento no se conoce el valor que Hiparco utilizó para r.
>
> 300 años más tarde, el astrónomo griego Tolomeo utilizó r = 60, ya que los griegos tomaron el sistema numeral (base 60) que era usado por los babilonios.
>
> En India y Arabia la trigonometría era utilizada en la Astronomía. El primer uso de la función seno, aparece en el Shulba o Sulba Sutras escrito en India del siglo VIII al VI a. C. Se desarrolló entonces un sistema trigonométrico que estaba basado en la función seno en vez de cuerdas como los griegos. Esta nueva función, era la longitud del lado opuesto a un ángulo en un triángulo rectángulo de hipotenusa 1.
>
> Las funciones trigonométricas fueron estudiadas por Hiparco de Nicea (180-125 a.C.), Aryabhata (476-550), Varahamihira, Brahmagupta, Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, Abu'l-Wafa, Omar Khayyam, Bhaskara II, Nasir al-Din Tusi, Regiomontanus (1464), Ghiyath al-Kashi y Ulugh Beg (Siglo XIV), Madhava (a.C. 1400), Rheticus, y el alumno de éste, Valentin Otho. La obra de Leonhard Euler Introductio in analysin infinitorum (1748) fue la que estableció el tratamiento

analítico de las funciones trigonométricas en Europa, definiéndolas como series infinitas presentadas en las llamadas <Fórmulas de Euler>.

La noción de que debería existir alguna correspondencia estándar entre la longitud de los lados de un triángulo siguió a la idea de que triángulos similares mantienen la misma proporción entre sus lados. Esto es, que para cualquier triángulo semejante, la relación entre la hipotenusa y otro de sus lados es constante. Si la hipotenusa es el doble de larga, así serán los catetos. Justamente estas proporciones son las que expresan las funciones trigonométricas. A finales del siglo X ya se habían completado la función seno y las otras cinco funciones trigonométricas.

Durante el siglo XII el astrónomo alemán Georges Joachim, introdujo el concepto moderno de las funciones trigonométricas como proporcionales en vez de longitudes de algunas determinadas líneas.

En el siglo XVIII, el físico y matemático suizo Leonard Euler, estudió la notación actual de las funciones trigonométricas y se le atribuye el descubrimiento de la letra e como base del logaritmo natural, así como la unidad imaginaria que generalmente se denota con la letra i. Euler también popularizó el número pi (π).

Durante el siglo XX la trigonometría ha realizado muchos aportes en el estudio de los fenómenos de onda y oscilatorio, así como el comportamiento periódico, el cual se relaciona con las propiedades analíticas de las funciones trigonométricas. En astronomía se utiliza para medir distancias a estrellas próximas, para la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas de navegación satelital (Pérez V., 2010).

De acuerdo con Pérez V., (2010), el desarrollo del estudio de las funciones trigonométricas se originó en la antigua Babilonia, siendo su principal desarrollador Hiparco de Nicea, demostrando con una tabla de cuerdas la solución de triángulos empezando la medición en 71° hasta 180°,lográndose así desarrollar las 6 funciones trigonométricas hasta antes de la culminación del siglo X. Con el aporte de varios físicos, matemáticos y astrónomos se definieron de mejor manera las funciones trigonométricas e incluso se dan aplicaciones de estas en Astronomía y Física.

Representantes modernos de las funciones trigonométricas

Conocer los aportadores de las funciones trigonométricas permite orientar el aprendizaje adquiriendo referencias de los estudios y descubrimientos y aportes de personajes anteriores a nuestra época que se interesaron en estudiar las funciones trigonométricas, entre algunos aportadores Mattrigonometria (2008) señala:

Francois Viette.

Francois Viette nació en Francia en 1540, fue un matemático francés, que hizo importantes contribuciones a las matemáticas en las áreas de aritmética, álgebra, la trigonometría y la geometría, falleció en París en 1603.

Algunas de sus obras son las siguientes:

1. La Harmonicon coeleste, realizada entre 1564 y1568, el cual es un trabajo de astronomía y trigonometría. Esta obra no se imprimió nunca.

2. El Canon mathematicus, que contiene notables contribuciones a la trigonometría. Generaliza una aproximación analítica a la trigonometría que se designa a veces por el vocablo <>. Así, aplicando sistemáticamente el álgebra a la trigonometría. En particular, en el Canon encontramos las siguientes identidades:

   $\text{SEN}\ \theta = \text{SEN}\ (60^{o} + \theta) + \text{SEN}\ (60^{o} - \theta)$

   $3\ \text{SEN}\theta - 4\text{SEN}3\ \theta = \text{SEN}3\theta$

   $\text{CSC}\theta - \text{COT}\theta = \text{TAN}\ (\theta/2)$

   $\text{CSC}\theta + \text{COT}\theta = \text{COT}\ (\theta/2)$

Viette descubre de nuevo la mayor parte de las identidades elementales y obtiene fórmulas generales equivalentes a las expresiones de Sen (nx) y Cos (nx) en función de Sen x y Cos x. Consigue mediante una manipulación ingeniosa de los triángulos rectángulos.

Fórmulas que convierten un producto de funciones en una suma o una diferencia, la fórmula obtenida por Viette:

$\text{Sen}\ (A+B) + \text{sen}\ (A-B) = 2\text{sen}A\ (\cos B)$

$\text{Sen}\ (A-B) - \text{sen}\ (A-B) = 2\text{sen}B\ (\cos A)$

Y fórmulas análogas para los cósenos. Viette obtiene también el teorema del coseno aunque lo formula así:

$$\frac{2ab}{a^2+b^2+c^2} - \frac{1}{sen(90° + C)}$$

Donde a, b y c son los lados y C un ángulo. (Mattrigonometria, 2008).

De acuerdo con Mattrigonometria, (2008), La Harmonicon coeleste, se enfoca en aportaciones a la astronomía y trigonometría mientras que El Canon mathematicus describe las identidades trigonométricas coseno y seno, a la vez que Viette formula el producto de funciones y el teorema del coseno.

3. (…) En su obra Variorum de Rebus Mathematicis, publicada en 1593, se encuentra un enunciado equivalente al del teorema de la tangente:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}} = \frac{\frac{a+b}{2}}{\frac{a-b}{2}}$$

Donde A y B son ángulos, a y b son los lados de un triángulo. Viette considera la trigonometría como una rama independiente de las matemáticas y hace una exposición de la misma análoga a la de Rhaeticus, aunque perfeccionando las tablas trigonométricas de este. Aumenta las tablas de Rhaeticus para las seis funciones trigonométricas dando valores para intervalos de un segundo con una precisión de siete decimales (Mattrigonometria, 2008).

De acuerdo con Mattrigonometria, se entiende que la función tangente descrita por Francois Viette es una función análoga a la planteada anteriormente por Rhaeticus, siendo esta vez mejorada y además Viette perfecciona las tablas trigonométricas.

Entre otros autores que brindaron sus aportes a las funciones trigonométricas, se hace mención a:

Edmund Gunter

Nació en 1581 en Hertfordshire-Inglaterra y falleció en Londres 1626. Sus principales trabajos versaron sobre trigonometría y cálculo logarítmico.

Introdujo los términos coseno y cotangente, desarrolló la aritmética logarítmica y, en astronomía, descubrió la variación anual de la declinación magnética (Achury, 2011).

En concordancia con Achury, Edmund Gunter, realizó trabajos en trigonometría y en cálculo logarítmico siendo su más notable aporte la inserción de los términos coseno y cotangente.

Rheticus

Georg Joachim von Lauchen, nació en Feldkirch actual Austria en 1514 y falleció en Kosice ubicada en Eslovaquia en 1576. Matemático y astrónomo alemán. Relacionó por primera vez las funciones trigonométricas con los ángulos (en vez de con los arcos) y elaboró una de las mejores tablas trigonométricas de su época. Nombrado en 1536 profesor de astronomía en la Universidad de Wittemberg, fue uno de los primeros seguidores de la hipótesis copernicana y discípulo de Nicolás Copérnico, a quien convenció para que publicase su famosa obra De revolutionibus orbium caelestium (Achury, 2011).

En concordancia con Achury, el matemático y astrónomo Rheticus relacionó por primera vez las funciones trigonométricas con los ángulos y elaboró las mejores tablas trigonométricas de su época.

Leonhard Euler

En el siglo XVIII, el matemático suizo Leonhard Euler fue quien verdaderamente fundó la trigonometría moderna, definiendo las funciones trigonométricas mediante expresiones con exponenciales de números complejos. Esto convirtió a la trigonometría en sólo una de las muchas aplicaciones de los números complejos.

De hecho, Euler demostró que las propiedades básicas de la trigonometría eran simplemente producto de la aritmética de los números complejos (Achury, 2011).

De acuerdo con Achury, el aporte de Leonhard Euler dentro de las funciones trigonométricas, fue la aplicación de los números complejos para demostrar varias propiedades de la trigonometría deduciendo éstas mediante productos de éstos números.

Thomas Fincke

Thomas Fincke nació en Flensburg-Dinamarca (Alemania) el 6 enero 1561 y murió Copen Hagen-Dinamarca el 24 abril 1656) fue un danés, matemático y físico, y un profesor de la Universidad de Copenhague por más de 60 años.

Su logro duradero se encuentra en su libro Geometría rotundi 1583, en la que introdujo los nombres modernos, de las funciones trigonométricas tangente y secante. (Achury, 2011).

Según lo descrito por Achury, comprendo que Thomas Fincke matemático y físico, realizó estudios dentro del campo de la trigonometría, aportando los nombres modernos de la función tangente y la función secante.

Isaac Newton

Nació en la pequeña aldea de Woolsthorpe- Lincolnshire el 25 de diciembre de 1642, y murió la madrugada del 20 de marzo en Kensington- Londres. (…) En la rama de trigonometría, Newton encontró la serie para el sen x, y series similares para el cos x y la tg x. Con la invención del Cálculo, las funciones trigonométricas fueron incorporadas al Análisis, donde todavía hoy desempeñan un importante papel tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas. (Mattrigonometria, 2008).

De acuerdo con Mattrigonometria, Newton aportó a las funciones trigonométricas con el descubrimiento de la serie para el sen x, y series similares para el cos x y la tg x, incorporándolas al análisis dentro del cálculo.

Los desarrollos más importantes para las funciones trigonométricas comenzaron a partir de la elaboración de tablas trigonométricas, la demostración de propiedades de las funciones trigonométricas así como su inserción dentro del cálculo siendo sus principales aportadores, Leonhard Euler e Isaac Newton entre otros matemáticos y físicos.

- Zona de Desarrollo Próximo: La ZDP es el momento del aprendizaje que es posible en estudiantes dadas las condiciones educativas apropiadas donde maestro y alumno trabajan juntos en las tareas que el estudiante no podría realizar solo, dada la dificultad del nivel. En la zona de desarrollo próximo se utilizará la TAC (técnica de aprendizaje cooperativo) <<rompecabezas>> en donde el estudiante tendrá que resolver la siguiente situación problema: Elaborar un diagrama secuencial del origen e historia de las funciones trigonométricas, así como de los aportadores de las funciones trigonométricas haciendo uso de datos históricos de las mismas; y es esta resolución de la situación problema en donde el estudiante pasará de sus funciones mentales inferiores a las superiores, con la ayuda de sus compañeros y docente que le permitirán aprender el origen y los aportadores de las funciones trigonométricas.

    - ***Utilidad a la humanidad de las funciones trigonométricas, conceptos básicos de geometría y trigonometría.***

“El desarrollo del ser humano está íntimamente ligado con su interacción en el contexto socio histórico-cultural” (Vigotsky, s.f), por esta razón se hace importante comprender la interacción de las funciones trigonométricas con otras ramas de la ciencia, analizando las funciones trigonométricas con su aplicación en las demás ciencias y en aspectos de la vida diaria.

- Problema: Enunciar las aplicaciones de las funciones trigonométricas en la vida diaria mencionando una relación con materiales o elementos que circundan el entorno de aprendizaje.

- La mediación: El siguiente texto con información de acuerdo al tema, como medio para el aprendizaje:

Aprendizaje de las aplicaciones de las funciones trigonométricas

Para evidenciar las interacciones de las funciones trigonométricas con las demás ciencias González (2009) afirma que:

> Se encuentran notables aplicaciones de las funciones trigonométricas en la física y en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos y como se propagan las ondas: las ondas que se producen al tirar una piedra en el agua, o al agitar una cuerda cogida por los dos extremos, o las ondas electromagnéticas de la luz, el microondas o los rayos-x, las ondas sonoras, entre otros,

- ♣ Astronomía

  Cálculo del radio de la Tierra, distancia de la Tierra a la Luna, distancia de la Tierra al Sol, predicción de eclipses, elaboración de calendarios, etc.

- ♣ Artillería

  ¿A qué distancia se encuentra un blanco al que se desea disparar con una catapulta o con un cañón?

- ♣ Aviación

  En una base aérea parten dos aviones a la misma velocidad formando un ángulo y siguiendo en trayectorias rectas, se puede determinar la distancia que se encuentran entre los mismos.

- ♣ Cartografía

  Elaboración del mapa de un lugar del que se conocen algunas distancias y algunos ángulos.

- ♣ Navegación

  Construcción de cartas marinas en las que se detalle la ubicación de escollos, arrecifes, etc.

- Construcciones

  Cómo construir un edificio para que cumpla ciertas exigencias de orientación. En qué dirección se excava un túnel para que salga, al otro lado de la montaña, en el lugar deseado.

De acuerdo con González, en campos como la artillería, la astronomía, aviación, cartografía, construcciones, navegación, entre otros se evidencia aplicaciones de las funciones trigonométricas permitiendo estas resolver problemas que se presentan en los mismos.

Entre otras importantes aplicaciones Jiménez (s.f.) menciona:

- Aplicaciones CAD y Dibujo

  Las curvas, elipse, círculos utilizan en su formulación funciones trigonométricas.

- Electricidad

  Muchas señales de aparatos eléctricos usan funciones trigonométricas para ser modelados, las series de Fourier permiten casi definir cualquier señal como suma ponderada de senos y cosenos.

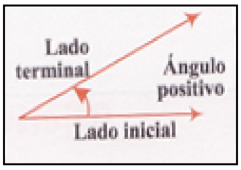
En concordancia con el criterio de Jiménez, las funciones trigonométricas son usadas para modelar otras funciones destinadas a graficar figuras cónicas en el programa AutoCAD, también para modelar algunas señales de los aparatos eléctricos.

Conceptos básicos de geometría y trigonometría

- Ángulos.

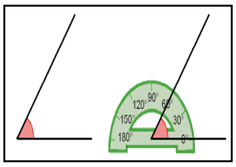
Es importante que el alumno tenga el interés para que pueda reconocer y graficar un ángulo, si esto no es posible puede valerse de la comunicación con otros compañeros, o hacer uso de conocimientos desarrollados anteriormente que le sirvan para entender dicho conocimiento.

♣ Definición de ángulo



Los ángulos se miden por la rotación del lado inicial sobre el otro lado final, si la rotación es en sentido anti horario, el ángulo es positivo, si la rotación es en sentido horario, el ángulo es negativo (Galindo, 2014, pág. 84).

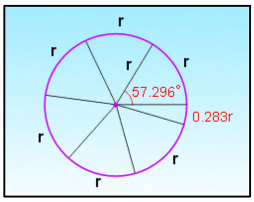
♣ Grados sexagesimales



La unidad de medida de los ángulos son los grados, la medida de una vuelta completa a la circunferencia es de 360°, entonces 180° es igual a media vuelta y 90 es un cuarto de vuelta. Un grado se subdivide en 60 minutos y un minuto en sesenta segundos. (Galindo, 2014, pág. 84).

De acuerdo con Galindo, los ángulos miden la rotación del lado inicial sobre el lado final; los ángulos se pueden medir en grados siendo así que una vuelta completa equivale a 360° = 2πrad.

♣ Radianes



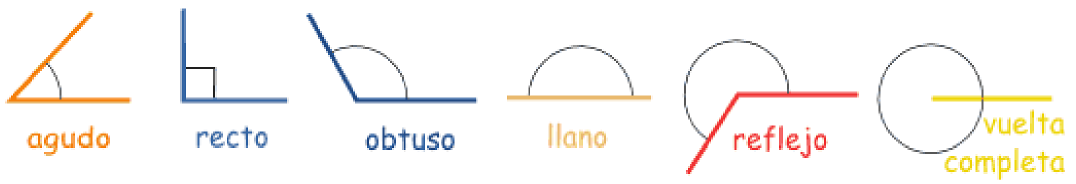
Un radián, en este sentido, es el ángulo central que se encuentra en una circunferencia, con un arco que tiene la misma longitud que el radio.

Dicho de otro modo: un radián es equivalente a 180º/π (pi). Esta unidad, que puede identificarse a través del símbolo rad, facilita la realización de diversos cálculos, todos expresados a través de divisores o múltiplos de π (Definición de, (s.f.), párrafo 1,2).

El radian se define como el ángulo central que se encuentra en una circunferencia, con un arco que tiene la misma longitud que el radio que es equivalente a 180°/ π.

- Clases de ángulos.

Tipos de ángulos	Descripción
Ángulo agudo	Un ángulo de menos de 90º
Ángulo recto	Un ángulo de 90º
Ángulo obtuso	Un ángulo de más de 90º pero menos de 180º
Ángulo llano	Un ángulo de 180º
Ángulo reflejo o cóncavo	Un ángulo de más de 180º



Fuente: Recuperado de (Disfruta las matemáticas, 2011)

- <u>Zona de Desarrollo Próximo (ZDP):</u> Mientras el alumnos se relacionan con sus compañeros realizando un trabajo conjunto usando la TAC <<Student teams achievement división>> y también con el docente el estudiante podrá resolver la siguiente situación problema: Enunciar las aplicaciones de las funciones trigonométricas en la vida diaria o con otras ciencias mencionando una relación con materiales o elementos que circundan el entorno de aprendizaje, esta resolución de la situación problema el estudiante , le permitirá aprender mediante la mediación, andamiaje y las herramientas psicológicas necesarias para que se produzca el aprendizaje en cada estudiante.

Funciones trigonométricas y su definición en el triángulo rectángulo.

El alumno tiene conocimientos previos de funciones trigonométricas definidas en el triángulo rectángulo, las ha estudiado anteriormente dentro de la geometría, es por eso que se trata de hacer una conexión con ese conocimiento previo para luego estudiar las funciones trigonométricas dentro de la trigonometría.

- <u>Problema:</u> Resolver problemas de aplicación haciendo uso de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo

- La mediación: El siguiente texto con información de acuerdo al tema, como medio para el aprendizaje:

Definición de las funciones trigonométricas

Para Hiru (s.f.)

> Una función trigonométrica, también llamada circular, es aquella que se define por la aplicación de una razón trigonométrica a los distintos valores de la variable independiente, que ha de estar expresada en radianes. Existen seis clases de funciones trigonométricas: seno y su recíproca, la cosecante; coseno y su recíproca, la secante; y tangente y su recíproca, la cotangente. Para cada una de ellas pueden también definirse funciones circulares inversas: arco seno, arco coseno, etcétera.

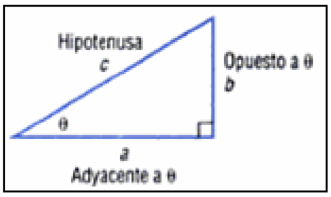
De acuerdo con Hiru (s.f.) las funciones trigonométricas o funciones circulares son las que enuncian las variables independientes mediante razones trigonométricas como la función seno, coseno tangente y sus inversas.

Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Según Galindo (2014)

> La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180°, por lo tanto en un triángulo rectángulo hay un ángulo recto y los otros dos ángulos son agudos.
>
> Como las razones dependen sólo del ángulo θ y no del triángulo en sí, se da a cada razón un nombre que involucra a θ:

Nombre de la función	Abreviatura	Valor
Seno de θ	Sen θ	b/c
Coseno de θ	Cos θ	a/c
Tangente de θ	Tan θ	b/a
Cotangente de θ	Cot θ	a/b
Secante de θ	Sec θ	c/a
Cosecante de θ	Csc θ	c/b



> En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados es decir: $c^2 = a^2 + b^2$

- ★ Zona de Desarrollo Próximo(ZPD): Es el momento en el cual el estudiante se relacionan con sus compañeros al realizar la TAC (TAC) <<tutoría entre iguales>> realizando un trabajo conjunto en los grupos cooperativos y también con el docente para que el estudiante pueda resolver la siguiente situación problema: Resolver problemas de aplicación haciendo uso de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, le permite relacionar el aprendizaje con el contexto social, además de que esta resolución le permitirá tener una idea de lo que son las funciones trigonométricas en la trigonometría.

∞ *Definición de funciones trigonométricas y el círculo unitario*

El aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas en el círculo unitario es una introducción al estudio de estas funciones en trigonometría, de igual manera se la analizará desde la teoría de aprendizaje socio-cultural de Vigotsky.

- ★ Problema: Definir y enunciar las funciones trigonométricas en el círculo unitario.

- ★ La mediación: El siguiente texto con información de acuerdo al tema, como medio para el aprendizaje:

Definición de funciones trigonométricas

Según Galindo (2014), si θ es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, entonces hay seis funciones trigonométricas de θ, cada una de las cuales es la razón de dos de los lados del mencionado triángulo.

Si θ es un ángulo agudo del triángulo rectángulo, entonces

Función	Definición
Seno de θ	$Sen\ \theta = \frac{lado\ opuesto\ de\ \theta}{hipotenusa}$
Coseno de θ	$Cos\ \theta = \frac{lado\ adyacente\ de\ \theta}{hipotenusa}$
Tangente de θ	$Tan\ \theta = \frac{lado\ opuesto\ de\ \theta}{Lado\ adyacente\ de\ \theta}$

Fuente: Galindo, Matemática 2, 2014

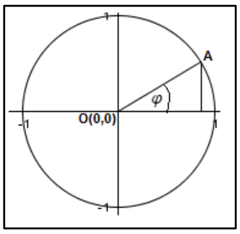
Función	Definición
Cotangente de θ	$Cot\ \ \theta = \dfrac{lado\ adyacente\ de\ \theta}{ado\ opuesto\ de\ \theta}$
Secante de θ	$Sec\ \theta = \dfrac{hipotenusa}{lado\ adyacente\ \ de\ \theta}$
Cosecante de θ	$Csc\ \theta = \dfrac{hipotenusa}{lado\ opuesto\ de\ \theta}$

Fuente: Galindo, Matemática 2, 2014

De acuerdo con el autor citado, las funciones trigonométricas que se definen dentro de un triángulo rectángulo en base del ángulo θ son las funciones, seno θ equivalente al cociente entre el lado opuesto al ángulo θ y la hipotenusa del triángulo rectángulo, y su función reciproca cosecante θ; la función coseno θ equivalente al lado adyacente al ángulo θ dividido entre la hipotenusa del triángulo rectángulo, y su función reciproca secante θ; y la función tangente θ equivalente a la razón entre el lado opuesto al ángulo θ y el lado adyacente al ángulo θ, y su función reciproca cotangente θ.

Funciones trigonométricas en el círculo unitario

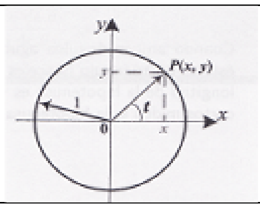
Según Galindo (2014), "el círculo unitario también llamado círculo trigonométrico, es un círculo de radio 1 y de centro en el origen"



Si se toma como vértice de cualquier ángulo el origen de coordenadas, es decir, el punto O (0, 0). Se considera como lado inicial el semieje positivo de abscisas, es decir, como punto de referencia para cualquier ángulo φ.

Sea dado un ángulo cualquiera φ es obvio que el lado final 0A, que describe este ángulo φ cortará el círculo unitario en cierto punto A(a, b). El lado final 0A, que describe el ángulo nulo, corta el círculo unitario en el punto (1, 0);

Si el punto (x, y) está a t unidades del punto (1,0) sobre el círculo unidad, entonces:

	sen t= y	csc t = 1/y (y≠0)
	cos t= x	sec t = 1/x (x≠0)
	tan t= y/x (x≠0)	cot t= x/y (y≠0)

Fuente: Galindo, Matemática 2, 2014

Cabe destacar que en el círculo unitario se encuentran definidas las funciones trigonométricas de igual manera que en un triángulo rectángulo con la diferencia de que la hipotenusa de este triángulo rectángulo, en este caso el radio de la circunferencia es igual a la unidad.

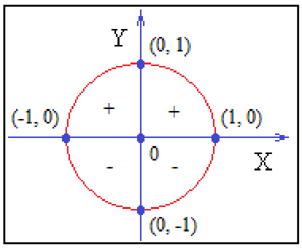
- Zona de Desarrollo Próximo (ZDP): Es el momento del aprendizaje que es posible en los estudiantes mientras se relacionan con sus compañeros realizando un trabajo conjunto cumpliendo con la TAC <<tutoría entre iguales>> y también con el docente para que el estudiante pueda resolver la siguiente situación problema: Definir y enunciar las funciones trigonométricas en el círculo unitario, aprendizaje que le permite al estudiante introducirse en el conocimiento de las funciones trigonométricas dentro de la trigonometría, considerando que el alumno ya tiene una historia leve de las funciones trigonométricas en geometría, por lo tanto se le facilita al estudiante la comprensión de las funciones trigonométricas.

  - ***Características de las funciones trigonométricas Seno, Coseno y Tangente***

- Problema: Definir y comprender las características de las funciones trigonométricas Seno, Coseno y Tangente.

- Herramientas psicológicas:

  - Signos: Para Vigotsky, las palabras son signos. Además de palabras pueden ser las abreviaturas de las funciones trigonométricas, y las letras griegas que se usan comúnmente para referirse a ángulos. Se considera los signos de las funciones trigonométricas según cada cuadrante del plano cartesiano.

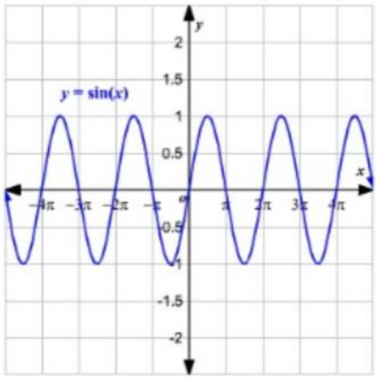
	Cuadrante				
Función	I	II	III	IV	
Sen θ	+	+	-	-	
Cos θ	+	-	-	+	
Tan θ	+	-	+	-	

Fuente: Galindo, Matemática 2, 2014

- La mediación: El siguiente texto con información de acuerdo al tema, como medio para el aprendizaje:

Características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente: dominio, recorrido, ceros, monotonía, simetría y periodicidad

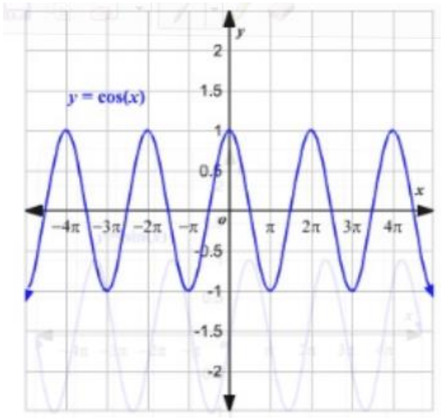
- **Características de la función seno**



Dominio: IR
Recorrido: { y ∈ IR | -1 ≤ y ≤ 1 }
Ceros: la función se anula para x = 0, x = $\pm\pi$, x = $\pm\ 2\pi$, x = $\pm 3\pi$ y y en general para x= k π, con k ∈ Z
Monotonía: El gráfico es creciente en los intervalos [0, $\pi/2$[y]3π/2 , 2 π] y decreciente en el intervalo]π/2, 3 π/2]
Simetría: Para la función sen x se cumple sen(-x) = -sen(x), luego es una función impar por consiguiente, es simétrica respecto al origen de coordenadas cartesianas.
Periodicidad: La función seno cumple que sen x = sen(x+2k π) con k ∈ Z, luego es una función de periodo 2 π.

Fuente: Galindo, Matemática 2, 2014

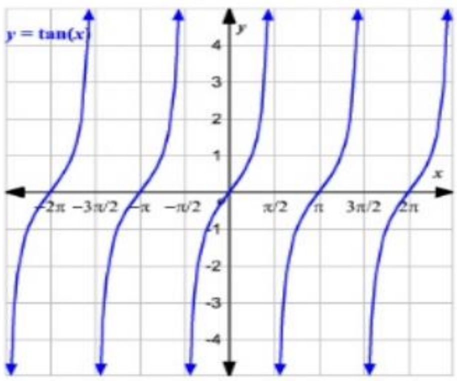
- **Características de la función coseno**



Dominio: IR
Recorrido: { y∈ IR | -1 ≤ y ≤ 1 }
Ceros: la función se anula para x = $\pm\pi/2$, x = $\pm$ $3\pi/2$, x = ±5 $\pi/2\ldots$ y en general para x = (2k+1) $\pi/2$, con k ∈ Z.
Monotonía: El gráfico es decreciente en los intervalos [0, π] y creciente en] π, 2].
Simetría: La función coseno se cumple que cos x = cos(-x), luego esta función es par por lo tanto es simétrica con respecto al eje y.
Periodicidad: La función coseno se cumple que cosx = cos(x+2k π) con k ∈ Z con un periodo de 2 π.

Fuente: Galindo, Matemática 2, 2014

- **Características de la función tangente**



Dominio: { x∈R | x ≠ π/2 (2k + 1) }
Recorrido: IR
Ceros: la función se anula para x = 0, x = $\pm\pi$, x = $\pm2\pi$ y en general para x = k π, con k∈ Z

Monotonía: El gráfico es creciente en $]-\pi/2, \pi/2[$
Simetría: Para la función tangente cumple tan(-x) = -tan(x), es una función impar *Periodicidad:* La función seno cumple que tan = tan(x+ kπ) con k ∈ Z, luego es una función de periodo π.
Asíntotas: La función no está definida para los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$; siendo las asíntotas las rectas x = (2k+1) $\pi/2$ con k ∈ Z.

Fuente: Galindo, Matemática 2, 2014

- Zona de Desarrollo Próximo (ZDP): Es el momento del aprendizaje que es posible en los estudiantes mientras se relacionan con sus compañeros realizando un trabajo conjunto en los grupos cooperativos planteados en la TAC <<Trabajo en equipo de logro individual>> y también con el docente para que el estudiante pueda resolver la siguiente situación problema: Definir y comprender las características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, la resolución de esta situación problema le permite al estudiante conocer las características de las funciones trigonométricas dentro de la trigonometría, por medio del lenguaje y las relaciones dentro del grupo de aprendizaje cooperativo, desarrollando sus funciones mentales superiores.

Funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante.

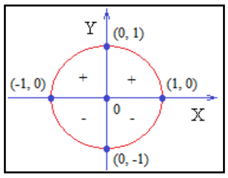
Al aprendizaje de las funciones trigonométricas inversas, es muy superficial, puesto que es similar al estudio de las funciones trigonométricas directas.

- Problema: Enunciar e identificar las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante.

- Herramientas psicológicas
  Las herramientas psicológicas son el puente entre las funciones mentales inferiores y las funciones mentales superiores. En este caso se utilizará:
  - Lenguaje oral y escrito: el alfabeto es un código" (Hernández, 2000)
  - Signos: Para Vigotsky, las palabras son signos. Los signos también pueden ser las abreviaturas de las funciones trigonométricas, y las letras griegas que se usan comúnmente para referirse a ángulos. Se

considera el alfabeto griego que es el más común en la trigonometría, y de manera especial en la denominación de ángulos,

	Cuadrante			
Función	I	II	III	IV
Csc θ	+	-	+	-
Sec θ	+	-	-	+
Cot θ	+	+	-	-

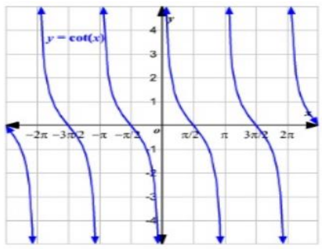


Fuente: Galindo, Matemática 2, 2014

- <u>La mediación:</u> El siguiente texto con información de acuerdo al tema, como medio para el aprendizaje:

Características de las funciones trigonométricas reciprocas.

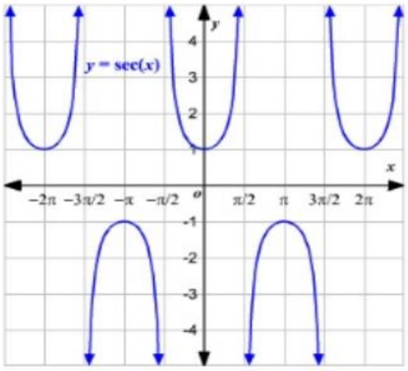
- **Características de la función cotangente**



Dominio: { x ∈ R | x ≠k·π }
Recorrido: *IR*
Ceros: la función se anula para x = $\pm\pi/2$, x = $\pm\, 3\pi/2$, x = $\pm 5\,\pi/2\ldots$ y en general para x = (2k+1)$\pi/2$, con k ∈ Z.
Simetría: Para la función tangente cumple cot(-x) = -cot(x),es una función impar
Periodicidad: La función seno cumple que cotx = cot(x+ kπ) con k ∈ Z, luego es una función de periodo π.
Asíntotas: La función no está definida para los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$; siendo las asíntotas las rectas x = (2k+1)$\pi/2$ con k ∈ Z.

Fuente: Galindo, Matemática 2, 2014

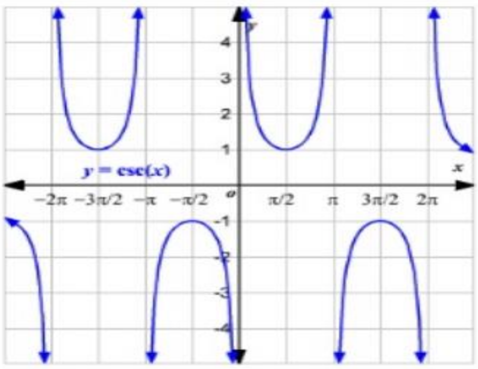
★ **Características de la función secante**



Dominio: { x∈R | x ≠ π/2 (2k + 1) }
Recorrido: { y∈R | y ≤ -1   ó   y ≥ 1 }
Ceros: la función no tiene ceros.
Monotonía: El gráfico es decreciente en los intervalos [$-\pi$, -$\pi/2$[∪]-$\pi/2$,0] y creciente en]0, $\pi/2$[∪]$\pi/2$, π[.
Simetría: Cumple sec x = sec(-x), siendo una función par.
Periodicidad: La función secante es una función de periodo 2 π.
Asíntota: Las asíntotas son las rectas x = (2k+1) π/2, con k ∈ Z.

Fuente: Galindo, Matemática 2, 2014

★ **Características de la función cosecante**



Dominio: { x∈R | x ≠k·π }
Recorrido: { y∈R | y ≤ -1   ó   y ≥ 1 }
Ceros: la función no tiene ceros
Monotonía: El gráfico es decreciente en los intervalos [-$\pi/2$,0[∪]0,$\pi/2$[,0] y creciente en [$\pi/2$,π[∪]π,3$\pi/2$].
Simetría: Es una función impar

Periodicidad: Periodicidad: Es una función de periodo 2 π.	
Asíntotas: Asíntotas: Las asíntotas son las rectas x= kπ con k ∈ Z".	

Fuente: Galindo, Matemática 2, 2014

- Zona Proximal de Desarrollo (ZPD): Es el momento del aprendizaje que es posible en los estudiantes mientras se relacionan con sus compañeros realizando un trabajo conjunto en los grupos cooperativos establecidos con la TAC <<Enseñanza acelerada por equipos>> y con el docente para que el estudiante pueda resolver la siguiente situación problema: Enunciar e identificar las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante aprendizaje que le permite mejorar la historia de su aprendizaje por lo tanto se le facilita al estudiante la comprensión de las funciones trigonométricas inversas.

Evaluación del aprendizaje según Vigotsky

- *Evaluación dinámica*

La evaluación dinámica es el tipo de evaluación propuesta para evaluar aprendizajes dentro de la perspectiva de aprendizaje socio-cultural de Vigotsky.

Para Corella, (2012)

El gran maestro Vigotsky estableció líneas claras sobre la evaluación y a los ojos de los especialistas contemporáneos debe ser algo central en los procesos educativos para el Siglo XXI.

Algunos teóricos, como Newman, Griffin y Cole, inspirados en Vigotsky, han propuesto una evaluación dinámica, la cual debe girar en ciertos aspectos, tales como:

La evaluación es una actividad de reflexión sobre la acción, basada en procedimientos sistemáticos de recolección, análisis, interpretación, valoración, registro y comunicación de información.

La evaluación implica instrumentos que no se circunscriben a conocer solamente lo que sabe el educando, sino especialmente cómo aprende, cuál es la calidad de esos aprendizajes, de dónde proviene su motivación, cuáles son sus intereses, sus aptitudes, sus actitudes, sus necesidades, su autoestima.

Los sujetos de la evaluación serán los educandos y los educadores (como individuos y como colectivo), la comunidad educativa y los funcionarios del sistema educativo.

La evaluación no puede desligarse de una cuestión de valores solidaridad, justicia, compromiso con los excluidos.

Se entiende que la evaluación deber ser una actividad de recolección de datos y análisis, en la que participe toda la comunidad educativa, con la realización de procedimientos que lleven a conocer no solo aprendizajes sino las motivaciones, aptitudes, actitudes y necesidades que tiene el estudiante, en la cual se pueda evidenciar los defectos y beneficios de cada una de las actividades realizadas en el proceso educativo.

Para Corella, (2012)

- *Características de la Evaluación Dinámica*

- Flexible
- Integral
- Continua
- Colectiva
- Cooperativa
- Personal
- Natural (evitar la presión, el estrés; que sea algo cotidiano, habitual…).

- *¿Cómo evaluar?*

Como un proceso y construcción edificante de las personas, es necesario elaborar registros completos que ayuden a entender qué le está sucediendo a cada educando, que incluyan los apartados suficientes con bastantes datos que permitan conocer en profundidad la complejidad de los procesos que cada educando realiza.

A través de la evaluación se puede diferenciar entre:

- Lo que las y los educandos saben, lo que saben hacer y cómo son.
- El proceso seguido: desafíos, aciertos, dificultades.

- La valoración según sus propias posibilidades.
- La valoración según los objetivos o competencias establecidos para el grado o nivel.
- Las medidas que hay que adoptar y las recomendaciones pertinentes.

De acuerdo con Corella la evaluación dinámica debe ser flexible, continua, colectiva e integral, que abarque bastantes datos que permitan conocer en profundidad la complejidad de los procesos que cada educando realiza para poder valorizar el proceso seguido y determinar las enmiendas pertinentes.

También Corella (2012), sostiene:

- *Auto-evaluación*

En la evaluación es importante considerar la opinión y la reflexión, dentro del contexto ético, de cada involucrado del proceso educativo para mejorar la práctica profesional, construir nuevas visiones, valorar proyectos establecidos, renovar contenidos y metodologías, entre otras. Para todos los involucrados es imperativo desarrollar la evaluación propia, de nuestros esfuerzos, omisiones y compromisos para continuar edificando la Educación.

Un docente realmente interesado en su práctica, responsable de la educación de sus educandos y apegado con las necesidades sociales, sería un dinámico evaluador, en especial de su propia práctica. En esta línea, un educador contemporáneo aplicaría una auto-evaluación y reflexionaría éticamente sobre los resultados, con el horizonte claro en el mejoramiento cualitativo de la educación. La auto-evaluación debe considerar aspectos como:

- La atención que presta al desarrollo integral de cada educando.
- Las expectativas (positivas o negativas) que tiene sobre cada aprendiente y la manera en que las mismas condicionan su actitud.
- La calidad de las relaciones interpersonales que sostiene con cada educando, con sus colegas y con la comunidad educativa.
- El crecimiento de sus propias potencialidades para comprender, cuestionar, sentir, acompañar, hacer, comunicar, jugar…
- La interpretación que hace de las condicionantes del entorno que inciden en la vida y aprendizaje del educando proyectando acciones que lo beneficien.

- Los recursos y soportes didácticos que utiliza, observando cómo facilitan o no las elaboraciones de los educandos.
- El grado de interés y motivación que sus actividades provocan en las y los aprendientes.
- Las innovaciones implementadas y sus efectos.
- La utilidad y relevancia de los contenidos que selecciona, tanto de los conocimientos, como de las capacidades y las actitudes.
- El ambiente socio-afectivo o clima que se mantiene en el aula.
- El aprovechamiento del horario de trabajo.
- La atención prestada a las diferencias individuales: ritmos, estilos, inteligencias, intereses…
- El nivel de autonomía que tienen las y los educandos, y las estrategias que implementa para elevarlo.
- Los procedimientos que utiliza para planificar y evaluar el aprendizaje.

Se entiende que la autoevaluación que realiza el docente de su proceso de enseñanza le permitirá analizar varios aspectos que no solo le harán visualizar sus errores sino los caminos que puede tomar para actualizar contenidos, metodologías, recursos entre otros aspectos como aprovechamiento de su horario de trabajo, distinción individual de los estudiantes, formas de evaluación que puede utilizar, etc.

> Para Pérez H., (2011), este tipo de evaluación tan original constituye una de las propuestas más interesantes de Vigotsky y se realiza mediante la interacción continua entre examinador-examinado, precisando ciertas >>ayudas<<, (previamente analizadas y que son de distintos niveles) según el grado de desempeño de cada examinado etc. Con la intención de determinar el desempeño real y potencial del sujeto. Por tanto, el fin básico de la evaluación dinámica consiste en diagnosticar el potencial de aprendizaje o bien la amplitud de las zonas de los niños. De igual manera, la evaluación dinámica no sólo serviría para determinar el nivel potencial de aprendizaje, sino también las líneas de acción por donde deberían verse encaminadas las prácticas educativas que jalonasen el desarrollo cognitivo (Brown y Reeve, 1987; Brown y Ferrara, 1985)

De acuerdo con Pérez H., la evaluación dinámica no solo nos permite evidenciar el desempeño sino el potencial de aprendizaje del estudiante para luego instaurar líneas de acción encaminadas al desarrollo cognitivo. El docente podrá identificar el nivel de dificultad de la situación problema para que se pueda dar una solución exitosa y así logre la zona de desarrollo próximo.

Tecnología

En el aprendizaje de las funciones trigonométricas se hace necesario el uso de TIC, como medios que faciliten el trabajo del alumno y a la vez su aprendizaje. Esto también permite al profesor mostrar al alumno la dualidad entre la exactitud que se consigue con las herramientas TIC y las aproximaciones con las representaciones hechas en papel.

- *La calculadora*

La calculadora es una herramienta de vital importancia, porque facilita las operaciones y cálculos con las distintas funciones trigonométricas, es recomendable a la hora de abordar su estudio, pues esta ahorrará tiempo y procedimientos a los estudiantes.

- *El ordenador*

Lo que en primer lugar se pide del software y de las herramientas de cómputo es que sean instrumentos pedagógicos. Deben permitir aprender mejor el contenido y los valores de la matemática que han sido definidos sin tomar en cuenta estas herramientas.

Por lo tanto, las herramientas usadas con el ordenador para el estudio de las funciones trigonométricas deberán ser simples en su utilización. Por ello se recomienda el uso de proyectores, bases de datos u otros métodos parecidos, en los que el uso del software sea relativamente simple.

Resultados de aprendizaje

- Comprender conceptos científicos

El alumno podrá comprender y explicar los conocimientos científicos, será capaz de definir que es una:

- Función trigonométrica
- Relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo
- Funciones trigonométricas en él círculo unitario
- Características de las funciones trigonométricas
- Funciones trigonométricas inversas
- Aplicar conocimientos sobre relaciones y funciones trigonométricas en problemas de la realidad

El estudiante, será capaz de aplicar y resolver problemas matemáticos mediante la aplicación de razones y funciones trigonométricas.

- Comprender las funciones trigonométricas

El alumno podrá explicar y comprender la definición de las funciones trigonométricas, así como las características particulares de cada una e interpretar su correspondiente función inversa.

DIAGNÓSTICO DE APRENDIZAJE DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

El presente diagnóstico se basa en indicadores de acuerdo al Enfoque histórico cultural de Vigotsky.

- **Criterio**

El docente conoce que su estudiante que está abordando las funciones trigonométricas, tiene dos tipos de funciones mentales: las inferiores y las superiores.

Indicadores

- Las funciones inferiores nacen con la persona, son las funciones naturales y están determinadas genéticamente.
- El comportamiento derivado de las funciones inferiores es limitado, está condicionado por lo que el niño puede hacer.
- Las funciones mentales superiores se adquieren
- Las funciones mentales superiores (FMS) se desarrollan a través de la interacción social
- Las FMS están determinadas por una sociedad específica y cultura concreta en la que viven profesores y alumnos
- Las funciones mentales superiores están mediadas culturalmente
- El comportamiento derivado de las funciones mentales superiores está abierta a mayores posibilidades
- El conocimiento es resultado de la interacción social
- En la interacción con los demás se adquiere la conciencia propia que permite aprender el uso de los símbolos que, a su vez permiten pensar en formas cada vez más complejas
- El uso de las funciones mentales inferiores, como la atención reactiva e inteligencia sensomotora le permiten al estudiante aprender las funciones trigonométricas y desarrollar sus funciones mentales superiores como la memoria, el habla y el aprendizaje de algunos símbolos necesarios al momento de tratar las funciones trigonométricas.

- **Criterio**

El docente concibe que las funciones mentales superiores sobre el aprendizaje funciones trigonométricas se desarrollan y aparecen en dos momentos. En un primer momento se manifiestan en el ámbito social y en segundo momento en el ámbito individual.

Indicadores

- La atención, la memoria, la formulación de conceptos son primero un fenómeno social y después progresivamente, se transforman en una propiedad del individuo
- Cada función mental superior primero es interpsicológica y después es individual, personal, intrapsicológica
- Cuando el estudiante se angustia por que algo no le sale bien, es una función mental interior, es una reacción del ambiente
- El conocimiento es posible en la comunicación con los demás
- La angustia, la emoción, la motivación, el arte de decir presente, aquí estoy, el aprendiz lo utiliza como instrumento para comunicarse; ya posee un instrumento para comunicarse. Es una función mental superior o habilidad psicológica propia, personal, dentro de su mente.
- El alumno hace uso de sus funciones mentales superiores dentro del desarrollo del trabajo en grupo que realiza para aprender funciones trigonométricas.

- **Criterio**

El docente comparte que en el estudiante hay que hacer una distinción entre habilidades interpsicológicas y habilidades intrapsicológicas, así como el paso que se da de las primeras a las segundas a través del concepto de interiorización.

Indicadores

- En la interacción social las habilidades interpsicológica se transforman en habilidades intrapsicológicas

- La interiorización, expresa el proceso de empoderamiento personal, de lo que era cultural
- El alumno se desarrolla a plenitud en la medida en qué se apropia, hace suyo, interioriza las habilidades interpsicológicas
- En un primer momento, depende de los otros
- Con la interacción de habilidades de los otros adquiere la posibilidad de actuar por sí mismo y asumir la responsabilidad de su actuar
- El alumno hace uso de sus funciones mentales superiores dentro del desarrollo del trabajo en grupo que realiza para aprender funciones trigonométricas, para luego interiorizar el conocimiento y aprehenderlo.

Criterio

El docente conoce que en el paso de una habilidad interpsicológica a una habilidad intrapsicológica los demás juegan un papel importante para que el llanto tenga sentido y significado, se requiere que el padre o la madre presten atención a ese llanto.

La posibilidad o potencial que los individuos tienen para ir desarrollando las habilidades psicológicas en un primer momento depende de los demás. Este potencial de desarrollo mediante la interacción con los demás, Vigotsky lo llama zona de desarrollo próximo.

Indicadores

- Cada estudiante tiene su zona de desarrollo próximo
- La zona de desarrollo próximo es la posibilidad que tiene cada estudiante (individuo) de aprender en el ambiente social, en la interacción con los demás
- El conocimiento y la experiencia del alumno es posibilitado por la experiencia y conocimiento de los otros
- Mientras más rica y frecuente sea la interacción con los demás, el conocimiento del estudiante será más rico y amplio
- El estudiante aprende con la ayuda de los demás, en el ámbito de la interacción social.

- La ZDP, del estudiante es la etapa de máxima potencialidad de aprendizaje de funciones trigonométricas con la ayuda de los demás compañeros
- La interacción social como posibilidad de aprendizaje de funciones trigonométricas es su zona de desarrollo próximo
- La zona de desarrollo próximo del estudiante puede ser amplia o ampliada desde el pasado, presente y futuro: interactuando con científicos, comunidades de investigación, autores notables, conferencistas, grupos cooperativos de aprendizaje, encuentros, conferencias, simposios, congresos, prometeos, etc.
- Inicialmente las personas (maestros, padres o compañeros) que interactúan con el estudiante son las que en cierto sentido, son responsables de que el individuo aprenda
- Aprendiendo el estudiante en su zona de desarrollo próximo que se da durante el trabajo de grupos cooperativos, gradualmente asumirá la responsabilidad de construir su conocimiento sobre funciones trigonométricas y guiar su propio comportamiento
- El nivel de desarrollo de las habilidades interpsicológicas depende del nivel de interacción social
- El nivel de desarrollo y aprendizaje que el individuo puede alcanzar con la ayuda, guía o colaboración de los adultos o de sus compañeros siempre será mayor que el nivel que pueda alcanzar por sí solo
- La zona de desarrollo próximo del alumno se da en los grupos cooperativos, a través de la interacción con los demás el alumnos es capaz de desarrollar conocimientos sobre funciones trigonométricas.

Criterio

Los símbolos, las obras de arte, ciencia y tecnología, la escritura, los diagramas, los mapas, los dibujos, los signos, los sistemas numéricos, en una palabra, las herramientas psicológicas son el puente para que el estudiante pase de las funciones mentales inferiores a las superiores.

Indicadores

Las herramientas psicológicas:

- Son motivo para la interacción social
- Hacen posible el paso de las FMI a las FMS
- Posibilitan el paso de la habilidades interpsicológicas a las habilidades intrapsicológicas
- Hacen que el alumno aprenda, que construya el conocimiento
- Median los pensamientos, sentimientos y conductas de los estudiantes
- Condicionan la capacidad de pensar, sentir y actuar del estudiante
- Como el lenguaje permite del estudiante pensar y controlar su comportamiento
- Hacen al alumno cobrar conciencia de sí mismo y ejercitar el control voluntario de sus acciones
- Como el lenguaje hace que el alumnos pueda afirmar o negar, en ese momento empieza a ser distinto y diferente de los objetos y de los demás
- Como el lenguaje ayudan a que el alumno se apropie de la riqueza del conocimiento, apropiándose del contenido y herramientas del pensamiento.
- Permiten al alumno desenvolverse dentro de la zona de desarrollo próximo a través del lenguaje que se usa en el aprendizaje de funciones trigonométricas.

- **Criterio**

Profesores y estudiantes saben que al nacer solo están desarrolladas las funciones mentales inferiores, con la interacción con los demás las funciones mentales superiores se aprenden y se van desarrollando algo completamente diferente, de lo que recibimos, genéticamente por herencia.

Indicadores

- Lo que aprendemos depende de las herramientas psicológicas que posee la persona
- Las herramientas psicológicas, dependen de las culturas en que vivimos

- Nuestros pensamientos, nuestras experiencias, nuestras intenciones y nuestras acciones están culturalmente mediadas
- La cultura proporciona las orientaciones que estructura el comportamiento de los individuos
- Lo que los seres humanos perciben como deseable o no deseable depende del ambiente, la cultura y sociedad a la que pertenecen
- El ser humano, en cuanto sujeto que conoce, no tiene acceso directo, a los objetos; el acceso es mediado a través de las herramientas psicológicas de que dispone
- El conocimiento se construye a través de la interacción con las demás mediada por la cultura, desarrolladas histórica y socialmente
- La cultura es determinante primario del desarrollo individual
- Los seres humanos son los únicos que crean cultura y en ella se desarrollan
- A través de la cultura el aprendiz adquiere el contenido de su pensamiento, el conocimiento
- La cultura nos dice qué pensar y cómo pensar
- La cultura nos da el conocimiento y la forma de construir ese conocimiento

Criterio

En el proceso de aprendizaje, docentes y estudiantes analizan el legado científico y tecnológico de los temas, construyen sus utilidades en el presente y avizoran futurables humanos de buen vivir, conocimiento y bienes culturales para las futuras generaciones

Indicadores

- El conocimiento de construye socialmente, el plan y programa de estudios están diseñados para posibilitar la interacción social: alumno- alumno- padre de familia alumno(a)-experto(a) alumno- comunidad alumno- grupo etc.
- La zona de desarrollo próximo, que es la posibilidad de aprender con el apoyo de los demás, crea condiciones para ayudarlo personalmente en su aprendizaje y desarrollo
- El conocimiento es construido a partir de la experiencia, va más allá del pizarrón y acetato, introduce actividades de laboratorio, experimentación y

solución de problemas contextuales. Máxima preocupación por el ambiente de aprendizaje

- El aprendizaje es construcción social en equipos, clubs, comunidades de aprendizaje, grupos ecológicos, grupos de andinismo, excursiones, rincones de aprendizaje, técnicas cooperativas, vínculos asociativos con la comunidad, grupos de socorro y ayuda, grupos de deportes, de recreación, grupos de investigación acción, etc.
- El dialogo entendido como intercambio activo entre locutores es básico en el aprendizaje, mediante el estudio cooperativo, grupos y equipos de trabajo participativo en discusiones de alto nivel sobre el contenido del aprendizaje de funciones trigonométricas
- El aprendizaje es un proceso activo en el que se experimenta, se cometen errores, se buscan soluciones, la búsqueda, la indagación, la exploración, la investigación y la solución de problemas contextuales propios del medio comunitario-social." (Tusa, 2015)

TÉCNICAS DE APRENDIZAJE COOPERATIVO PARA EL ESTUDIO DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

- Origen de las técnicas de aprendizaje cooperativo

Las técnicas de aprendizaje cooperativo tienen su origen en el siglo XVI, desarrolladas a través de los años siendo fundamentado por diversos personajes, tal como García (2009) afirma:

> Las bases del aprendizaje cooperativo las sentaron los pedagogos como Saint Simón, Robert Owen, Carlos Furier del siglo XVI, quienes empiezan a hablar del aprendizaje entre iguales y enseñar a otros para aprender.
>
> En el siglo XVIII Joseph Lancaster y Andrew Bell en Inglaterra plantearon el aprendizaje por grupos cooperativos, luego Francis Parker y John Dewey lo acogieron y popularizaron en EEUU. El movimiento de las técnicas cooperativas continuó gracias a que Dewey empleó métodos científicos que recogieran datos sobre las funciones y los procesos de la cooperación en grupo.
>
> En el siglo XIX Francis Parker abrió una escuela en Nueva York aplicando el método cooperativo.
>
> En el siglo XX se empieza a difundir en EEUU el aprendizaje cooperativo a manera de luchar contra la concepción predominante de aprendizaje individualista, a la vez que permitía lidiar con las diferentes etnias, lenguas, religiones y diversidades que se dan en las escuelas de este país. Esta técnica tenía como fin favorecer la interculturalidad además de incrementar y mejorar el aprendizaje.
>
> En los años sesenta continúa evolucionando la teoría y la aplicación de las técnicas cooperativas en el ámbito escolar sobre todo en EEUU y Canadá, aplicándose también en Holanda, Israel, Noruega e Inglaterra y luego se extiende a países europeos como Italia, Suecia, España.

De acuerdo con García, el aprendizaje cooperativo se originó en el siglo XVI cuando los pedagogos empiezan a plantear el aprendizaje entre iguales, luego en el siglo XVII se planteó su aplicación en Inglaterra, mientras que en el siglo XIX se abre una escuela con este tipo de enseñanza en New York, siendo en el siglo XX cuando se empieza a difundir en los EEUU, países europeos y asiáticos.

- Aportaciones que han contribuido al desarrollo de las técnicas de aprendizaje cooperativo

Las técnicas de aprendizaje cooperativo se han ido fundamentando y moldeando con base en varias teorías, García (2009) menciona:

> Teoría del Desarrollo Cognitivo de Piaget, manifiesta que cuando los individuos cooperan en el medio, ocurre un conflicto socio-cognitivo que crea con un desequilibrio, que a su vez estimula el desarrollo cognitivo.
>
> Vigostky, el aprendizaje cooperativo requiere de grupos de estudios y trabajo, ya que es en el trabajo en grupo donde los docentes y los alumnos pueden cooperar con los menos favorecidos en su desarrollo cognitivo.
>
> Teoría del Desarrollo Conductista de Skinner, manifiesta que en las contingencias grupales, las acciones seguidas de recompensas motivan a los alumnos en su trabajo cooperativo.
>
> Hassard (1990), el trabajo cooperativo es un abordaje de la enseñanza en el que los grupos de estudiantes trabajan juntos para resolver problemas y para determinar tareas de aprendizaje.
>
> Coll y Solé (1990), presentan la interacción educativa como situaciones donde los protagonistas actúan a la misma vez y de forma recíproca en un contexto determinado, en torno a una tarea o a un contenido de aprendizaje con el único fin de lograr objetivos claramente determinados
>
> Colomina (1990), el trabajo cooperativo tiene buenos efectos en el rendimiento académico de los participantes así como las relaciones socioafectivas que se establecen entre ellos.
>
> Mario Carretero (1993), dice que el conocimiento se construye en la realidad del interactuar del ser humano.
>
> Violeta Barreto (1994), el aprendizaje cooperativo es aquel en el que el alumno construye su propio conocimiento mediante un complejo proceso interactivo en el que intervienen tres elementos: los alumnos, el contenido, y el profesor.

De acuerdo con García, la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget que manifiesta que cuando los individuos cooperan en el medio se crea un desequilibrio que estimula el desarrollo cognitivo; los planteamientos de Vigotsky donde el docente puede cooperar con los menos favorecidos; la teoría del desarrollo conductista de Skinner; Hassard que menciona que en los grupos los estudiantes trabajan para resolver problemas y determinadas tareas de aprendizaje, Coll y Solé, Colomina, Carretero y Barreto han desarrollado el aprendizaje cooperativo analizándolo en diferentes aspectos como el socio-cognitivo, las estructuras grupales y trabajo en equipo que tienen como fin lograr el propio aprendizaje del alumno.

- ¿Qué es el aprendizaje cooperativo?

Pujolás (2009) define al aprendizaje cooperativo como:

> El uso didáctico de equipos reducidos de alumnos, generalmente de composición heterogénea en rendimiento y capacidad, aunque ocasionalmente pueden ser más homogéneos, utilizando una estructura de actividad tal que asegure al máximo la participación igualitaria (para que todos los miembros del equipo tengan las mismas oportunidades de participación) y se potencie al máximo la interacción simultánea entre ellos, con la finalidad de que todos los miembros de un equipo aprendan los contenidos escolares, cada uno hasta el máximo de sus posibilidades y aprendan, además, a trabajar en equipo.

De acuerdo con Pujolás, el aprendizaje cooperativo es la aplicación de grupos reducidos de alumnos con rendimientos y capacidades distintas quienes mediante el trabajo en equipo realizan una actividad específica para construir sus propios aprendizajes logrando así potenciarlos, dentro del grupo cooperativo el estudiante es quien construye su aprendizaje mediante la interacción con los demás, poniendo al docente en un rol de guiador de ese aprendizaje que está siendo construido por él estudiante.

- ¿Para qué el aprendizaje cooperativo?

El aprendizaje cooperativo tiene como fin armonizar las diversas maneras de pensamiento que tienen los estudiantes, Alonso y otros (s.f.) afirma:

> El aprendizaje cooperativo ayuda a atender la diversidad de los alumnos, según sus distintos ritmos y estilos de aprendizaje; por tanto, es accesible y beneficioso para

todos, con independencia de sus diferencias. Además, fomenta valores y habilidades sociales que contribuyen al desarrollo integral de los alumnos como personas. Por ejemplo, el respeto a las diferencias, la responsabilidad individual y colectiva, la solidaridad, la escucha activa y la capacidad de reflexión y crítica.

De acuerdo con Alonso y otros, el aprendizaje cooperativo sirve para que los alumnos puedan acoplar sus diversas maneras de pensamiento, además de fomentar valores y habilidades sociales que le permitirán mejorar su relación con sus compañeros y lograr mejores resultados con sus aprendizajes.

- Ventajas de aprendizaje cooperativo.

TIPOS DE SITUACIONES	VENTAJAS DEL APRENDIZAJE COOPERATIVO
★ Problemas de ansiedad ★ Miedo a no ser aceptado o a equivocarse delante de otros ★ Bloqueo o frustración ante el desempeño de alguna tarea o actividad. ★ Temor al fracaso.	El aprendizaje cooperativo fomenta la autoestima y la confianza en sí mismo, permite un entorno de trabajo tranquilo y relajado, con tiempo y ocasiones suficientes para practicar y recibir la ayuda de los demás.
★ Escasa habilidad social. ★ Timidez, impulsividad ★ Dificultades para entablar amistades y para relacionarse con sus compañeros y/o con las personas adultas. ★ Rechazo a sus compañeros. ★ Trastornos del lenguaje.	Promueve la interacción entre iguales para aprender y contemplar actividades específicas, para desarrollar habilidades sociales y comunicativas.

TIPOS DE SITUACIONES	VENTAJAS DEL APRENDIZAJE COOPERATIVO
★ Poca autonomía. ★ Necesidad de continua ayuda por parte del profesor. ★ Dificultad para planificar una actividad y aprovechar el tiempo. ★ Escaso control de los progresos y dificultades en el proceso de aprender.	Reduce la dependencia de los alumnos respecto al profesor debido a la ayuda de los compañeros, favorece la autonomía e independencia, permite al profesor disponer de más tiempo para atender a los niños con mayores necesidades.
★ Distintos grados de competencia.	Beneficia a los alumnos que necesitan ayuda y a los que ayudan a estos, fomenta el trabajo entre compañeros de distintos grados de competencias de manera eficaz.
★ Diferencias sociales y culturales, según la procedencia, el idioma, las costumbres, etc.	Promueve la participación igualitaria de todos permite a los niños conocerse mejor y estrechar vínculos y fomenta el respeto mutuo.

Fuente: Alonso, y otros, Aprendizaje cooperativo, s.f.

- La conformación de los grupos.

En la conformación de los grupos para la aplicación de técnicas de aprendizaje cooperativo, es recomendable establecer roles a cada uno de los miembros para que todos los integrantes del grupo participen y así lograr el objetivo que el grupo persigue Johnson & Johnson (1999) consideran que:

> Los grupos de aprendizaje cooperativo deben estar conformados por un máximo de 4 estudiantes, teniendo la opción el docente de organizar según su conveniencia los grupos, teniendo en cuenta que cuanto menor es el tiempo disponible, más reducido debe ser el grupo y más fácil será detectar cualquier dificultad que pudieran tener los alumnos trabajando juntos.
>
> Previo a la conformación de grupos se debe decidir entre conformar un grupo homogéneo en el cuál los estudiantes tengan similares capacidades para enseñar

determinada prácticas sociales o alcanzar ciertos objetivos, o un grupo heterogéneo conformado por estudiantes con diferentes rendimientos, intereses y perspectivas de pensamientos que permitan un desequilibrio cognitivo, necesario para estimular el aprendizaje y desarrollo.

Con los estudiantes aislados se hace necesario crear grupos de apoyo para lo cual se pide a cada alumno que enumere tres compañeros de clase con los que le gustaría trabajar. Luego se identifica a los estudiantes aislados de la clase que no fueron escogidos, y un alumno de estos formará grupo con dos compañeros que si fueron elegido varias veces, y que además sean serviciales y solidarios. No se debe permitir que los alumnos conformen los grupos por afinidad, pues ellos suelen conformar grupos homogéneos que eliminan la posibilidad de que amplíen su círculo de relaciones.

La duración de los grupos depende del grupo conformado, si se trata de grupos de base, pueden durar todo el año; si se trata de un grupo informal, tendrá por duración una clase como máximo, los grupos formales también pueden durar todo un semestre o un año lectivo. Se aconseja dejar que los grupos trabajen juntos durante el tiempo necesario para lograr un buen resultado. Si los alumnos tienen problemas se los debe guiar para que aprendan y hagan uso de técnicas que les ayuden a solucionar sus conflictos. Si se les hace saber a los alumnos que en algún momento trabajarán con todos los otros, se sentirán mejor predispuestos a trabajar en grupo (Johnson & Johnson ,1999).

De acuerdo con Johnson & Johnson, las conformación de los grupos es la parte más importante del proceso de trabajar con grupos cooperativos, pues se vuelve necesario analizar las capacidades y el rendimiento de cada uno de los alumnos para lograr que al agruparlos se realice trabajo en equipo, siendo necesario asignar roles para poder controlar el adecuado desarrollo de la actividad grupal.

- Desarrollo de la alternativa de investigación

Para desarrollar las técnicas cooperativas se consideró la elaboración de planificaciones didácticas en que asocien la temática propuesta y las técnicas de aprendizaje cooperativo (TAC) con las cuales se consideró pertinente trabajar.

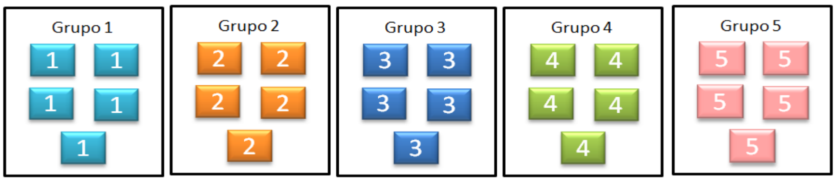
Planificación didáctica N°1

Técnica de aprendizaje cooperativo

Rompecabezas

- **Tema:** El uso de la TAC “rompecabezas” para el aprendizaje de los orígenes y aportadores de las funciones trigonométricas
- **Datos informativos**
  - **Institución Educativa:** Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio.
  - **Alumnos:** Segundo Año de Bachillerato General Unificado.
  - **Investigador:** Mónica Janeth Armijos Labanda
  - **Fecha:** 2015 - 04 -13
  - **Período:** 08h15 - 09h45
- **Objetivos**
  - ◊ Comprender el origen y aportadores de las funciones trigonométricas haciendo uso de la técnica de aprendizaje cooperativo (TAC) <<rompecabezas>>.
  - ◊ Explicar el origen y desarrollo de las funciones trigonométricas a través de los años.
  - ◊ Identificar los aportadores de las funciones trigonométricas.
  - ◊ Elaborar un diagrama secuencial del origen e historia de las funciones trigonométricas, así como de los aportadores de las funciones trigonométricas haciendo y uso de datos históricos de las mismas.
- **Normas de trabajo**
  - ◊ Se debe resolver el pre test y post test, con la mayor honestidad posible y luego devolverlos.
  - ◊ La lectura que se realiza debe ser comprensiva, puede utilizar algunas técnicas que le permitan la comprensión de la lectura tales como el subrayado, resumen, etc… la que se considere más adecuada.
  - ◊ Se pueden hacer preguntas durante el desarrollo de la clase, siempre que sean pertinentes y de acuerdo al tema.

★ **Metodología de trabajo**

Hora	Actividad
08h20	Presentación
08h25	Tomar lista a los alumnos
08h30	Planteamiento del tema de estudio
08h32	Aplicación de pre test
08h40	Enumerar los alumnos del 1 al 5 para la división de los alumnos en grupos, agrupando todos los alumnos 1, luego los 2 y así sucesivamente.  <u>Disposición de los grupos</u> Al disponer el aula para el trabajo en grupos cooperativos, el docente debe tener presentes las siguientes pautas: ★ Los miembros de un grupo de aprendizaje deben sentarse juntos y de forma tal que puedan mirarse a la cara. ★ Todos los alumnos deben estar en condiciones de ver al docente al frente del aula sin tener que retorcerse en sus sillas o adoptar una posición incómoda. ★ Los distintos grupos deben estar bastante separados como para que no interfieran unos con otros (Aprendizaje cooperativo, 2015).
08h45	Entrega de fragmentos de estudio sobre el origen y los aportadores de la funciones trigonométricas, e indicaciones sobre el trabajo en grupo a realizar. <u>Características presentes en cada grupo</u> ★ Interdependencia positiva: Cada miembro del equipo aprende por su pertenencia a él, por la colaboración y aportaciones de todos, con un objetivo común. El éxito del equipo depende del trabajo de todos sus miembros.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

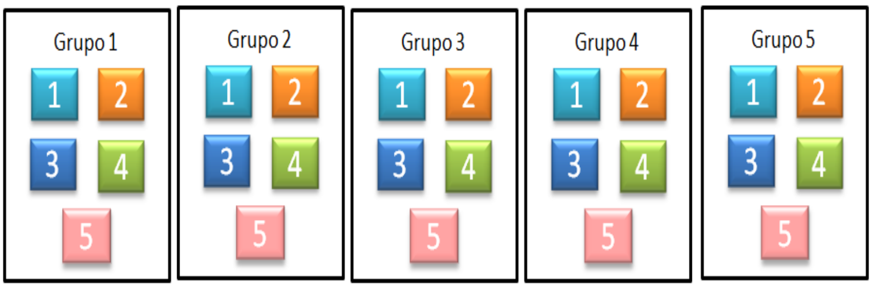
- ★ Responsabilidad individual: Cada miembro del equipo es responsable de una parte del trabajo, de manera que el éxito del equipo depende de todos.
- ★ Participación igualitaria: Todos los miembros del equipo deben participar.
- ★ Interacción simultánea: El trabajo cooperativo requiere una interacción entre todos los miembros del equipo, respetando unos turnos y unos tiempos. (Alonso, y otros, s.f.)

<u>Asignación de roles</u>

1. Encargado de buscar fundamentos: Les pide a los miembros del grupo que fundamenten sus respuestas y conclusiones con hechos o razonamientos.
2. Encargado de llevar un registro: Anota las decisiones y redacta el informe del grupo.
3. Encargado de verificar la comprensión: Se asegura de que todos los miembros del grupo sepan explicar cómo se llega a determinada respuesta o conclusión.
4. Integrador: Integra las ideas y los razonamientos de los miembros del grupo en una única posición con la que todos puedan concordar.
5. Verificador: Verifica la validez del trabajo del grupo en función de las instrucciones, del tiempo disponible y del sentido común (Johnson & Johnson, 1999).

</td>
</tr>
<tr>
<td>09h25</td>
<td>

Reagrupamiento de los alumnos en la llamada reunión de expertos, pero esta vez en un el nuevo grupo constará un miembro de cada uno los grupos antes conformados.



</td>
</tr>
</table>

09h40	Regreso al grupo original y cada uno explicará a sus demás compañeros el documento que preparó en la reunión de expertos. Para luego hacer una exposición sobre el fragmento de estudio entregado al grupo. 
09h45	Aplicación de pos test

★ Texto de estudio

Origen de las funciones trigonométricas

Haciendo un análisis del origen y desarrollo de las funciones trigonométricas, se conoce que:

> Hace unos 4000 años en Babilonia (antiguo reino localizado en la región de Mesopotamia) y Egipto se determinó y establecieron aproximaciones de medidas de ángulos y de longitudes de los lados de los triángulos rectángulos para ampliar y desarrollar medidas tanto en la agricultura como en la construcción de pirámides. Los egipcios fijaron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. Además se utilizaba la trigonometría para el estudio de la astronomía.
>
> 
>
> Luego de Egipto y Babilonia, el estudio de la trigonometría se asentó en Grecia, donde el matemático y astrónomo Griego Hiparco de Nicea, fue uno de los principales y más importantes desarrolladores de la Trigonometría. Este matemático construyó una tabla de cuerdas para solucionar triángulos. Comenzando con un ángulo de 71° y aproximándose hasta 180° con ampliaciones de 71°, la tabla facilitaba la longitud de la cuerda limitada por los lados del ángulo central ya que fragmentaba a una circunferencia de radio r. Hasta el momento no se conoce el valor que Hiparco utilizó para r.
>
> 300 años más tarde, el astrónomo griego Tolomeo utilizó r = 60, ya que los griegos tomaron el sistema numeral (base 60) que era usado por los babilonios.

En India y Arabia la trigonometría era utilizada en la Astronomía. El primer uso de la función seno, aparece en el Shulba o Sulba Sutras escrito en India del siglo VIII al VI a. C. Se desarrolló entonces un sistema trigonométrico que estaba basado en la función seno en vez de cuerdas como los griegos. Esta nueva función, era la longitud del lado opuesto a un ángulo en un triángulo rectángulo de hipotenusa 1.

Las funciones trigonométricas fueron estudiadas por Hiparco de Nicea (180-125 a.C.), Aryabhata (476-550), Varahamihira, Brahmagupta, Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, Abu'l-Wafa, Omar Khayyam, Bhaskara II, Nasir al-Din Tusi, Regiomontanus (1464), Ghiyath al-Kashi y Ulugh Beg (Siglo XIV), Madhava (a.C. 1400), Rheticus, y el alumno de éste, Valentin Otho. La obra de Leonhard Euler Introductio in analysin infinitorum (1748) fue la que estableció el tratamiento analítico de las funciones trigonométricas en Europa, definiéndolas como series infinitas presentadas en las llamadas <Fórmulas de Euler>.

La noción de que debería existir alguna correspondencia estándar entre la longitud de los lados de un triángulo siguió a la idea de que triángulos similares mantienen la misma proporción entre sus lados. Esto es, que para cualquier triángulo semejante, la relación entre la hipotenusa y otro de sus lados es constante. Si la hipotenusa es el doble de larga, así serán los catetos. Justamente estas proporciones son las que expresan las funciones trigonométricas. A finales del siglo X ya se habían completado la función seno y las otras cinco funciones trigonométricas.

Durante el siglo XII el astrónomo alemán Georges Joachim, introdujo el concepto moderno de las funciones trigonométricas como proporcionales en vez de longitudes de algunas determinadas líneas.

En el siglo XVIII, el físico y matemático suizo Leonard Euler, estudió la notación actual de las funciones trigonométricas y se le atribuye el descubrimiento de la letra e como base del logaritmo natural, así como la unidad imaginaria que generalmente se denota con la letra i. Euler también popularizó el número pi (π).

Durante el siglo XX la trigonometría ha realizado muchos aportes en el estudio de los fenómenos de onda y oscilatorio, así como el comportamiento periódico, el cual se relaciona con las propiedades analíticas de las funciones trigonométricas. En astronomía se utiliza para medir distancias a estrellas próximas, para la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas de navegación satelital (Pérez V., 2010).

Representantes modernos de las funciones trigonométricas

Conocer los aportadores de las funciones trigonométricas permite orientar el aprendizaje adquiriendo referencias de los estudios y descubrimientos y aportes de personajes anteriores a nuestra época que se interesaron en estudiar las funciones trigonométricas, entre algunos aportadores Mattrigonometria (2008) señala:

Francois Viette.

Francois Viette nació en Francia en 1540, fue un matemático francés, que hizo importantes contribuciones a las matemáticas en las áreas de aritmética, álgebra, la trigonometría y la geometría, falleció en París en 1603.

Algunas de sus obras son las siguientes:

1. La Harmonicon coeleste, realizada entre 1564 y1568, el cual es un trabajo de astronomía y trigonometría. Esta obra no se imprimió nunca.

2. El Canon mathematicus, que contiene notables contribuciones a la trigonometría. Generaliza una aproximación analítica a la trigonometría que se designa a veces por el vocablo <>. Así, aplicando sistemáticamente el álgebra a la trigonometría. En particular, en el Canon encontramos las siguientes identidades:

$$\text{SEN}\ \theta = \text{SEN}\ (60^{\circ} + \theta) + \text{SEN}\ (60^{\circ} - \theta)$$
$$3\ \text{SEN}\theta - 4\text{SEN}3\ \theta = \text{SEN}3\theta$$
$$\text{CSC}\theta - \text{COT}\theta = \text{TAN}\ (\theta/2)$$
$$\text{CSC}\theta + \text{COT}\theta = \text{COT}\ (\theta/2)$$

Viette descubre de nuevo la mayor parte de las identidades elementales y obtiene fórmulas generales equivalentes a las expresiones de Sen (nx) y Cos (nx) en función de Sen x y Cos x. Consigue mediante una manipulación ingeniosa de los triángulos rectángulos.

Fórmulas que convierten un producto de funciones en una suma o una diferencia, la fórmula obtenida por Viette:

$$\text{Sen}\ (A+B) + \text{sen}\ (A-B) = 2\text{sen}A\ (\cos B)$$
$$\text{Sen}\ (A-B) - \text{sen}\ (A-B) = 2\text{sen}B\ (\cos A)$$

Y fórmulas análogas para los cosenos. Viette obtiene también el teorema del coseno aunque lo formula así:

$$\frac{2ab}{a^2+b^2+c^2} - \frac{1}{sen(90° + C)}$$

Donde a, b y c son los lados y C un ángulo.

3. En su obra Variorum de Rebus Mathematicis, publicada en 1593, se encuentra un enunciado equivalente al del teorema de la tangente:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}} = \frac{\frac{a+b}{2}}{\frac{a-b}{2}}$$

Donde A y B son ángulos, a y b son los lados de un triángulo. Viette considera la trigonometría como una rama independiente de las matemáticas y hace una exposición de la misma análoga a la de Rhaeticus, aunque perfeccionando las tablas trigonométricas de este. Aumenta las tablas de Rhaeticus para las seis funciones trigonométricas dando valores para intervalos de un segundo con una precisión de siete decimales (Mattrigonometria, 2008).

Entre otros autores que brindaron sus aportes a las funciones trigonométricas, se hace mención a:

Edmund Gunter

Nació en 1581 en Hertfordshire-Inglaterra y falleció en Londres 1626. Sus principales trabajos versaron sobre trigonometría y cálculo logarítmico. Introdujo los términos coseno y cotangente, desarrolló la aritmética logarítmica y, en astronomía, descubrió la variación anual de la declinación magnética (Achury, 2011).

Rheticus

Georg Joachim von Lauchen, nació en Feldkirch actual Austria en 1514 y falleció en Kosice ubicada en Eslovaquia en 1576, matemático y astrónomo alemán. Relacionó por primera vez las funciones trigonométricas con los ángulos (en vez de con los arcos) y elaboró una de las mejores tablas trigonométricas de su época. Nombrado en 1536 profesor de astronomía en la Universidad de Wittemberg, fue uno de los primeros seguidores de la hipótesis copernicana y discípulo de Nicolás Copérnico, a quien convenció para que publicase su famosa obra De revolutionibus orbium caelestium (Achury, 2011).

Leonhard Euler

En el siglo XVIII, el matemático suizo Leonhard Euler fue quien verdaderamente fundó la trigonometría moderna, definiendo las funciones trigonométricas mediante expresiones con exponenciales de números complejos. Esto convirtió a la trigonometría en sólo una de las muchas aplicaciones de los números complejos. De hecho, Euler demostró que las propiedades básicas de la trigonometría eran simplemente producto de la aritmética de los números complejos (Achury, 2011).

Thomas Fincke

Thomas Fincke nació en Flensburg-Dinamarca (Alemania) el 6 enero 1561 y murió Copen Hagen-Dinamarca el 24 abril 1656) fue un danés, matemático y físico, y un profesor de la Universidad de Copenhague por más de 60 años.

Su logro duradero se encuentra en su libro Geometría rotundi 1583, en la que introdujo los nombres modernos, de las funciones trigonométricas tangente y secante. (Achury, 2011).

Isaac Newton

Nació en la pequeña aldea de Woolsthorpe- Lincolnshire el 25 de diciembre de 1642, y murió la madrugada del 20 de marzo en Kensington- Londres. (…) En la rama de trigonometría, Newton encontró la serie para el sen x, y series similares para el cos x y la tg x. Con la invención del Cálculo, las funciones trigonométricas fueron incorporadas al Análisis, donde todavía hoy desempeñan un importante papel tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas. (Mattrigonometria, 2008).

Planificación didáctica N°2

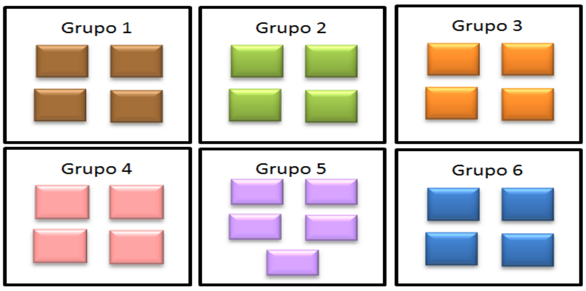
Técnica de aprendizaje cooperativo

Student teams achievement division

(Divisiones de rendimiento por equipos)

- **Tema:** El uso de la TAC "Student teams achievement división", para el aprendizaje de las aplicaciones de las funciones trigonométricas y aprendizaje de conceptos básicos de geometría y trigonometría.
- **Datos informativos**
  - **Institución Educativa:** Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio.
  - **Alumnos:** Segundo Año de Bachillerato General Unificado.
  - **Investigador:** Mónica Janeth Armijos Labanda
  - **Fecha:** 2015 - 04 - 15
  - **Período:** 10h40 - 12h00
- **Objetivos**
  - Comprender las aplicaciones de las funciones trigonométricas y conceptos básicos de geometría y trigonometría haciendo uso de la técnica de aprendizaje cooperativo (TAC) <<STAD>>.
  - Relacionara las aplicaciones de las funciones trigonométricas con elementos del medio circundante.
  - Enunciara aplicaciones de las funciones trigonométricas en la vida diaria mencionando una relación con materiales o elementos que circundan el entorno de aprendizaje.
- **Normas de trabajo**
  - Se debe resolver el pre test y post test, con la mayor honestidad posible y luego devolverlos.
  - La lectura que se realiza debe ser comprensiva, puede utilizar algunas técnicas que le permitan la comprensión de la lectura tales como el subrayado, resumen, etc. La que usted considere más adecuada.
  - Se pueden hacer preguntas durante el desarrollo de la clase, siempre que sean pertinentes y de acuerdo al tema.

★ **Metodología de trabajo**

Hora	Actividad
10h40	Tomar listas a los alumnos
10h45	Retroalimentación sobre el tema anterior
10h50	Planteamiento del tema de estudio
10h52	Aplicación de pre test
11h00	Presentación y trabajo de la lección por parte del docente.
11h20	Integración de grupos de 4 estudiantes por parte del docente.  Características de las estructuras cooperativas Para que exista el aprendizaje cooperativo los grupos de aprendizaje deben considerar ciertas características que debe reunir una actividad para ser cooperativa: ★ Interdependencia positiva: Cada miembro del equipo aprende por su pertenencia a él, por la colaboración y aportaciones de todos, con un objetivo común. El éxito del equipo depende del trabajo de todos sus miembros. ★ Responsabilidad individual: Cada miembro del equipo es responsable de una parte del trabajo, de manera que el éxito del equipo depende de todos. ★ Participación igualitaria: Todos los miembros del equipo deben participar. ★ Interacción simultánea: El trabajo cooperativo requiere una interacción entre todos los miembros del equipo, respetando unos turnos y unos tiempos. (Alonso, y otros, s.f.) La disposición de los grupos en el aula Al disponer el aula para el trabajo en grupos cooperativos, el docente debe tener presentes las siguientes pautas:

	1) Los miembros de un grupo de aprendizaje deben sentarse juntos y de forma tal que puedan mirarse a la cara. 2) Todos los alumnos deben estar en condiciones de ver al docente al frente del aula sin tener que retorcerse en sus sillas o adoptar una posición incómoda. 3) Los distintos grupos deben estar separados como para que no interfieran unos con otros (Aprendizaje cooperativo, 2015).
11h30	Entrega de texto de estudio sobre las aplicaciones de las funciones trigonométricas y conceptos básicos de trigonometría e indicaciones sobre el trabajo en grupo a realizar. Asignación de roles a los miembros de los grupos o Encargado de buscar fundamentos: Les pide a los miembros del grupo que fundamenten sus respuestas y conclusiones con hechos o razonamientos. o Encargado de llevar un registro: Anota las decisiones y redacta el informe del grupo. o Corrector: Corrige cualquier error en las explicaciones de otro miembro o resume y complementa cualquier dato importante que se haya omitido. o Inquisidor: Hace preguntas profundas que conducen a un análisis o profundizan la comprensión. o Integrador: Integra las ideas y los razonamientos de los miembros del grupo en una única posición con la que todos puedan concordar. (Johnson & Johnson, 1999)
11h50	Desintegración del grupo y aplicación individual del pos test.

★ **Texto de estudio**

Aplicaciones de las funciones trigonométricas

Para evidenciar las interacciones de las funciones trigonométricas con las demás ciencias González (2009) afirma que:

> Se encuentran notables aplicaciones de las funciones trigonométricas en la física y en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos y como se propagan las ondas: las ondas que se producen al tirar una piedra en el

agua, o al agitar una cuerda cogida por los dos extremos, o las ondas electromagnéticas de la luz, el microondas o los rayos-x, las ondas sonoras, entre otros,

- Astronomía

  Cálculo del radio de la Tierra, distancia de la Tierra a la Luna, distancia de la Tierra al Sol, predicción de eclipses, elaboración de calendarios, etc.

- Artillería

  ¿A qué distancia se encuentra un blanco al que se desea disparar con una catapulta o con un cañón?

- Aviación

  En una base aérea parten dos aviones a la misma velocidad formando un ángulo y siguiendo en trayectorias rectas, se puede determinar la distancia que se encuentran entre los mismos.

- Cartografía

  Elaboración del mapa de un lugar del que se conocen algunas distancias y algunos ángulos.

- Construcciones

  Cómo construir un edificio para que cumpla ciertas exigencias de orientación. En qué dirección se excava un túnel para que salga, al otro lado de la montaña, en el lugar deseado.

- Navegación

  Construcción de cartas marinas en las que se detalle la ubicación de escollos, arrecifes, etc.

Entre otras importantes aplicaciones Jiménez (s.f.) menciona:

- Aplicaciones CAD y Dibujo

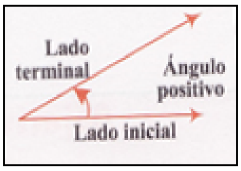
  Las curvas, elipse, círculos utilizan en su formulación funciones trigonométricas.

- Electricidad

  Muchas señales de aparatos eléctricos usan funciones trigonométricas para ser modelados, las series de Fourier permiten casi definir cualquier señal como suma ponderada de senos y cosenos.

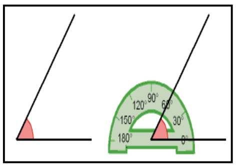
Conceptos básicos de geometría y trigonometría

- Definición de ángulo



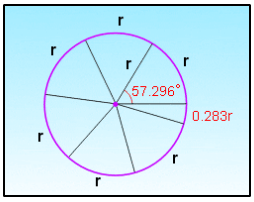
Los ángulos se miden por la rotación del lado inicial sobre el otro lado final, si la rotación es en sentido anti horario, el ángulo es positivo, si la rotación es en sentido horario, el ángulo es negativo (Galindo, 2014, pág. 84).

- Grados sexagesimales



La unidad de medida de los ángulos son los grados, la medida de una vuelta completa a la circunferencia es de 360°, entonces 180° es igual a media vuelta y 90 es un cuarto de vuelta. Un grado se subdivide en 60 minutos y un minuto en sesenta segundos. (Galindo, 2014, pág. 84).

- Radianes

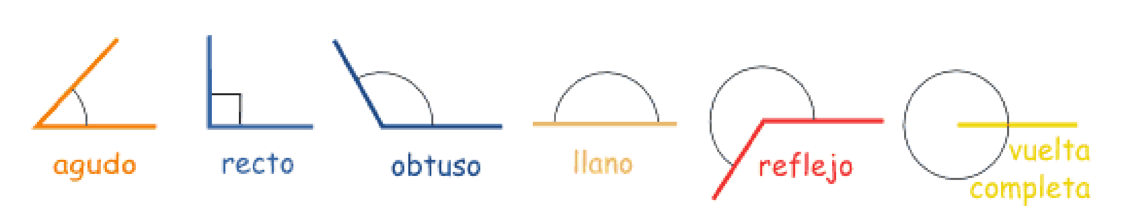


Un radián, en este sentido, es el ángulo central que se encuentra en una circunferencia, con un arco que tiene la misma longitud que el radio.

Dicho de otro modo: un radián es equivalente a 180º/π (pi). Esta unidad, que puede identificarse a través del símbolo rad, facilita la realización de diversos cálculos, todos expresados a través de divisores o múltiplos de π (Definición de, (s.f.), párrafo 1,2).

♣ Clases de ángulos.

Tipos de ángulos	Descripción
Ángulo agudo	Un ángulo de menos de 90º
Ángulo recto	Un ángulo de 90º
Ángulo obtuso	Un ángulo de más de 90º pero menos de 180º
Ángulo llano	Un ángulo de 180º
Ángulo reflejo o cóncavo	Un ángulo de más de 180º



Fuente: Recuperado de (Disfruta las matemáticas, 2011)

Planificación Didáctica N°3

Técnica de aprendizaje cooperativo

Aprendizaje cooperativo guiado

- **Tema:** El uso de la TAC “Aprendizaje cooperativo guiado” para el aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas y las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.
- **Datos informativos**
  - **Institución Educativa:** Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio.
  - **Alumnos:** Segundo Año de Bachillerato General Unificado.
  - **Investigador:** Mónica Janeth Armijos Labanda
  - **Fecha:** 2015 - 04 - 16
  - **Período:** 11h20 - 12h40
- **Objetivos**
  - ◊ Comprender la definición de funciones trigonométricas y las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, haciendo uso de la técnica de aprendizaje cooperativo (TAC) <<aprendizaje cooperativo guiado>>.
  - ◊ Comprender la definición de funciones trigonométricas.
  - ◊ Resolver problemas de aplicación haciendo uso de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

★ **Normas de trabajo**

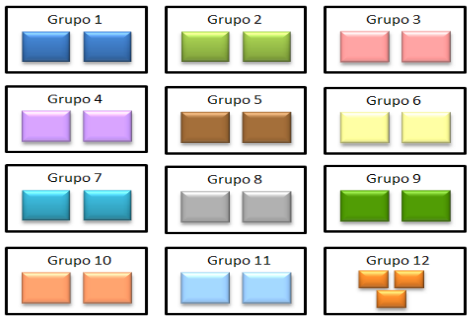
◊ Se debe resolver el pre test y post test, con la mayor honestidad posible y luego devolverlos.

◊ La lectura que se realiza debe ser comprensiva, puede utilizar algunas técnicas que le permitan la comprensión de la lectura tales como el subrayado, resumen, etc. La que usted considere más adecuada.

◊ Se pueden hacer preguntas durante el desarrollo de la clase, siempre que sean pertinentes y de acuerdo al tema.

★ **Metodología de trabajo**

<table>
<tr><th>Hora</th><th>Actividad</th></tr>
<tr><td>11h20</td><td>Tomar listas a los alumnos</td></tr>
<tr><td>11h25</td><td>Retroalimentación sobre el tema anterior</td></tr>
<tr><td>11h30</td><td>Planteamiento del tema de estudio</td></tr>
<tr><td>11h32</td><td>Aplicación de pre test</td></tr>
<tr><td>11h40</td><td>Conformación de grupos de dos personas en igual nivel de conocimiento



<u>Características de las estructuras cooperativas</u>

Para que exista el aprendizaje cooperativo los grupos de aprendizaje deben considerar ciertas características que debe reunir una actividad para ser cooperativa:

★ Interdependencia positiva: Cada miembro del equipo aprende por su pertenencia a él, por la colaboración y aportaciones de todos, con un objetivo común. El éxito del equipo depende del trabajo de todos sus miembros.

★ Responsabilidad individual: Cada miembro del equipo es responsable de una parte del trabajo, de manera que el éxito del equipo depende de todos.</td></tr>
</table>

	★ Participación igualitaria: Todos los miembros del equipo deben participar, todos cuentan. ★ Interacción simultánea: El trabajo cooperativo requiere una interacción entre todos los miembros del equipo, respetando unos turnos y unos tiempos (Alonso, y otros, s.f.). <u>La disposición de los grupos en el aula</u> Al disponer el aula para el trabajo en grupos cooperativos, el docente debe tener presentes las siguientes pautas: 1) Los miembros de un grupo de aprendizaje deben sentarse juntos y de forma tal que puedan mirarse a la cara. 2) Todos los alumnos deben estar en condiciones de ver al docente al frente del aula sin tener que retorcerse en sus sillas o adoptar una posición incómoda. 3) Los distintos grupos deben estar separados como para que no interfieran unos con otros (Aprendizaje cooperativo, 2015).
11h45	Entrega de texto de estudio sobre la definición de funciones trigonométricas y las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, plantilla de ejercicios a resolver en el grupo e indicaciones sobre el trabajo en grupo a realizar. Asignación de roles o Analista: Relaciona los conceptos y las estrategias actuales con el material previamente estudiado y con los marcos cognitivos existentes. o Inquisidor: Hace preguntas profundas que conducen a un análisis o profundizan la comprensión. o Integrador: Integra las ideas y los razonamientos de los miembros del grupo en una única posición con la que todos puedan concordar. o Encargado de llevar un registro: Anota las decisiones y redacta el informe del grupo (Johnson & Johnson, 1999).
12h30	Desintegración del grupo y aplicación individual del pos test.

★ **Texto de estudio**

Aprendizaje de la definición de las funciones trigonométricas

Para Hiru (s.f.)

Una función trigonométrica, también llamada circular, es aquella que se define por la aplicación de una razón trigonométrica a los distintos valores de la variable independiente, que ha de estar expresada en radianes. Existen seis clases de funciones trigonométricas: seno y su recíproca, la cosecante; coseno y su recíproca, la secante; y tangente y su recíproca, la cotangente. Para cada una de ellas pueden también definirse funciones circulares inversas: arco seno, arco coseno, etcétera.

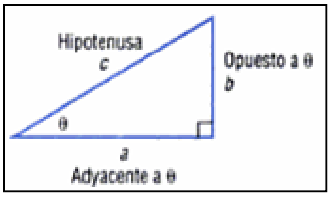
Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Según Galindo (2014)

La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180°, por lo tanto en un triángulo rectángulo hay un ángulo recto y los otros dos ángulos son agudos.

Como las razones dependen sólo del ángulo θ y no del triángulo en sí, se da a cada razón un nombre que involucra θ:

Nombre de la función	Abreviatura	Valor
Seno de θ	Sen θ	b/c
Coseno de θ	Cos θ	a/c
Tangente de θ	Tan θ	b/a
Cotangente de θ	Cot θ	a/b
Secante de θ	Sec θ	c/a
Cosecante de θ	Csc θ	c/b



En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados es decir: $c^2 = a^2 + b^2$

- Plantilla de ejercicios

1. Un niño eleva su cometa, la cual está a 20m de altura y donde el niño no puede soltarle más la cuerda. El ángulo que la cuerda hace con el piso es de 30º. ¿Cuánta piola tenía el niño?
2. Un observador está a 50 m de una iglesia. El ángulo de elevación a la punta de la torre de la iglesia es de 25º y el observador mide 1,70 m ¿Cuál es la altura de la iglesia?
3. Un salvavidas está en su torre de observación a 20m de altura, una persona implora su ayuda con un ángulo de depresión de 35º. ¿A qué distancia de la base de la torre de observación está la persona que solicitó ayuda?

Planificación Didáctica N°4

Técnica de aprendizaje cooperativo

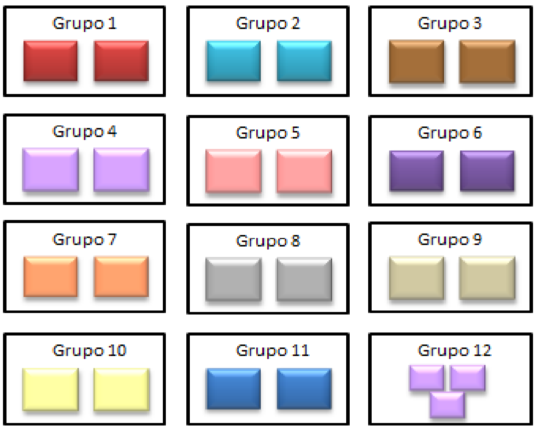
Tutoría entre iguales

- **Tema:** El uso de la TAC "Tutoría entre iguales" para el aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas en el círculo unitario.
- **Datos informativos**
  - **Institución Educativa:** Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio.
  - **Alumnos:** Segundo Año de Bachillerato General Unificado.
  - **Investigador:** Mónica Janeth Armijos Labanda
  - **Fecha:** 2015 - 04 – 20
  - **Período:** 8h15-9h45
- **Objetivos**
  - ◊ Consolidar el aprendizaje de funciones trigonométricas haciendo uso de la técnica de aprendizaje cooperativo (TAC) <<tutoría entre iguales>>.
  - ◊ Comprender la definición de funciones trigonométricas.
  - ◊ Definir y enunciar las funciones trigonométricas en el círculo unitario.
  - ◊ Identificar las funciones trigonométricas en el círculo unitario

★ **Normas de trabajo**

- ◊ Se debe resolver el pre test y post test, con la mayor honestidad posible y luego devolverlos.
- ◊ La lectura que se realiza debe ser comprensiva, puede utilizar algunas técnicas que le permitan la comprensión de la lectura tales como el subrayado, resumen, etc. La que usted considere más adecuada.
- ◊ Se pueden hacer preguntas durante el desarrollo de la clase, siempre que sean pertinentes y de acuerdo al tema.

★ **Metodología de trabajo**

Hora	**Actividad**
08h20	Tomar listas a los alumnos
08h25	Retroalimentación sobre el tema anterior
08h30	Planteamiento del tema de estudio
08h32	Aplicación de pre test
08h40	Conformación de grupos de dos personas con distinto nivel de conocimiento  <u>La disposición de los grupos en el aula</u> Al disponer el aula para el trabajo en grupos cooperativos, el docente debe tener presentes las siguientes pautas: 1) Los miembros de un grupo de aprendizaje deben sentarse juntos y de forma tal que puedan mirarse a la cara. 2) Todos los alumnos deben estar en condiciones de ver al docente al frente del aula sin tener que retorcerse en sus sillas o adoptar una posición incómoda.

	3) Los distintos grupos deben estar separados como para que no interfieran unos con otros (Aprendizaje cooperativo, 2015). <u>Características de las estructuras cooperativas</u> Para que exista el aprendizaje cooperativo los grupos de aprendizaje deben considerar ciertas características que debe reunir una actividad para ser cooperativa: ★ Interdependencia positiva: Cada miembro del equipo aprende por su pertenencia a él, por la colaboración y aportaciones de todos, con un objetivo común. El éxito del equipo depende del trabajo de todos sus miembros. ★ Responsabilidad individual: Cada miembro del equipo es responsable de una parte del trabajo, de manera que el éxito del equipo depende de todos. ★ Participación igualitaria: Todos los miembros del equipo deben participar, todos cuentan. ★ Interacción simultánea: El trabajo cooperativo requiere una interacción entre todos los miembros del equipo, respetando unos turnos y unos tiempos (Alonso, y otros, s.f.).
08h45	Entrega de texto de estudio sobre la definición de funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas en el círculo unitario e indicaciones sobre el trabajo en grupo a realizar. <u>Asignación de roles</u> ○ Corrector: Corrige cualquier error en las explicaciones de otro miembro o resume y complementa cualquier dato importante que se haya omitido. ○ Encargado de buscar fundamentos: Les pide a los miembros del grupo que fundamenten sus respuestas y conclusiones con hechos o razonamientos. ○ Inquisidor: Hace preguntas profundas que conducen a un análisis o profundizan la comprensión. ○ Encargado de llevar un registro: Anota las decisiones y redacta el informe del grupo (Johnson & Johnson, 1999).
09h35	Desintegración del grupo y aplicación individual del pos test.

★ **Texto de estudio**

Aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas

Según Galindo (2014) , si θ es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, entonces hay seis funciones trigonométricas de θ, cada una de las cuales es la razón de dos de los lados del mencionado triángulo.

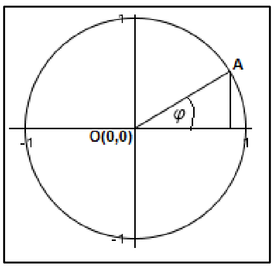
Si θ es un ángulo agudo del triángulo rectángulo, entonces

Función	Definición
Seno de θ	$Sen\ \theta = \dfrac{lado\ opuesto\ de\ \theta}{hipotenusa}$
Coseno de θ	$Cos\ \theta = \dfrac{lado\ adyacente\ de\ \theta}{hipotenusa}$
Tangente de θ	$Tan\ \theta = \dfrac{lado\ opuesto\ de\ \theta}{Lado\ adyacente\ de\ \theta}$
Cosecante de θ	$Csc\ \theta = \dfrac{hipotenusa}{lado\ opuesto\ de\ \theta}$
Secante de θ	$Sec\ \theta = \dfrac{hipotenusa}{lado\ adyacente\ \ de\ \theta}$
Cotangente de θ	$Cot\ \ \theta = \dfrac{lado\ adyacente\ de\ \theta}{ado\ opuesto\ de\ \theta}$

Fuente: Galindo, Matemática 2, 2014

Funciones trigonométricas en el círculo unitario

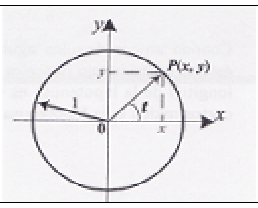
Según Galindo (2014), el círculo unitario también llamado círculo trigonométrico, es un círculo de radio 1 y de centro en el origen



Si se toma como vértice de cualquier ángulo el origen de coordenadas, es decir, el punto O (0, 0). Se considera como lado inicial el semieje positivo de abscisas, es decir, como punto de referencia para cualquier ángulo φ.

Sea dado un ángulo cualquiera φ es obvio que el lado final 0A, que describe este ángulo φ cortará el círculo unitario en cierto punto A(a, b). El lado final 0A, que describe el ángulo nulo, corta el círculo unitario en el punto (1, 0);

Si el punto (x, y) está a t unidades del punto (1,0) sobre el círculo unidad, entonces:

	sen t= y	csc t = 1/y (y≠0)
	cos t= x	sec t = 1/x (x≠0)
	tan t= y/x (x≠0)	cot t= x/y (y≠0)

Fuente: Galindo, Matemática 2, 2014

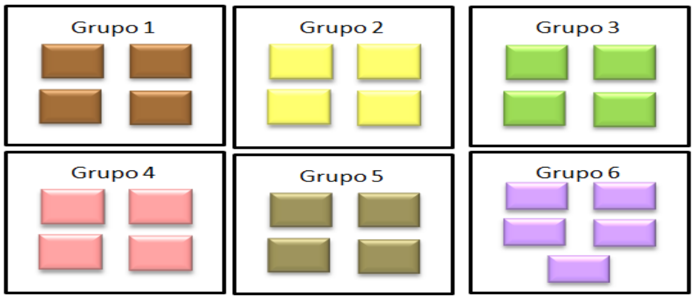
Planificación Didáctica N°5

Técnica de aprendizaje cooperativo

Trabajo en equipo de logro individual

- **Tema:** El uso de la TAC "Trabajo en equipo de logro individual" para el aprendizaje características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- **Datos informativos**
  - **Institución Educativa:** Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio.
  - **Alumnos:** Segundo Año de Bachillerato General Unificado.
  - **Investigador:** Mónica Janeth Armijos Labanda
  - **Fecha:** 2015 - 04 - 22
  - **Período:** 10h40 – 12h00
- **Objetivos**
  - Comprender las funciones trigonométricas haciendo uso de la técnica de aprendizaje cooperativo (TAC) <<Trabajo en equipo de logro individual>>.
  - Enunciar las características de las funciones trigonométricas.
  - Identificar las características de las funciones trigonométricas.
- **Normas de trabajo**
  - Se debe resolver el pre test y post test, con la mayor honestidad posible y luego devolverlos.
  - La lectura que se realiza debe ser comprensiva, puede utilizar algunas técnicas que le permitan la comprensión de la lectura tales como el subrayado, resumen, etc. La que usted considere más adecuada.
  - Se pueden hacer preguntas durante el desarrollo de la clase, siempre que sean pertinentes y de acuerdo al tema.

- **Metodología de trabajo**

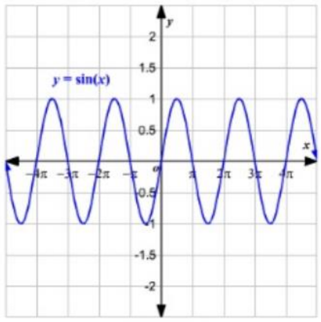
Hora	**Actividad**
10h40	Tomar listas a los alumnos
10h45	Retroalimentación sobre el tema anterior
10h50	Planteamiento del tema de estudio
10h52	Aplicación de pre test
11h00	Conformación de grupos de cuatro personas con distinto nivel de conocimiento  <u>La disposición de los grupos en el aula</u> Al disponer el aula para el trabajo en grupos cooperativos, el docente debe tener presentes las siguientes pautas: 1) Los miembros de un grupo de aprendizaje deben sentarse juntos y de forma tal que puedan mirarse a la cara. 2) Todos los alumnos deben estar en condiciones de ver al docente al frente del aula sin tener que retorcerse en sus sillas o adoptar una posición incómoda. 3) Los distintos grupos deben estar separados como para que no interfieran unos con otros (Aprendizaje cooperativo, 2015). <u>Características de las estructuras cooperativas</u> Para que exista el aprendizaje cooperativo los grupos de aprendizaje deben considerar ciertas características que debe reunir una actividad para ser cooperativa: ★ Interdependencia positiva: Cada miembro del equipo aprende por su pertenencia a él, por la colaboración y aportaciones de todos, con un objetivo común. El éxito del equipo depende del trabajo de todos sus miembros.

	★ Responsabilidad individual: Cada miembro del equipo es responsable de una parte del trabajo, de manera que el éxito del equipo depende de todos. ★ Participación igualitaria: Todos los miembros del equipo deben participar, todos cuentan. ★ Interacción simultánea: El trabajo cooperativo requiere una interacción entre todos los miembros del equipo, respetando unos turnos y unos tiempos (Aprendizaje cooperativo, 2015).
11h05	Entrega de texto de estudio de las características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente e indicaciones sobre el trabajo en grupo a realizar. Asignación de roles o Analista: Relaciona los conceptos y las estrategias actuales con el material previamente estudiado y con los marcos cognitivos existentes. o Crítico de ideas: Cuestiona intelectualmente a sus compañeros criticando sus ideas, al mismo tiempo que les transmite su respeto en tanto personas. o Encargado de ampliar: Amplía las ideas y conclusiones de los miembros del grupo, agregando nueva información o señalando consecuencias. o Encargado de buscar fundamentos: Les pide a los miembros del grupo que fundamenten sus respuestas y conclusiones con hechos o razonamientos. o Encargado de llevar un registro: Anota las decisiones y redacta el informe del grupo (Johnson & Johnson, 1999).
11h50	Desintegración del grupo y aplicación individual del pos test.

★ **Texto de estudio**

Características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente: dominio, recorrido, ceros, monotonía, simetría y periodicidad

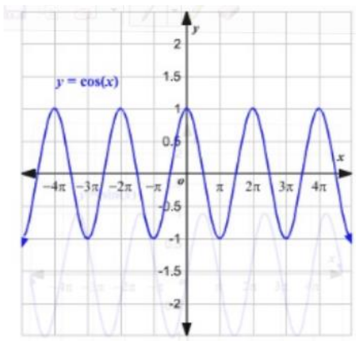
- **Características de la función seno**



Dominio: IR
Recorrido: { y ∈ IR | -1 ≤ y ≤ 1 }
Ceros: la función se anula para x = 0, x = $\pm\pi$, x = $\pm$ 2π , x = $\pm 3\pi$ y y en general para x= k π, con k ∈ Z
Monotonía: El gráfico es creciente en los intervalos [0, $\pi/2$[y]3π/2 , 2 π] y decreciente en el intervalo]π/2, 3 π/2]
Simetría: Para la función sen x se cumple sen(-x) = -sen(x), luego es una función impar por consiguiente, es simétrica respecto al origen de coordenadas cartesianas.
Periodicidad: La función seno cumple que sen x = sen(x+2k π) con k ∈ Z, luego es una función de periodo 2 π.

Fuente: Galindo, Matemática 2, 2014

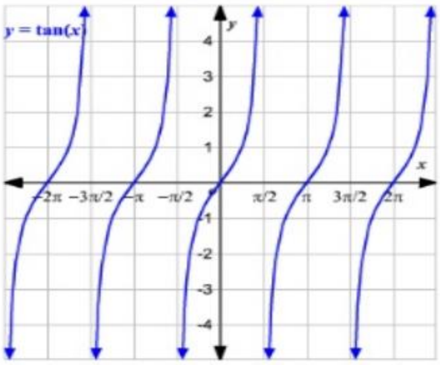
- **Características de la función coseno**



Dominio: IR
Recorrido: { y∈ IR | -1 ≤ y ≤ 1 }
Ceros: la función se anula para x = $\pm\pi/2$, x = $\pm$ $3\pi/2$, x = $\pm 5\,\pi/2\ldots$ y en general para x = (2k+1) $\pi/2$, con k ∈ Z.
Monotonía: El gráfico es decreciente en los intervalos [0, π] y creciente en] π, 2].
Simetría: La función coseno se cumple que cos x = cos(-x), luego esta función es par por lo tanto es simétrica con respecto al eje y.
Periodicidad: La función coseno se cumple que cosx = cos(x+2k π) con k ∈ Z con un periodo de 2 π.

Fuente: Galindo, Matemática 2, 2014

- **Características de la función tangente**



Dominio: { x∈R | x ≠ π/2 (2k + 1) }
Recorrido: *IR*
Ceros: la función se anula para x = 0, x = $\pm\pi$, x = $\pm 2\pi$ y en general para x = k π, con k∈ Z
Monotonía: El gráfico es creciente en]$-\pi/2$, π/2[
Simetría: Para la función tangente cumple tan(-x) = -tan(x), es una función impar *Periodicidad:* La función seno cumple que tan = tan(x+ kπ) con k ∈ Z, luego es una función de periodo π.
Asíntotas: La función no está definida para los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$; siendo las asíntotas las rectas x = (2k+1) $\pi/2$ con k ∈ Z.

Fuente: Galindo, Matemática 2, 2014

Planificación Didáctica N°6

Técnica de aprendizaje cooperativo

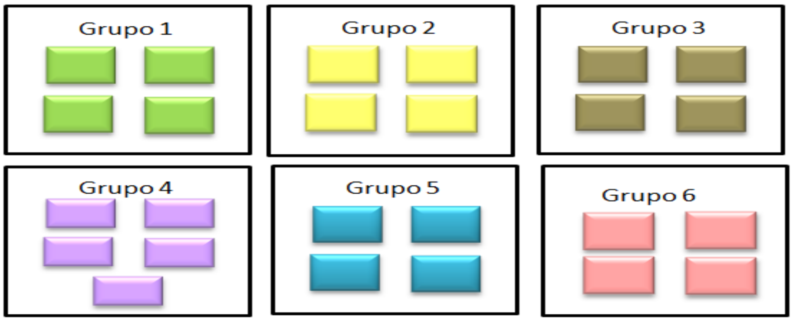
Enseñanza acelerada por equipos

- **Tema:** El uso de la TAC "Enseñanza acelerada por equipos" para el aprendizaje de las funciones trigonométricas, cotangente, secante y cosecante.
- **Datos informativos**
  - **Institución Educativa:** Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio.
  - **Alumnos:** Segundo Año de Bachillerato General Unificado.
  - **Investigador:** Mónica Janeth Armijos Labanda
  - **Fecha:**2015 – 04 – 23
  - **Período:** 11h20 – 12h40
- **Objetivos**
  - ◊ Consolidar el aprendizaje de funciones trigonométricas utilizando la técnica de aprendizaje cooperativo (TAC) <<Enseñanza acelerada por equipos>>.
  - ◊ Definir y enunciar las características de las funciones trigonométricas.
  - ◊ Identificar las características de las funciones trigonométricas
- **Normas de trabajo:**
  - ◊ Se debe resolver el pre test y post test, con la mayor honestidad posible y luego devolverlos.
  - ◊ La lectura que se realiza debe ser comprensiva, puede utilizar algunas técnicas que le permitan la comprensión de la lectura tales como el subrayado, resumen, etc. La que usted considere más adecuada.
  - ◊ Se pueden hacer preguntas durante el desarrollo de la clase, siempre que sean pertinentes y de acuerdo al tema.

- **Metodología de trabajo**

Hora	Actividad
11h20	Tomar listas a los alumnos
11h25	Retroalimentación sobre el tema anterior
11h30	Planteamiento del tema de estudio
11h32	Aplicación de pre test

<table>
<tr>
<td>11h40</td>
<td>
Conformación de grupos de cuatro personas con distinto nivel de conocimiento



<u>La disposición de los grupos en el aula</u>

Al disponer el aula para el trabajo en grupos cooperativos, el docente debe tener presentes las siguientes pautas:

1) Los miembros de un grupo de aprendizaje deben sentarse juntos y de forma tal que puedan mirarse a la cara.
2) Todos los alumnos deben estar en condiciones de ver al docente al frente del aula sin tener que retorcerse en sus sillas o adoptar una posición incómoda.
3) Los distintos grupos deben estar separados como para que no interfieran unos con otros (Aprendizaje cooperativo, 2015).

<u>Características de las estructuras cooperativas</u>

Para que exista el aprendizaje cooperativo los grupos de aprendizaje deben considerar ciertas características que debe reunir una actividad para ser cooperativa:

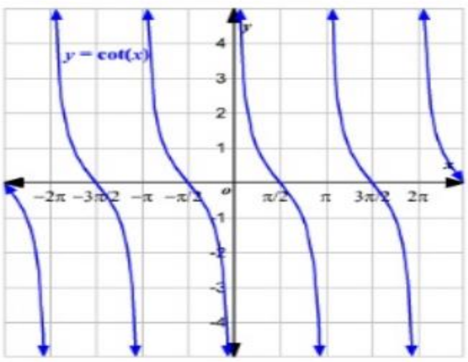
- Interdependencia positiva: Cada miembro del equipo aprende por su pertenencia a él, por la colaboración y aportaciones de todos, con un objetivo común. El éxito del equipo depende del trabajo de todos sus miembros.
- Responsabilidad individual: Cada miembro del equipo es responsable de una parte del trabajo, de manera que el éxito del equipo depende de todos.
- Participación igualitaria: Todos los miembros del equipo deben participar, todos cuentan.
- Interacción simultánea: El trabajo cooperativo requiere una interacción entre todos los miembros del equipo, respetando unos turnos y unos tiempos. (Alonso, y otros, s.f.)
</td>
</tr>
</table>

11h45	Entrega de texto de estudio de las características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente e indicaciones sobre el trabajo en grupo a realizar. <u>Asignación de roles</u> ○ Crítico de ideas: Cuestiona intelectualmente a sus compañeros criticando sus ideas, al mismo tiempo que les transmite su respeto en tanto personas. ○ Encargado de ampliar: Amplía las ideas y conclusiones de los miembros del grupo, agregando nueva información o señalando consecuencias. ○ Encargado de buscar fundamentos: Les pide a los miembros del grupo que fundamenten sus respuestas y conclusiones con hechos o razonamientos. ○ Encargado de llevar un registro: Anota las decisiones y redacta el informe del grupo. ○ Verificador: Verifica la validez del trabajo del grupo en función de las instrucciones, del tiempo disponible y del sentido común (Johnson & Johnson, 1999)
12h30	Desintegración del grupo y aplicación individual del pos test.

★ **Texto de estudio**

Características de las funciones trigonométricas reciprocas.

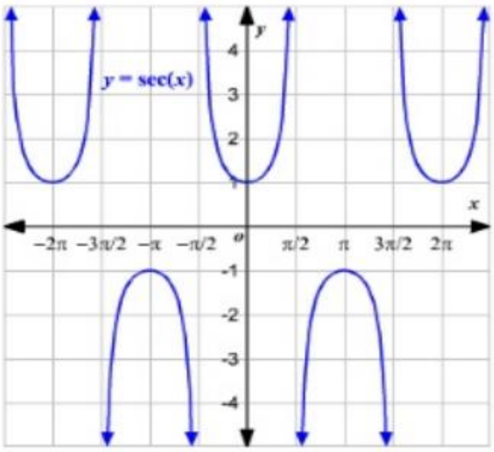
★ **Características de la función cotangente**



Dominio: { x ∈ R | x ≠k·π }
Recorrido: IR
Ceros: la función se anula para x = $\pm\pi/2$, x = $\pm$ $3\pi/2$, x = $\pm 5\,\pi/2\ldots$ y en general para x = (2k+1) $\pi/2$, con k ∈ Z.
Simetría: Para a función tangente cumple cot(-x) = -cot(x),es una función impar
Periodicidad: La función seno cumple que cotx = cot(x+ kπ) con k ∈ Z, luego es una función de periodo π.
Asíntotas: La función no está definida para los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$; siendo las asíntotas las rectas x = (2k+1)$\pi/2$ con k ∈ Z.

Fuente: Galindo, Matemática 2, 2014

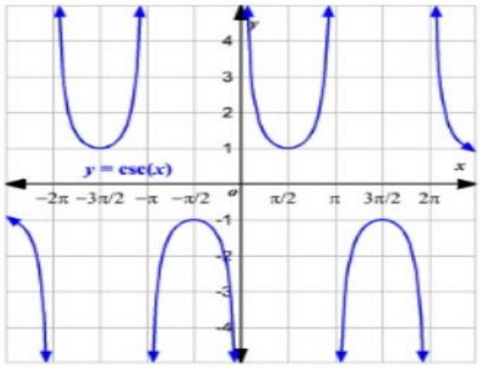
- **Características de la función secante**



Dominio: { x∈R | x ≠ π/2 (2k + 1) }
Recorrido: { y∈R | y ≤ -1   ó   y ≥ 1 }
Ceros: la función no tiene ceros.
Monotonía: El gráfico es decreciente en los intervalos [$-\pi$, -$\pi/2$[∪]-$\pi/2$,0] y creciente en]0, $\pi/2$[∪]$\pi/2$, π [.
Simetría: Cumple sec x = sec(-x), siendo una función par.
Periodicidad: La función secante es una función de periodo 2 π.
Asíntota: Las asíntotas son las rectas x = (2k+1) π/2, con k ∈ Z.

Fuente: Galindo, Matemática 2, 2014

★ **Características de la función cosecante**



Dominio: { x∈R | x ≠k·π }
Recorrido: { y∈R | y ≤ -1   ó   y ≥ 1 }
Ceros: la función no tiene ceros
Monotonía: El gráfico es decreciente en los intervalos [-$\pi/2$,0[∪]0,$\pi/2$[,0] y creciente en [$\pi/2$, π[∪]π,3$\pi/2$].
Simetría: Es una función impar
Periodicidad: Periodicidad: Es una función de periodo 2 π.
Asíntotas: Asíntotas: Las asíntotas son las rectas x= kπ con k ∈ Z”.

Fuente: Galindo, Matemática 2, 2014

EL TALLER PEDAGÓGICO COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA APLICAR TÉCNICAS DE APRENDIZAJE COOPERATIVO PARA POTENCIAR EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

- Taller Pedagógico

  - **Definición de taller**

El taller realizado dentro del aula consta de situaciones de enseñanza aprendizaje que incluyen actividades tanto individuales como grupales entre estudiantes, y el docente interactuando activamente de tal manera que se logra el aprendizaje del estudiante.

Villalobos (s.f.)

> "El aula-taller se constituye en ámbito de una relación entre docente y estudiante, mutuamente modificante, abierta al cambio, que acepta el error e integra la teoría y la práctica" (Parry, 1996). Para conducir la estrategia del aula-taller, aprender esa experiencia, "es, sin duda, indispensable un docente que disfrute de la tarea, que transforme el dilema en problema, que no sacralice la estrategia y esté dispuesto a la ruptura de hábitos, a la aceptación de divergencias y disensos" Lensmire (1994).
>
> Este docente pensante, capaz de ejercer su autonomía, interpreta la crítica como base del acto creativo y está dispuesto a develar lo oculto de un problema. Los estudiantes, por su lado, sin importar la edad ni los objetivos enunciados, constituyen un grupo con intereses coincidentes que trabajan a veces solos, o en pequeños subgrupos; otras veces trabajarán integrados totalmente.
>
> El número de participantes no debe exceder los quince o veinte y las reuniones se deben realizar con una frecuencia establecida. Las actividades podrán incluir momentos de acción y vivencia, de reflexión y conceptualización. La duración de las sesiones de trabajo dependerá de las características del grupo, del tipo de problema y de las posibilidades que ofrezca el contexto

De acuerdo con Villalobos el taller se define como un ámbito en el cual el docente y el estudiante integran la teoría y la práctica, siempre abiertos al cambio. Él docente tendrá la responsabilidad de adecuar el taller a la edad y características del grupo de estudiantes, ellos en cambio cuentan con la ayuda del docente para dar solución del problema planteado en el taller demostrando conciencia e interés en las actividades que realizan, pudiendo realizarlas no solo individualmente sino grupalmente, las cuales les permitirán aprender. La duración de las sesiones de trabajo dependerá de las características del grupo, del tipo de problema y de las posibilidades que ofrezca el contexto.

- **El papel del docente**

El papel que debe ejecutar el docente para tener éxito en la realización del taller pedagógico, según Villalobos (s.f.) es:

- Considerarse a sí mismos coordinadores de grupos basados en la autogestión.
- Reservarse el rol de coordinadores, conductores, animadores y orientadores y ceder el protagonismo al grupo.
- Facilitar todos los medios que les permitan a los estudiantes acceder a la máxima información posible para la selección y solución de los problemas a trabajar.
- Coparticipar con el grupo en la formulación de los objetivos de aprendizaje.
- Facilitar ejes flexibles para el logro de esos objetivos.
- Tener como propósito muy especial el que los estudiantes se capaciten en el logro de las técnicas de estudio (dirigido, sugerido y autónomo) y de trabajo intelectual, destacando la elaboración de proyectos integrales de trabajo), para orientar el autoaprendizaje.
- Favorecer en todos los casos situaciones de aprendizaje por el método del descubrimiento: observando, planteándose problemas, formulándose hipótesis o preguntas de investigación, experimentando con las hipótesis o buscando respuestas a esas preguntas, concluyendo y, finalmente, elaborando el proyecto

- **El papel del alumno**

Al realizar el taller pedagógico el alumno debe cumplir con ciertas condiciones, Villalobos (s.f.) menciona que el alumno debe:

- Sentirse actores principales de las diferentes actividades que se realicen.
- Demostrar curiosidad por la realidad circundante.
- Participar activamente de las actividades organizadas.
- Comprometerse con los proyectos de trabajo que se realicen
- Responsabilizarse personalmente de las acciones que estén a su cargo.

- Investigar con libertad y autonomía y procurar el máximo posible de control de la subjetividad.
- Actuar con la creatividad máxima de que sean capaces.
- No envanecerse con los éxitos ni deprimirse con los fracasos que, seguramente encontrará en su actuación en el grupo.
- Manifestar creciente autonomía en su trabajo

En concordancia con Villalobos (s.f.), dentro de un taller pedagógico el papel del docente es ser el mediador entre el conocimiento y el alumno, dejando que el alumno sea el protagonista de su aprendizaje siendo participativo, responsable, además de demostrar curiosidad e investigar sobre lo que aprende manifestando autonomía en su trabajo, esto es importante para poder lograr que dentro del taller se puedan desenvolver todos los procesos convenientes para que los grupos cooperativos puedan realizar un buen trabajo en equipo.

★ Pasos para un buen taller

Los pasos para la realización de un taller son:

- Planeación del Taller
    - ◊ Definir objetivos: es importante que concretemos lo que queremos lograr con el taller por ejemplo: ¿se intenta transmitir nueva información?, ¿queremos cambiar comportamientos?, etc.
    - ◊ Información de los participantes: obtener información de los que asistirán al taller, ejemplo: edad, nivel educativo actualmente cursado, número de asistentes, etc.
    - ◊ Diseñar métodos de enseñanza y actividades: formular los métodos de enseñanza conforme a las actividades y de acuerdo a la temática que se abordará, ejemplo: videos, técnicas de grupo, diapositivas, etc.
- Realización del taller
    - ◊ Presentación: permitir que los participantes se conozcan , realizar técnicas de presentación
    - ◊ Enunciar objetivos: contar al grupo lo que se busca lograr con el taller, establecer reglas y enunciar actividades que se harán, pedir retroalimentación
    - ◊ Crear ambiente adecuado: si se hace correctamente los pasos anteriores, se logara una buena atmósfera

- ◊ Participación activa y resolución de conflictos: permitir que todos los asistentes participen y busquen solucionar los conflictos
- ◊ Proporcionar información: dar conocimientos generales de la temática del taller
- ◊ Recordar los aprendizajes obtenidos: hacer un recuento de todo lo enseñado para generar conexiones de aprendizaje
- ◊ Cambio de actividades: si es necesario, cambia tus actividades, es por eso que se te pide que tengas unas actividades extras.

- o Evaluación
  - ◊ Resumir la sesión y pedir retroalimentación: es importante hacer un resumen breve para que realmente se haga un aprendizaje significativo y la retroalimentación te ayuda a ti, a mejorar. (Anónimo, 2010)

Talleres para aplicación de la alternativa

Taller 1.- El uso de la TAC "rompecabezas" para el aprendizaje de los orígenes y aportadores de las funciones trigonométricas.

TEMA

El uso de la TAC "rompecabezas" para el aprendizaje de Los orígenes y los aportadores de las funciones trigonométricas.

RECURSOS

- o Planificación Didáctica N°1
- o Documento con la información sobre el origen y aportadores de las funciones trigonométricas
- o Marcadores, pizarra, borrador

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

- o El alumno comprende el origen y desarrollo de las funciones trigonométricas a través de los años.
- o El alumno identifica los aportadores de las funciones trigonométricas.
- o El alumno elabora un diagrama secuencial del origen e historia de las funciones trigonométricas, así como de los aportadores de las funciones trigonométricas haciendo y uso de datos históricos de las mismas.

CONCLUSIONES

Al aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo <<rompecabezas>> mediante un taller se mejora el aprendizaje de los orígenes y aportadores de las funciones trigonométricas.

RECOMENDACIONES

Se recomienda aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo <<rompecabezas>> mediante un taller para mejorar el aprendizaje de los orígenes y aportadores de las funciones trigonométricas.

BIBLIOGRAFÍA

- *Wiki Matemática. (18 de Mayo de 2010). Recuperado el 21 de Enero de 2015, de Origen de las funciones Trigonométricas: http://www.wikimatematica.org/index.php?title=Origen_de_las_Funciones_Trigonometricas*
- *Pérez, V. (19 de Octubre de 2010). La Guía. Recuperado el 21 de Enero de 2015, de Historia de la trigonometría: http://matematica.laguia2000.com/general/historia-de-la-trigonometria*
- *Mattrigonometría. (24 de Noviembre de 2008). Recuperado el 21 de Enero de 2015, de Trigonometría: http://mattrigonometria.blogspot.mx/*
- *Achury, T. (23 de Octubre de 2011). Trigonometría didáctica 10 b. Recuperado el 21 de Enero de 2015, de Razones trigonométricas: http://trigonometriadidactica10b.blogspot.com/2011/10/personajes-que-aportaron-la_23.html*

Taller 2.- El uso de la TAC “Student teams achievement division (Divisiones de rendimiento por equipos), para el aprendizaje de la utilidad a la humanidad de las funciones trigonométricas y aprendizaje de conceptos básico de geometría y trigonometría.

TEMA

El uso de la TAC “Student teams achievement division” (Divisiones de rendimiento por equipos), para el aprendizaje de la utilidad a la humanidad de las funciones trigonométricas y aprendizaje de conceptos básico de geometría y trigonometría.

RECURSOS

- Planificación Didáctica N°2
- Documento con la información utilidad a la humanidad de las funciones trigonométricas y conceptos básicos de trigonometría Marcadores
- Marcadores, pizarra, borrador

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

- El alumno relaciona las aplicaciones de las funciones trigonométricas con elementos del medio circundante.
- El alumno enuncia aplicaciones de las funciones trigonométricas en la vida diaria mencionando una relación con materiales o elementos que circundan el entorno de aprendizaje.

CONCLUSIONES

Si se aplica la técnica de aprendizaje cooperativo <<Student teams achievement división>> (Divisiones de rendimiento por equipos), se mejora el aprendizaje de la utilidad a la humanidad de las funciones trigonométricas y aprendizaje de conceptos básico de geometría y trigonometría.

RECOMENDACIONES

Se recomienda el empleo de la técnica de aprendizaje cooperativo <<Student teams achievement división>> (Divisiones de rendimiento por equipos), para lograr mejorar el aprendizaje de la utilidad a la humanidad de las funciones trigonométricas y aprendizaje de conceptos básico de geometría y trigonometría.

BIBLIOGRAFÍA

- Jiménez, G. J. (s.f.). Academia.edu. Recuperado el 28 de Enero de 2015, de Resumen Teórico.Funciones trigonométricas en la vida cotidiana: http://www.academia.edu/6123267/15_Funciones_trigonometricas_en_la_vida_cotidiana._Notafrancesco_doc
- Galindo, E. (2014). *Matemática* 2. Quito,Ecudor: Prociencia Editores.
- González, R. (5 de Marzo de 2009). Funciones Trigonométricas. Recuperado el 23 de Enero de 2015, de La Trigonometría: http://funcionestrigonometricas.blogspot.com/
- Disfruta las matemáticas. (2011). Recuperado el 16 de Febrero de 2015, de Ángulos: http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/angulos.html

Taller 3.- El uso de la TAC "Aprendizaje cooperativo guiado" para el aprendizaje de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

TEMA

El uso de la TAC "Aprendizaje cooperativo guiado" para el aprendizaje de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

RECURSOS

- Planificación Didáctica N°3
- Documento con la información texto las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo
- Marcadores, pizarra, borrador

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

- El alumno comprende la definición de funciones trigonométricas.
- El alumno resuelve problemas de aplicación haciendo uso de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

CONCLUSIONES

La aplicación de la técnica de aprendizaje cooperativo <<aprendizaje cooperativo guiado>> mejora el aprendizaje de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

RECOMENDACIONES

Se aconseja la utilización de la técnica de aprendizaje cooperativo <<aprendizaje cooperativo guiado>>para mejorar el aprendizaje de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

BIBLIOGRAFÍA

- Galindo, E. (2014). *Matemática* 2. Quito,Ecudor: Prociencia Editores.

Taller 4.- El uso de la TAC "Tutoría entre iguales" para el aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas en el círculo unitario.

TEMA

El uso de la TAC "Tutoría entre iguales" para el aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas en el círculo unitario.

RECURSOS

- Planificación Didáctica N°4
- Documento con la información sobre la definición funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas en el círculo unitario
- Marcadores, pizarra, borrador

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

- El alumno comprende la definición de funciones trigonométricas.
- El alumno define y enuncia las funciones trigonométricas en el círculo unitario
- El alumnos identifica las funciones trigonométricas en el círculo unitario

CONCLUSIONES

La técnica de aprendizaje cooperativo <<Tutoría entre iguales>> mejora el aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas en el círculo unitario.

RECOMENDACIONES

Se recomienda el uso de la técnica de aprendizaje cooperativo <<Tutoría entre iguales>> debido a que esta mejora el aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas en el círculo unitario.

BIBLIOGRAFÍA

- Galindo, E. (2014). *Matemática 2.* Quito,Ecudor: Prociencia Editores.

Taller 5.- El uso de la TAC "Trabajo en equipo de logro individual" para el aprendizaje características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.

TEMA

El uso de la TAC "Trabajo en equipo de logro individual" para el aprendizaje características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.

RECURSOS

- Planificación Didáctica N°5
- Documento con la información sobre características de las funciones trigonométricas
- Marcadores, pizarra, borrador

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

- El alumno define y comprende las características de las funciones trigonométricas.
- El alumno identifica las características de las funciones trigonométricas

CONCLUSIONES

La técnica de aprendizaje cooperativo <<Trabajo en equipo de logro individual>> mejora el aprendizaje de las características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.

RECOMENDACIONES

Se recomienda a los docentes la aplicación de la técnica de aprendizaje cooperativo <<Trabajo en equipo de logro individual>> pues esta técnica mejora el aprendizaje de las características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.

BIBLIOGRAFÍA

- Galindo, E. (2014). *Matemática 2*. Quito,Ecudor: Prociencia Editores.
- Calculo.cc. (s.f.). Recuperado el 7 de Enero de 2015, de Dominio y recorrido de la funciones trigonométricas: http://calculo.cc/temas/temas_bachillerato/primero_ciencias_sociales/funciones_elementales/teoria/dom_trigo.html

Taller 6.- El uso de la TAC "Enseñanza acelerada por equipos" para el aprendizaje de las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante

TEMA

El uso de la TAC "Enseñanza acelerada por equipos" para el aprendizaje de las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante.

RECURSOS

- Planificación Didáctica N°6
- Documento con la información sobre documento con información de funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante
- Marcadores, borrador y pizarra.

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

- El alumno define y comprende las características de las funciones trigonométricas.
- El alumno identifica las características de las funciones trigonométricas

CONCLUSIONES

La técnica de aprendizaje cooperativo <<enseñanza acelerada por equipos>> mejora significativamente el aprendizaje de las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante.

RECOMENDACIONES

Se recomienda a los docente de matemática el uso de la técnica de aprendizaje cooperativo <<enseñanza acelerada por equipos>> para mejorar significativamente el aprendizaje de las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante.

BIBLIOGRAFÍA

- *Aritor*. (s.f.). Recuperado el 12 de Enero de 2015, de Funciones trigonométricas inversas: nometria/funciones_inversas.html
- López, D. (s.f.). *Matemáticas IES*. Recuperado el 17 de Febrero de 2015, de Leras griegas y símbolos matemáticos: http://matematicasies.com/Letras-griegas-y-simbolos-matematicos

VALORACIÓN DE LA EFECTIVIDAD DEL USO DE TÉCNICAS DE APRENDIZAJE COOPERATIVO PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS ESTUDIANTES DE 2ºAÑO DE BACHILLERATO GENERAL UNIFICADO, DE LA UNIDAD EDUCATIVA "FERNANDO SUÁREZ PALACIO" DE LA CIUDAD DE LOJA. PERÍODO 2014-2015.

- ¿Qué es efectividad?

La medición de la efectividad de la aplicación de un proceso se entiende como:

> La efectividad desde un punto de vista clínico que no está muy apartado del campo de la investigación pues la medida de efectividad de una intervención pretende conocer el resultado alcanzado por la misma en condiciones habituales de uso. (…) los estudios de efectividad por su propia naturaleza están relacionados con el método inductivo u observacional. De hecho si el estudio pretende ser un experimento, las condiciones en que éste se realice habrán de ser lo más parecidas posible a las que se dan en el ejercicio de la práctica médica habitual. Algunos autores refiriéndose al ámbito de los ensayos clínicos denominan explanatory trials a los primeros (ensayos de eficacia) y pragmatic trials a los segundos (ensayos de efectividad).(…) la tipología de estudios dirigidos a conocer resultados puede imaginarse como un continuo en el que la medida del efecto de una intervención sanitaria puede hacerse en un extremo (eficacia) a través de la realización de un experimento muy riguroso, y en el otro (efectividad) analizando los resultados que acaecen espontáneamente recogidos de modo rutinario en registros epidemiológicos generales o específicos (Conde,2002).

La definición que plantea Conde sobre la efectividad de un procedimiento clínico, se relaciona con la efectividad que se analizaría al aplicar diversos procesos en diversas ramas de la ciencia. Se podría determinar la efectividad de un procedimiento alternativo aplicado en educación utilizando esta vez un pre test que diagnostique el conocimiento original del estudiante, y luego un post test que revise los conocimientos de los estudiantes luego de haber aplicado cierto método, didáctica, técnica o herramienta para poder cambiar la forma de aprender.

- Valoración de la efectividad

Para la realización de la presente investigación

- Antes de aplicar la alternativa se tomará una prueba de conocimientos (pre test) sobre la realidad temática.
- Aplicación de la TAC
- Aplicación de la misma prueba de conocimientos (post test) después de la realización del taller.
- Comparación de los resultados con las pruebas aplicadas, las pruebas tomadas antes del taller y después del taller
- La comparación se realizara utilizando la prueba de los signos rangos de Wilcoxon

- *¿Qué es la prueba de los Signos Rangos de Wilcoxon?*

La prueba de los signos rangos de Wilcoxon "Es una prueba no paramétrica que utiliza rangos ordenados de datos muestrales consistentes en datos apareados. Se usa para probar las diferencias en las distribuciones poblacionales". (Hernández, 2015)

- *Interpretación*

La interpretación de la prueba de los signos rangos de Wilcoxon se lleva a cabo como lo explica:

Prueba del signo para muestras pareadas

Se puede utilizar la prueba de signo para probar la hipótesis nula $\mu_1 - \mu_2 = d_0$ para observaciones pareadas. Aquí se reemplaza cada diferencia, d_i con un signo más o menos dependiendo si la diferencia ajustada $d_i - d_0$, es positiva o negativa (…) las hipótesis se refieren a las medianas poblacionales en lugar de las medias. (…) Primero se resta μ_0 de cada valor muestral y se descarta todas las diferencias iguales a cero. Se asigna un rango de 1 a la diferencia absoluta más pequeña, un rango de 2 a la siguiente más pequeña, y así sucesivamente. Cuando el valor absoluto de dos o más diferencias es el mismo, se asigna a cada uno el promedio de los rangos que se asignarían si las diferencias se distinguieran. Por ejemplo, si la quinta y sexta diferencia son iguales en valor absoluto, a cada una se le asignaría un rango de 5,5.

Si la hipótesis $\mu = \mu_0$ es verdadera, el total de los rangos positivos debe ser igual a los negativos. Se representan esos totales como w_+ y w_-, respectivamente (…) La hipótesis nula $\mu = \mu_0$ se puede rechazar a favor de la alternativa $\mu < \mu_0$ sólo si w_+ es pequeña y w_- es grande. Del mismo modo, la alternativa $\mu > \mu_0$ se puede aceptar sólo si w_+ es grande y w_- es pequeña. (…) Cuando $5 \leq n \leq 30$, los valores aproximados para W_+ y W_- tienen por niveles de significancia a 0.02, 0.05 y 0.10 para una prueba de dos colas (…) Cuando $n \geq 15$ la distribución muestral de W_+ ó W_- se aproxima a la distribución normal con media $\mu_0 = \frac{n(n+1)}{4}$ y varianza ${\sigma_w}^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$.Por tanto, cuando *n* excede el valor más grande, se puede utilizar la estadística $z = \frac{nw_+ - \mu_w}{\sigma_w}$, para determinar la región crítica de la prueba (Instituto Tecnológico de Chihuahua, s.f.).

De acuerdo con el Instituto de Chihuahua, para poder determinar la efectividad luego de haber aplicado un tratamiento, cuando $n \geq 15$ la distribución muestral se aproxima con la media $\mu_0 = \frac{n(n+1)}{4}$, varianza ${\sigma_w}^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$ y se utiliza $z = \frac{nw_+ - \mu_w}{\sigma_w}$, para determinar la región crítica de la prueba. En este caso cuando $n \geq 15$, el valor estándar de z es 1.96, si el valor de z es mayor que el valor estándar se acepta el tratamiento aplicado.

e. MATERIALES Y MÉTODOS

MATERIALES

- Material de Escritorio
- Material Bibliográfico
- Accesorios de Computación
- Servicios de reproducción de información
- Anillado y empastado del trabajo
- Movilización, transporte y comunicaciones
- Imprevistos

MÉTODOS

- **Diseño de la investigación**

La investigación responde a un diseño diagnóstico, descriptivo y pre experimental.

El diagnóstico es un estudio derivado de un enfoque pedagógico debidamente fundamentado del aprendizaje de funciones trigonométricas, tomando en cuenta elementos históricos, tendencias actuales, contenidos de aprendizaje organizacional del proceso, prácticas formas de evaluación, analizado desde la teoría socio-cultural de Vigotsky.

La investigación es de tipo pre experimental en razón que se va a considerar los siguientes aspectos:

- Un conjunto de aprendizajes sobre funciones trigonométricas que se quiere potenciar
- Técnicas de aprendizaje cooperativo **que intencionadamente se experimentara con propósitos de potenciación**
- Un seminario didáctico mediador del proceso de transformación:
  - Taller 1.- El uso de la TAC “rompecabezas” para el aprendizaje de los orígenes y aportadores de las funciones trigonométricas
  - Taller 2.- El uso de la TAC “Student teams achievement division (Divisiones de rendimiento por equipos), para el aprendizaje de la utilidad

a la humanidad de las funciones trigonométricas y aprendizaje de conceptos básico de geometría y trigonometría

  - Taller 3.- El uso de la TAC “Aprendizaje cooperativo guiado” para el aprendizaje de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo
  - Taller 4.- El uso de la TAC “Tutoría entre iguales” para el aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas en el círculo unitario.
  - Taller 5.- El uso de la TAC “Trabajo en equipo de logro individual” para el aprendizaje características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.
  - Taller 6.- El uso de la TAC “Enseñanza acelerada por equipos” para el aprendizaje de las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante.

- Un proceso de valoración de la efectividad de las técnicas de aprendizaje cooperativo en la potenciación del aprendizaje de funciones trigonométricas.

Matriz de fases

Objetivos	Fases
Elaborar una perspectiva teórica sobre el aprendizaje de funciones trigonométricas.	Deducción
Elaborar un diagnóstico de las deficiencias de los estudiantes o de las dificultades en el aprendizaje de funciones trigonométricas.	Diagnóstico
Diseñar un modelo alternativo de técnicas de aprendizaje cooperativo para que los estudiantes mejoren su aprendizaje de funciones trigonométricas.	Modelación
Utilizar el taller como técnica didáctica para experimentar el modelo de técnicas de aprendizaje cooperativo para mejorar el aprendizaje de funciones trigonométricas en los estudiantes de 2ºaño de Bachillerato General Unificado.	Taller pedagógico

Objetivos	Fases
Valorar el nivel de impacto del uso de técnicas de aprendizaje cooperativo en el mejoramiento del aprendizaje de funciones trigonométricas en los estudiantes de 2ºaño de Bachillerato General Unificado.	Prueba de los signos rangos de Wilcoxon. .

- Deducción

El método deductivo fue de utilidad para la elaboración de una perspectiva teórica sobre el aprendizaje de funciones trigonométricas.

La utilidad de este método dentro de la realización de este trabajo se evidencia en la esquematización del marco teórico para describir los contenidos pertinentes de la temática sobre funciones trigonométricas, pidiéndose así establecer los tópicos necesarios para realizar la aplicación de la alterativa propuesta.

- Diagnóstico

El diagnóstico, permitió la realización de un diagnóstico para detectar los problemas que los estudiantes tienen al momento de aprender las funciones trigonométricas, también para definir las técnicas de aprendizaje cooperativo que ayudarían a solucionar las dificultades que tienen los estudiantes.

- Modelación

En la presente investigación la modelación permitió diseñar un modelo alternativo de técnicas de aprendizaje cooperativo, siguiendo la lógica planteada por la modelación se diseñó la forma de aplicación de las técnicas de aprendizaje cooperativo adecuadas para dar solución a los problemas que los alumnos tienen al momento de aprender funciones trigonométricas.

- Taller pedagógico

Debido a que dentro del taller pedagógico se pueden incluir actividades individuales y grupales, además que interactúa lo teórico y lo práctico, se la consideró como la técnica más adecuada que permitió la ejecución y experimentación de la alternativa propuesta con las técnicas de aprendizaje cooperativo planteadas para mejorar el aprendizaje de funciones trigonométricas en los estudiantes de 2º año de Bachillerato General Unificado.

- Prueba de los Signos Rangos de Wilcoxon

La valoración del nivel de impacto del uso de técnicas de aprendizaje cooperativo en el mejoramiento del aprendizaje de funciones trigonométricas en los estudiantes de 2º año de Bachillerato General Unificado, se realizó mediante la utilización de la prueba de los signos rangos de Wilcoxon, para valorar cada uno de los talleres aplicados, tomándose en cuenta la nota de los pre test y post test realizados antes y después de la aplicación de los talleres planteados a cada uno de los alumnos participantes pudiéndose de esta forma determinar la utilidad de la alternativa propuesta.

Población y muestra

Informantes	**Población**	**Muestra**
Docentes	1	------
Estudiantes	23	------

f. RESULTADOS

- **Del diagnóstico**

ENCUESTA DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES

1. Seleccione la definición correcta de una función trigonométrica

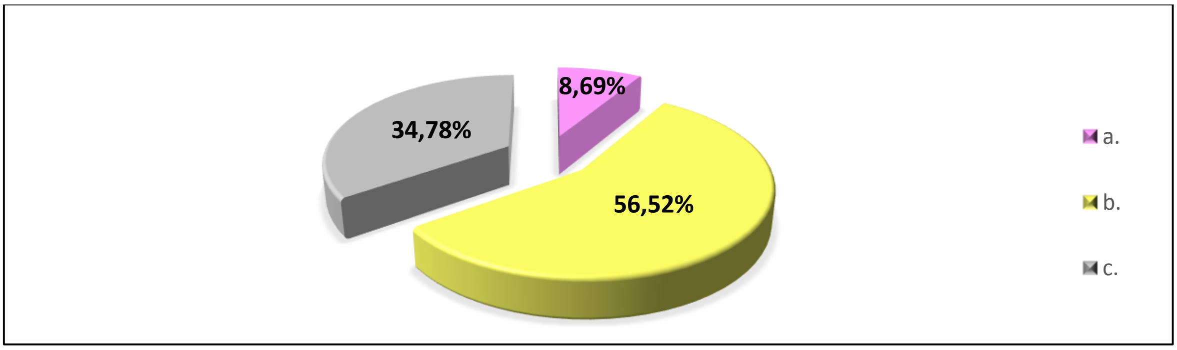
CUADRO 1

DEFINICIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Indicadores	f	%
a. Son funciones que se derivan de los triángulos	2	8,69
b. Se definen como funciones trigonométricas las que se derivan de la geometría elemental	13	56,52
c. Son funciones que se definen en base al seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante de un ángulo.	8	34,78
Total	23	100

Fuente: Encuesta de diagnóstico dirigida a los estudiantes
Responsable: Mónica Janeth Armijos Labanda

GRÁFICO 1



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Para Hiru (s.f.), una función trigonométrica, también llamada circular, es aquella que se define por la aplicación de una razón trigonométrica a los distintos valores de la variable independiente, que ha de estar expresada en radianes. Existen seis clases de funciones trigonométricas: seno y su recíproca, la cosecante; coseno y su recíproca, la secante; y tangente y su recíproca, la cotangente. Para cada una de ellas pueden también definirse funciones circulares inversas: arco seno, arco coseno, etcétera.

El 56,52% de los estudiantes define a las funciones trigonométricas como las que se derivan de la geometría elemental, mientras que el 34,78% de los estudiantes definen a la función trigonométrica como las funciones que se definen en base al seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante de un ángulo y un 8,69% definen a la función trigonométrica como las funciones que se derivan de los triángulos.

De los estudiantes consultados únicamente la tercera parte define a las funciones trigonométricas, lo que implica que los profesores de matemática deben priorizar el estudio de la trigonometría debido a su inmediata aplicación en el estudio de las funciones trigonométricas en segundo año de bachillerato.

2. ¿Qué personaje empezó el estudio de las funciones trigonométricas?

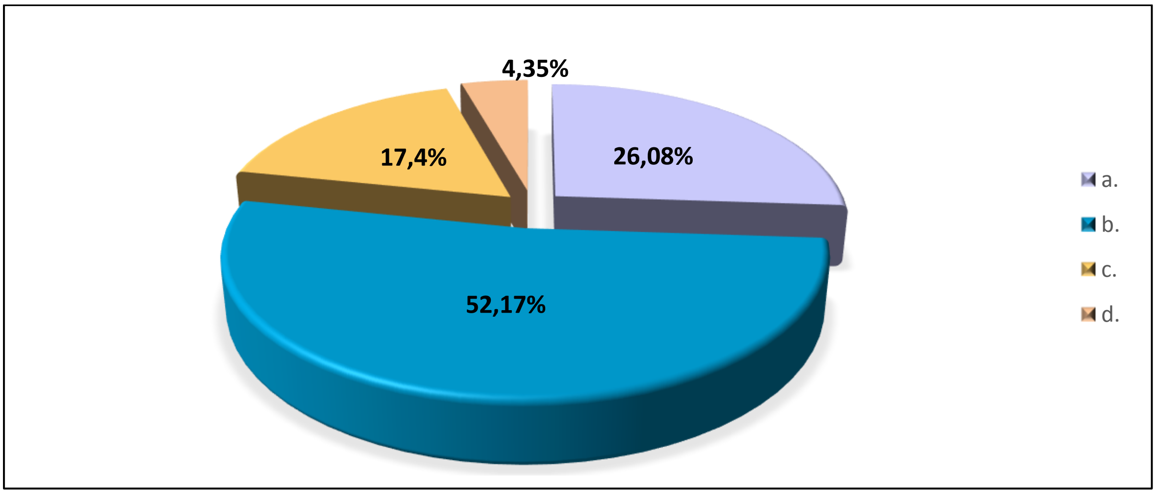
CUADRO 2

PRIMER PERSONAJE QUE ESTUDIÓ DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Indicadores	f	%
a. Hiparco de Nicea	6	26,08
b. Pitágoras	12	52,17
c. Francois Viette	4	17,4
d. Rheticus	1	04,35
Total	23	100

Fuente: Encuesta de diagnóstico dirigida a los estudiantes
Responsable: Mónica Janeth Armijos Labanda

GRÁFICA 2



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

"Luego de Egipto y Babilonia, el estudio de la trigonometría se asentó en Grecia, donde el matemático y astrónomo Griego Hiparco de Nicea, fue uno de los principales y más importantes desarrolladores de la Trigonometría" (Pérez, 2010).

El 52,17% de los estudiantes mencionaron que Pitágoras fue quien estudio principalmente las funciones trigonométricas, un 26,08% indicaron que Hiparco de Nicea fue quien primero estudio las funciones trigonométricas, mientras que un 17,4% de los estudiantes respondieron que Rheticus estudio primero a las funciones trigonométricas, y un 4,35% de los estudiantes piensa que fue Rheticus.

La cuarta parte de los estudiantes manifestaron que Hiparco de Nicea fue quien empezó con el estudio de las funciones trigonométricas siendo los demás personajes matemáticos, astrónomos y físicos aportadores para el desarrollo de las mismas. Considerando al estudiante como un ente histórico cultural es importante que conozca cómo se han desarrollado a través de los años las funciones trigonométricas, y especialmente quien fue el personaje que comenzó con el estudio de las mismas.

3. ¿Seleccione las aplicaciones de las funciones trigonométricas?

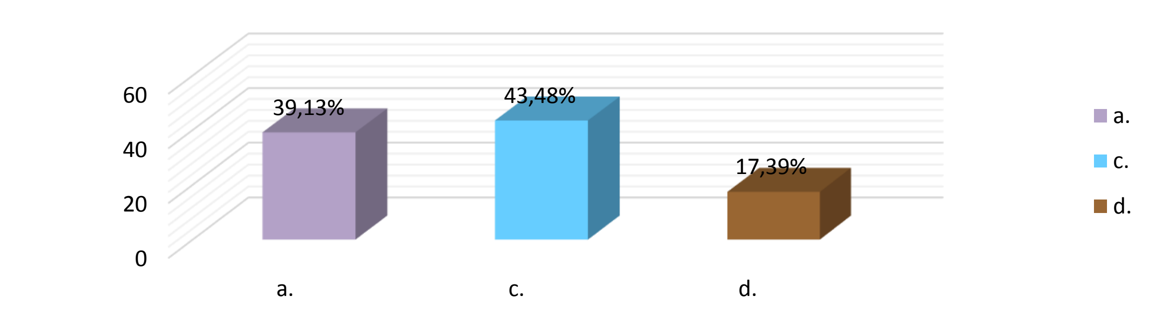
CUADRO 3

APLICACIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Indicadores	**f**	**%**
a. Aviación	9	39,13
b. Cocina	-	-
c. Construcción	10	43,48
d. Gimnasia	4	17,39
Total	23	100

Fuente: Encuesta de diagnóstico dirigida a los estudiantes
Responsable: Mónica Janeth Armijos Labanda

GRÁFICA 3



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

"Las aplicaciones de las funciones trigonométricas se evidencian en astronomía, artillería, aviación, cartografía, construcciones, navegación" González (2009).

El 43,48% de los estudiantes mencionaron que una aplicación de las funciones trigonométricas en la construcción, un 39,13% de los estudiantes manifestaron que otra aplicación de las funciones trigonométricas puede ser la aviación, mientras que un 17,39% de los estudiantes mencionaron que una aplicación de las funciones trigonométricas se puede dar en la gimnasia

Las funciones trigonométricas pueden ser aplicadas en varias acciones de la vida diaria, como es el caso de la aviación para calcular las distancias entre aviones y la construcción para determinar lugares de excavación de un túnel, mientras que para la cocina y la gimnasia puede ser más complicada su aplicación.

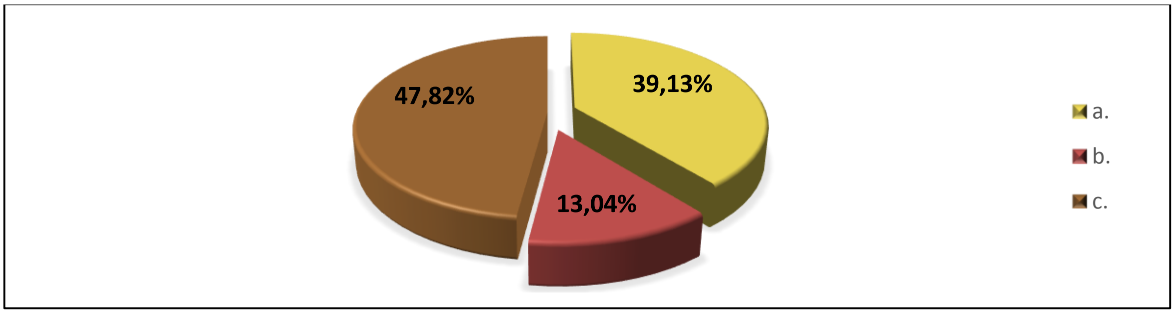
4. ¿Cuál es la expresión correcta que define a la función seno?

CUADRO 4
DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN SENO

Indicadores	f	%
a. $sen = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$	9	39,13
b. $sen = \frac{y}{1}$	3	13,04
c. $sen = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ \ adyacente}$	11	47,82
Total	23	100

Fuente: Encuesta de diagnóstico dirigida a los estudiantes
Responsable: Mónica Janeth Armijos Labanda

GRÁFICA 4



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

La función trigonométrica seno según Galindo,(2014) se define como:

$$Sen\ \theta = \frac{lado\ opuesto\ de\ \theta}{hipotenusa}$$

El 47,82% de los estudiantes manifestó que la función seno se define como la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente, mientras que un 13,04% de los estudiantes piensan que la función seno se define como la razón entre la variable <y> y el radio del círculo unitario, y un 39, 13% de los estudiantes piensan que la expresión correcta que define a la función seno es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

La función seno θ se define como la razón entre el lado opuesto al ángulo θ y la hipotenusa del triángulo rectángulo, considerándose así que solo una tercera parte de los estudiantes conocen la definición correcta.

5. **¿Utiliza su docente el trabajo en grupos para el desarrollo de la clase?**

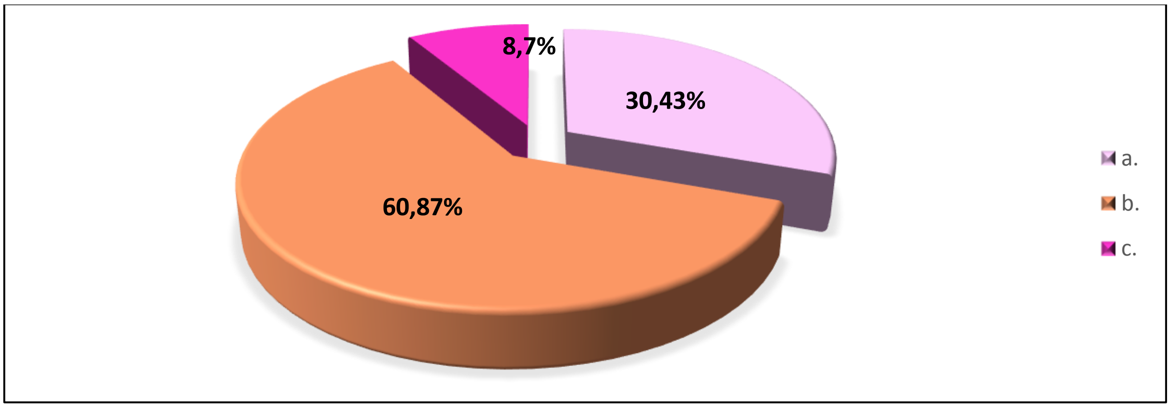
CUADRO 5

TRABAJO GRUPAL

Indicadores	**f**	**%**
a. Siempre	7	30,43
b. A veces	14	60,87
c. Nunca	2	8,7
TOTAL	23	100

Fuente: Encuesta de diagnóstico dirigida a los estudiantes
Responsable: Mónica Janeth Armijos Labanda

GRÁFICA 5



ANÀLISISE INTERPRETACIÓN

Las funciones mentales superiores según Yola, Samantha & Rina (2012) son:

> Se adquieren y se desarrollan a través de la interacción social. Puesto que el individuo se encuentra en una sociedad específica con una cultura concreta, estas funciones están determinadas por la forma de ser de esa sociedad. El conocimiento es resultado de la interacción social; en la interacción con los demás adquirimos conciencia de nosotros, aprendemos el uso de los símbolos que, a su vez, nos permiten pensar en formas cada vez más complejas.

Un 60,87% de los estudiantes manifestaron que su docente utiliza a veces trabajos de grupo para el desarrollo de la clase, un 30,43% de los estudiantes manifestó que su docente siempre utiliza trabajos de grupo para el desarrollo de la clase mientras que un 8,7% de los estudiantes manifestó que su docente nunca usa trabajos de grupo para el desarrollo de su clase.

Más de la mitad de los estudiantes manifestaron que su docente usa a veces espacios de interacción social, considerándose un aspecto positivo pues según Vigotsky en la interacción con los demás el estudiante desarrolla las funciones mentales inferiores hasta llegar a las superiores, logrando así aprender.

6. **Considera usted que su docente logra desarrollar al máximo su capacidad de aprendizaje**

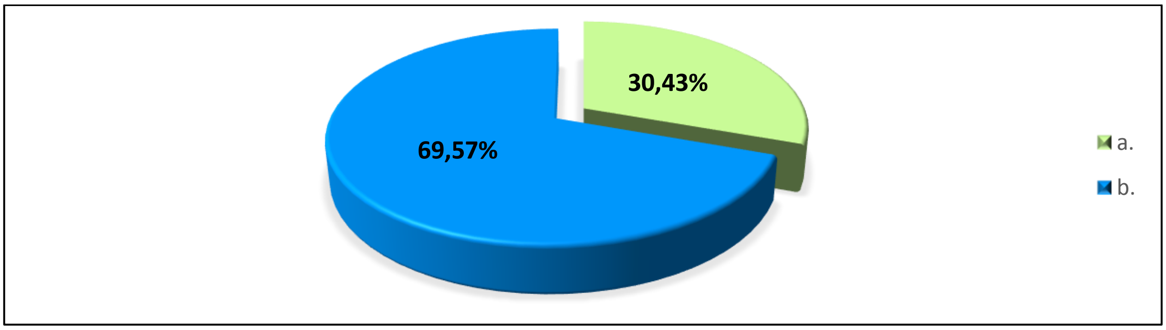
CUADRO 6

DESARROLLO DE LA CAPACIDAD DE APRENDIZAJE

Indicadores	**f**	**%**
a. Si	7	30,43
b. No	16	69,57
TOTAL	23	100

Fuente: Encuesta de diagnóstico dirigida a los estudiantes
Responsable: Mónica Janeth Armijos Labanda

GRÁFICA 6



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

La zona de desarrollo próximo según Yola, Samantha & Rina (2012) es:

El momento del aprendizaje que es posible en unos estudiantes dados las condiciones educativas apropiadas (…) (adulto y niño, tutor y pupilo, modelo y observador, experto y novato) trabajan juntos en las tareas que el estudiante no podría realizar solo, dada la dificultad del nivel (…) quienes saben más o son más diestros comparten sus conocimientos y habilidades con los que saben menos para completar una empresa.

EL 69, 57% de los estudiantes mencionan que su docente no logra desarrollar al máximo su capacidad de aprendizaje, mientras que un 30,43% de estudiantes mencionó que su docente si logra desarrollar su capacidad de aprendizaje al máximo.

La tercera parte de los alumnos manifestaron que el docente logra desarrollar en ellos la capacidad de aprendizaje al máximo mediante la zona de desarrollo próximo que es el espacio educativo dentro del cual el estudiante interactúa con las personas que le rodean para lograr dicho aprendizaje.

ENCUESTA DIRIGIDA AL DOCENTE

7. **¿Considera usted que en el aprendizaje de funciones trigonométricas de sus alumnos usted logra desarrollar sus funciones mentales inferiores hasta llegar a las funciones mentales superiores?**

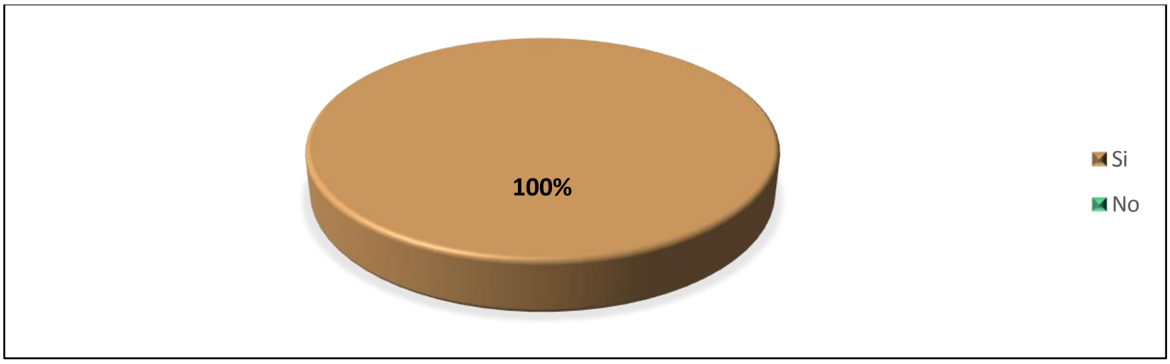
CUADRO 7

LOGRO DE LAS FUNCIONES MENTALES SUPERIORES

Indicadores	f	%
Si	1	100
No	-	-
TOTAL	1	100

Fuente: Encuesta de diagnóstico dirigida a los docentes
Responsable: Mónica Janeth Armijos Labanda

GRÁFICA 7



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Según Yola, Samantha & Rina (2012) las funciones mentales superiores son:

Las funciones mentales superiores, se adquieren y se desarrollan a través de la interacción social. Puesto que el individuo se encuentra en una sociedad específica con una cultura concreta, estas funciones están determinadas por la forma de ser de esa sociedad. El conocimiento es resultado de la interacción social; en la interacción con los demás adquirimos conciencia de nosotros, aprendemos el uso de los símbolos que, a su vez, nos permiten pensar en formas cada vez más complejas.

El docente manifestó que en un 100% logra desarrollar las funciones mentales inferiores hasta llegar a las superiores.

Las funciones mentales superiores conducen a lograr aprendizajes duraderos en los estudiantes, evidenciándose que el docente menciona que si se da dicho logro.

8. **¿Para el aprendizaje de funciones trigonométricas de sus alumnos usted considera necesarias las: ?**

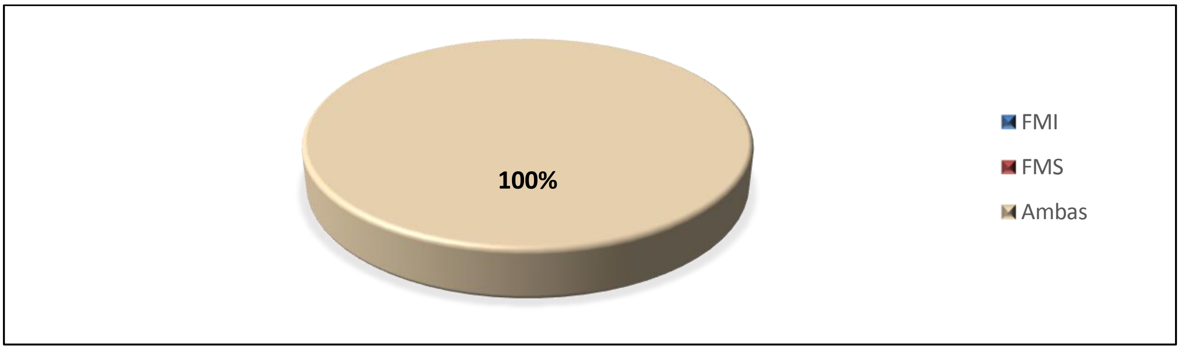
CUADRO 8

NECESIDAD DE FUNCIONES MENTALES

Indicadores	f	%
Funciones mentales inferiores	-	-
Funciones mentales superiores	-	-
Ambas	1	100
TOTAL	1	100

Fuente: Encuesta de diagnóstico dirigida a los docentes
Responsable: Mónica Janeth Armijos Labanda

GRÁFICA 8



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Las funciones mentales inferiores y superiores según Yola, Samantha & Rina (2012) son:

> Las funciones mentales inferiores, son aquellas con las que nacemos, son las funciones naturales y están determinadas genéticamente. El comportamiento derivado de estas funciones es limitado; está condicionado por lo que podemos hacer.
>
> Las funciones mentales superiores, se adquieren y se desarrollan a través de la interacción social. Puesto que el individuo se encuentra en una sociedad específica

con una cultura concreta, estas funciones están determinadas por la forma de ser de esa sociedad. Las funciones mentales superiores son mediadas culturalmente. El comportamiento derivado de Las funciones mentales superiores está abierto a mayores posibilidades. El conocimiento es resultado de la interacción social; en la interacción con los demás adquirimos conciencia de nosotros, aprendemos el uso de los símbolos que, a su vez, nos permiten pensar en formas cada vez más complejas.

El docente manifestó que en un 100% necesita las funciones mentales superiores e inferiores

El docente manifestó que para que sus alumnos puedan aprender funciones trigonométricas necesitan contar con las funciones mentales inferiores y superiores de sus alumnos lo cual ayudara a consolidar el aprendizaje.

9. **¿Considera que en el aprendizaje de funciones trigonométricas usted propicia espacios de interacción social entre sus alumnos?**

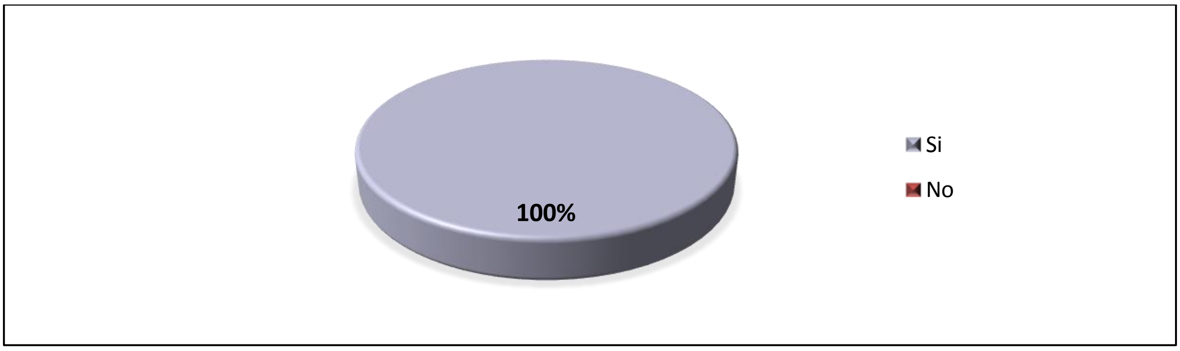
CUADRO 9

ESPACIOS DE INTERACCIÓN SOCIAL

Indicadores	**f**	**%**
Si	1	100
No	-	-
TOTAL	1	100

Fuente: Encuesta de diagnóstico dirigida a los docentes
Responsable: Mónica Janeth Armijos Labanda

GRÁFICA 9



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Los espacios de interacción social permiten desarrollar las funciones mentales inferiores dando lugar a las funciones mentales superiores Yola, Samantha & Rina (2012) mencionan que:

> Cuando nacemos, solamente tenemos funciones mentales inferiores, las funciones mentales superiores todavía no están desarrolladas, a través con la interacción con los demás, vamos aprendiendo, y al ir aprendiendo, vamos desarrollando nuestras funciones mentales superiores, algo completamente diferente de lo que recibimos genéticamente por herencia, ahora bien, lo que aprendemos depende de las herramientas psicológicas que tenemos, y a su vez, las herramientas psicológicas dependen de la cultura en que vivimos, consiguientemente, nuestros pensamientos, nuestras experiencias, nuestras intenciones y nuestras acciones están culturalmente mediadas.

El docente manifestó que en un 100% propicia espacios de interacción social entre sus alumnos en el aprendizaje de funciones trigonométricas.

La inserción de espacios de interacción social en las clases permite que los alumnos aprovechen las habilidades psicológicas, las herramientas psicológicas y la cultura de cada uno de ellos siendo estos aspectos los que conduce al estudiante a pasar de funciones mentales inferiores a las funciones mentales superiores lográndose así el aprendizaje.

10. ¿Considera Ud. que sus alumnos logran la zona desarrollo próximo en el aprendizaje de funciones trigonométricas?

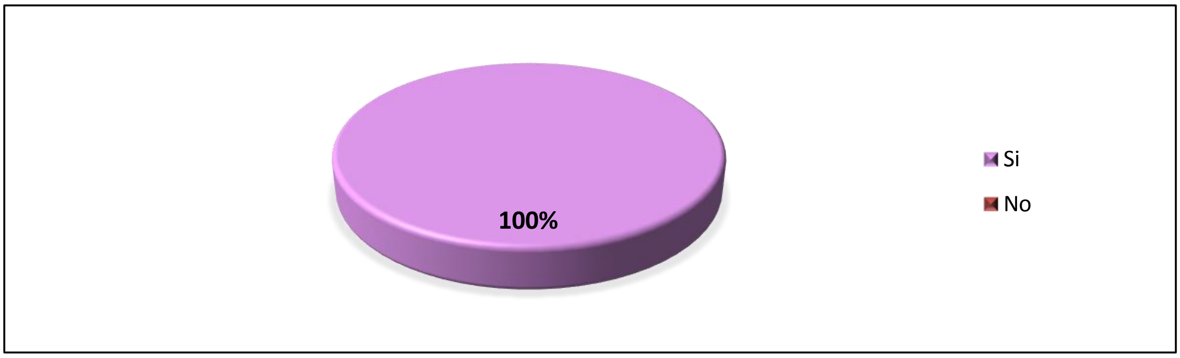
CUADRO 10

LOGRO DE LA ZONA DE DESARROLLO PRÓXIMO

Indicadores	**f**	**%**
Si	1	100
No	-	-
TOTAL	1	100

Fuente: Encuesta de diagnóstico dirigida a los estudiantes
Responsable: Mónica Janeth Armijos Labanda

GRÁFICA 10



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Según Yola, Samantha & Rina (2012) en la zona de desarrollo próximo:

> Al principio el maestro (o el tutor) hace la mayor parte del trabajo, pero después, comparte la responsabilidad con el alumno. Conforme el estudiante se vuelve más diestro, el profesor va retirando el andamiaje para que se desenvuelva independientemente. La clave es asegurarse que el andamiaje mantiene al discípulo en la ZDP, que se modifica en tanto que este desarrolla sus capacidades. Se incita al estudiante a que aprenda dentro de los límites de la ZDP.

El docente manifestó que en un 100% considera que si logra la zona de desarrollo próximo con sus estudiantes.

El docente considera que logra la zona de desarrollo próximo con la ayuda que brinda a sus estudiantes al momento de aprender, debido a que él docente es el encargado de colaborar en el logro de zona de desarrollo próximo de sus alumnos, tiene el papel de guiador y responsable del conocimiento que van a adquirir ellos.

11. **¿Cuáles son las herramientas psicológicas que usted considera más importantes en el aprendizaje de funciones trigonométricas de sus alumnos?**

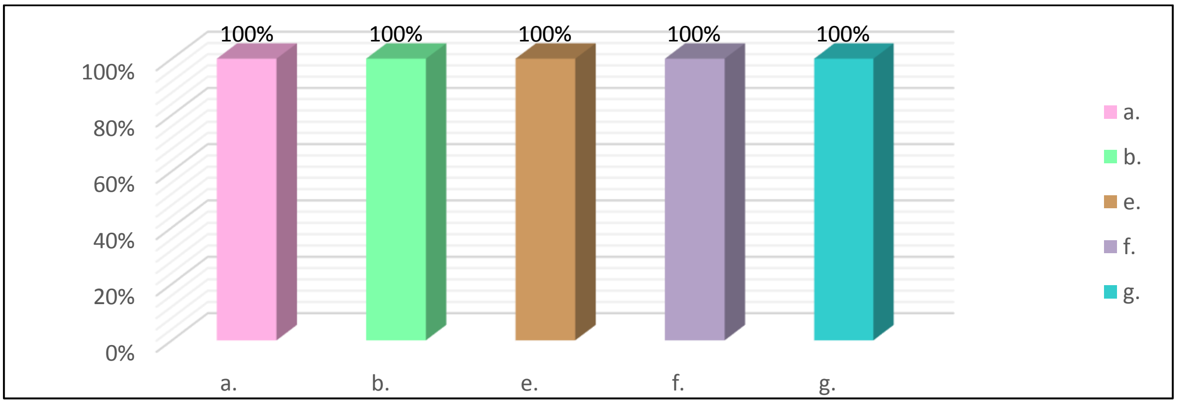
CUADRO 11

HERRAMIENTAS PSICOLÓGICAS

Indicadores	f	%
a. Lenguaje	1	100
b. Símbolos	1	100
c. Números	-	-
d. d. Cultura	-	-
e. Gráficos	1	100
f. Textos	1	100
g. Documentales	1	100
h. Otros	-	-

Fuente: Encuesta de diagnóstico dirigida a los docentes
Responsable: Mónica Janeth Armijos Labanda

GRÁFICA 11



ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

Las herramientas psicológicas según Yola, Samantha & Rina (2012) son:

> Las herramientas psicológicas son el puente entre las funciones mentales inferiores y las funciones mentales superiores y, dentro de estas, el puente entre las habilidades interpsicológicas (sociales) y las intrapsicológicas (personales). Las herramientas psicológicas median nuestros pensamientos, sentimientos y conductas. Nuestra capacidad de pensar, sentir y actuar depende de las

herramientas psicológicas que usamos para desarrollar esas funciones mentales superiores, ya sean interpsicológicas o intrapsicológicas.

El docente manifestó que en un 100% las herramientas psicológicas que considera importantes en el aprendizaje de funciones trigonométricas de sus alumnos son el lenguaje, símbolos, gráficos, textos y documentales.

El docente menciona que necesita de varias herramientas psicológicas para que sus alumnos puedan desarrollar su aprendizaje al máximo pues las herramientas psicológicas como el lenguaje, los símbolos, entre otros median nuestra conducta, sentimientos y pensamientos, con ellas la persona puede relacionarse con quienes la rodean y controlar el cambio de sus funciones mentales inferiores a superiores.

- **Resultados de la aplicación de las técnicas de aprendizaje cooperativo**

Taller 1

El uso de la TAC “rompecabezas” para el aprendizaje de los orígenes y aportadores de las funciones trigonométricas.

ESTUDIANTE	X	Y	D=Y-X	D=|Y-X|	RANGO	RANGO+	RANGO-
A	0,1	0,1	0	0	0	1,5	
B	1,6	2	0,4	0,4	0	4	
C	2,0	4,0	2	2	0,2	12	
D	2	7	5	5	0,4	20	
E	2	9,8	7,8	7,8	0,6	22	
F	0,6	0,6	0	0	1	1,5	
G	1,6	2,6	1	1	1,6	6	
H	4	8	4	4	1,8	16	
I	0,1	2	1,9	1,9	1,9	9	
J	0,1	9,8	9,7	9,7	2	23	
K	0,6	2,6	2	2	2	12	
L	2	4	2	2	2	12	
M	0,1	2,6	2,5	2,5	2	15	
N	2	4	2	2	2	12	
O	4	8,6	4,6	4,6	2,5	18,5	
P	1	2,6	1,6	1,6	4	7	
Q	2	6,6	4,6	4,6	4,5	18,5	
R	0,6	2,6	2	2	4,6	12	
S	2	2,6	0,6	0,6	4,6	5	
T	4,6	6,4	1,8	1,8	5	8	
U	4	4,2	0,2	0,2	7,6	3	
V	0,1	4,6	4,5	4,5	7,8	17	
W	2	9,6	7,6	7,6	9,7	21	
TOTAL						$\sum R+ = 276$	$\sum R- = 0$

Valor estadístico

$$W = \left(\sum R +\right) - \left(\sum R -\right)$$

W= 276-0

W= 276

Media del estadístico

$$\mathbf{u_w} = \frac{\mathbf{N(N+1)}}{\mathbf{4}}$$

$$\mathbf{u_w} = \frac{23(23+1)}{4}$$

$$\mathbf{u_w} = \frac{552}{4}$$

$$\mathbf{u_w} = \mathbf{138}$$

Desviación Estándar

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{N(N+1)(2N+1)}}{\mathbf{24}}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{23(23+1)(2(23)+1)}{24}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{23(24)(47)}{24}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{25944}{24}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{1081}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \mathbf{32.87}$$

Valor estadístico de la curva normal

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{W - \mu_W}}{\boldsymbol{\sigma_W}}$$

$$\boldsymbol{Z} = \frac{276 - 138}{32{,}87}$$

$$\boldsymbol{Z} = \frac{138}{32{,}87}$$

$$\boldsymbol{Z} = \mathbf{4{,}19}$$

Interpretación

Como el valor estadístico z obtenido, equivale a 4,19 mayor que 1,96 se verifica que la técnica de aprendizaje cooperativo <<rompecabezas>> mejora el aprendizaje de los orígenes y aportadores de las funciones trigonométricas demostrando a través de la prueba de los Signos Rangos de Wilcoxon la efectividad de la alternativa empleada en el taller.

Taller 2

El uso de la TAC “Student teams achievement division (Divisiones de rendimiento por equipos), para el aprendizaje de la utilidad a la humanidad de las funciones trigonométricas y aprendizaje de conceptos básico de geometría y trigonometría.

ESTUDIANTE	X	Y	D=Y-X	D=|Y-X|	RANGO	RANGO+	RANGO-
A	0	4	4	4	0	23	
B	4,2	8	3,8	3,8	0	22	
C	1,6	3,8	2,2	2,2	0	16	
D	6	8	2	2	0	14	
E	2	4,4	2,4	2,4	0	17	
F	6	7	1	1	0	8,5	
G	9	9	0	0	0	4	
H	5,2	8	2,8	2,8	1	19	
I	8	8	0	0	1	4	
J	3	6	3	3	1,4	20,5	
K	5,4	7	1,6	1,6	1,6	11	
L	5	6	1	1	1,8	8,5	
M	7	7	0	0	2	4	
N	9	9	0	0	2	4	
O	6	6	0	0	2	4	
P	3,6	5	1,4	1,4	2,2	10	
Q	7	7	0	0	2,4	4	
R	6,2	8,8	2,6	2,6	2,6	18	
S	7	8,8	1,8	1,8	2,8	12	
T	7	9	2	2	3	14	
U	7	10	3	3	3	20,5	
V	9	9	0	0	3,8	4	
W	7	9	2	2	4	14	
TOTAL						∑R+ = 276	∑R- = 0

Valor estadístico

$$\boldsymbol{W} = \left(\sum \boldsymbol{R}+\right) - \left(\sum \boldsymbol{R}-\right)$$

W= 276-0

W= 276

Media del estadístico

$$\mathbf{u_w} = \frac{\mathbf{N(N+1)}}{\mathbf{4}}$$

$$\mathbf{u_w} = \frac{23(23+1)}{4}$$

$$\mathbf{u_w} = \frac{552}{4}$$

$$\mathbf{u_w} = \mathbf{138}$$

Desviación Estándar

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{N(N+1)(2N+1)}}{\mathbf{24}}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{23(23+1)(2(23)+1)}{24}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{23(24)(47)}{24}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{25944}{24}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{1081}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \mathbf{32.87}$$

Valor estadístico de la curva normal

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{W - \mu_W}}{\boldsymbol{\sigma_W}}$$

$$\boldsymbol{Z} = \frac{276-138}{32{,}87}$$

$$\boldsymbol{Z} = \frac{138}{32{,}87}$$

$$\boldsymbol{Z} = \mathbf{4{,}19}$$

Interpretación

Como el valor estadístico z obtenido, equivale a 4,19 mayor que 1,96 se verifica que la técnica de aprendizaje cooperativo << Student teams achievement división>> (Divisiones de rendimiento por equipos), mejora el aprendizaje de la utilidad a la humanidad de las funciones trigonométricas y aprendizaje de conceptos básico de geometría y trigonometría demostrando a través de la prueba de los Signos Rangos de Wilcoxon la efectividad de la alternativa empleada en el taller.

Taller 3

El uso de la TAC "Aprendizaje cooperativo guiado" para el aprendizaje de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

ESTUDIANTE	X	Y	D=Y-X	D=|Y-X|	RANGO	RANGO+	RANGO-
A	0,1	8	7,9	7,9	0	22	
B	0,6	4	3,4	3,4	0,6	12	
C	2	2,6	0,6	0,6	0,6	2,5	
D	0,1	4,6	4,5	4,5	1,4	16	
E	2	6	4	4	1,4	15	
F	2,6	4	1,4	1,4	2	4,5	
G	0,1	7,2	7,1	7,1	2	21	
H	2	4,8	2,8	2,8	2,8	8,5	
I	3,6	6,6	3	3	2,8	10	
J	2	7,8	5,8	5,8	3	19	
K	4,6	8	3,4	3,4	3,4	12	
L	6	8	2	2	3,4	6,5	
M	2	6,6	4,6	4,6	3,4	17,5	
N	5	8,6	3,6	3,6	3,6	14	
O	6,6	8	1,4	1,4	4	4,5	
P	4,6	6,6	2	2	4,5	6,5	
Q	7,2	10	2,8	2,8	4,6	8,5	
R	2	8,6	6,6	6,6	4,6	20	
S	4,6	8	3,4	3,4	5,8	12	
T	8,6	9,2	0,6	0,6	6,6	2,5	
U	2	6,6	4,6	4,6	7,1	17,5	
V	9,2	9,2	0	0	7,9	1	
W	0	8	8	8	8	23	
TOTAL						$\sum R+ = 276$	$\sum R- = 0$

Valor estadístico

$$W = \left(\sum R +\right) - \left(\sum R -\right)$$

W= 276-0

W= 276

Media del estadístico

$$\mathbf{u_w} = \frac{\mathbf{N(N+1)}}{\mathbf{4}}$$

$$\mathbf{u_w} = \frac{23(23+1)}{4}$$

$$\mathbf{u_w} = \frac{552}{4}$$

$$\mathbf{u_w} = \mathbf{138}$$

Desviación Estándar

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{N(N+1)(2N+1)}}{\mathbf{24}}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{23(23+1)(2(23)+1)}{24}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{23(24)(47)}{24}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{25944}{24}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{1081}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \mathbf{32.87}$$

Valor estadístico de la curva normal

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{W - \mu_W}}{\boldsymbol{\sigma_W}}$$

$$\boldsymbol{Z} = \frac{276 - 138}{32{,}87}$$

$$\boldsymbol{Z} = \frac{138}{32{,}87}$$

$\boldsymbol{Z}$ =**4,19**

Interpretación

Como el valor estadístico z obtenido, equivale a 4,19 mayor que 1,96 se verifica que la técnica de aprendizaje cooperativo << aprendizaje cooperativo guiado>> mejora el aprendizaje de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo, demostrando a través de la prueba de los Signos Rangos de Wilcoxon la efectividad de la alternativa empleada en el taller.

Taller 4

El uso de la TAC "Tutoría entre iguales" para el aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas en el círculo unitario.

ESTUDIANTE	X	Y	D=Y-X	D=|Y-X|	RANGO	RANGO+	RANGO-
A	5,2	6	0,8	0,8	0	3,5	
B	2,6	6	3,4	3,4	0	11,5	
C	1,2	2,6	1,4	1,4	0,8	5,5	
D	0	2	2	2	0,8	8,5	
E	2	4	2	2	1,4	8,5	
F	0,1	2	1,9	1,9	1,4	7	
G	0,6	4,6	4	4	1,9	16	
H	2,6	6	3,4	3,4	2	11,5	
I	2,6	2,6	0	0	2	1,5	
J	0,6	4	3,4	3,4	3,4	11,5	
K	2	6	4	4	3,4	16	
L	2,6	2,6	0	0	3,4	1,5	
M	0,6	7,2	6,6	6,6	3,4	21	
N	2	6	4	4	4	16	
O	0,6	4	3,4	3,4	4	11,5	
P	0,6	8	7,4	7,4	4	22	
Q	0,6	2	1,4	1,4	4	5,5	
R	4	8	4	4	4	16	
S	5,2	6	0,8	0,8	5,4	3,5	
T	3,2	8,6	5,4	5,4	6	19	
U	6	10	4	4	6,6	16	
V	0,1	8	7,9	7,9	7,4	23	
W	2	8	6	6	7,9	20	
TOTAL						$\sum R+ = 276$	$\sum R- = 0$

Valor estadístico

$$W = \left(\sum R +\right) - \left(\sum R -\right)$$

W= 276-0

W= 276

Media del estadístico

$$\mathbf{u_w} = \frac{\mathbf{N(N+1)}}{\mathbf{4}}$$

$$\mathbf{u_w} = \frac{23(23+1)}{4}$$

$$\mathbf{u_w} = \frac{552}{4}$$

$$\mathbf{u_w} = \mathbf{138}$$

Desviación Estándar

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{N(N+1)(2N+1)}}{\mathbf{24}}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{23(23+1)(2(23)+1)}{24}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{23(24)(47)}{24}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{25944}{24}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{1081}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \mathbf{32.87}$$

Valor estadístico de la curva normal

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{W - \mu_W}}{\boldsymbol{\sigma_W}}$$

$$\boldsymbol{Z} = \frac{276 - 138}{32{,}87}$$

$$\boldsymbol{Z} = \frac{138}{32{,}87}$$

$$\boldsymbol{Z} = \mathbf{4{,}19}$$

Interpretación

Como el valor estadístico z obtenido, equivale a 4,19 mayor que 1,96 se verifica que la técnica de aprendizaje cooperativo << Tutoría entre iguales>> mejora el aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas en el círculo unitario, demostrando a través de la prueba de los Signos Rangos de Wilcoxon la efectividad de la alternativa empleada en el taller.

Taller 5

El uso de la TAC "Trabajo en equipo de logro individual" para el aprendizaje características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.

ESTUDIANTE	X	Y	D=Y-X	D=|Y-X|	RANGO	RANGO+	RANGO-
A	5	10	5	5	1	15	
B	1	5,3	4,3	4,3	2	11	
C	2	9	7	7	3	22,5	
D	3	7	4	4	3	7,5	
E	0,1	5	4,9	4,9	4	12,5	
F	3	6	3	3	4	3,5	
G	1	7	6	6	4	20	
H	3	8	5	5	4	15	
I	0,1	6	5,9	5,9	4	17,5	
J	2	7	5	5	4	15	
K	3	9	6	6	4,3	20	
L	4	8	4	4	4,9	7,5	
M	0,1	6	5,9	5,9	4,9	17,5	
N	3	7	4	4	5	7,5	
O	2	6	4	4	5	7,5	
P	4	10	6	6	5	20	
Q	3	7	4	4	5,9	7,5	
R	5	6	1	1	5,9	1	
S	4	8	4	4	6	7,5	
T	7	10	3	3	6	3,5	
U	0,1	5	4,9	4,9	6	12,5	
V	3	10	7	7	7	22,5	
W	5	7	2	2	7	2	
TOTAL						∑R+ = 276	∑R- = 0

Valor estadístico

$$W = \left(\sum R+\right) - \left(\sum R-\right)$$

W= 276-0

W= 276

Media del estadístico

$$\mathbf{u_w} = \frac{\mathbf{N(N+1)}}{\mathbf{4}}$$

$$\mathbf{u_w} = \frac{23(23+1)}{4}$$

$$\mathbf{u_w} = \frac{552}{4}$$

$$\mathbf{u_w = 138}$$

Desviación Estándar

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{N(N+1)(2N+1)}}{\mathbf{24}}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{23(23+1)(2(23)+1)}{24}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{23(24)(47)}{24}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{25944}{24}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{1081}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W = 32.87}$$

Valor estadístico de la curva normal

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{W - \mu_W}}{\boldsymbol{\sigma_W}}$$

$$\boldsymbol{Z} = \frac{276-138}{32{,}87}$$

$$\boldsymbol{Z} = \frac{138}{32{,}87}$$

$\boldsymbol{Z}$ =**4,19**

Interpretación

Como el valor estadístico z obtenido, equivale a 4,19 mayor que 1,96 se verifica que la técnica de aprendizaje cooperativo << Trabajo en equipo de logro individual>> mejora el aprendizaje de las características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, demostrando a través de la prueba de los Signos Rangos de Wilcoxon la efectividad de la alternativa empleada en el taller.

Taller 6

El uso de la TAC "Enseñanza acelerada por equipos" para el aprendizaje de las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante.

ESTUDIANTE	X	Y	D=Y-X	D=|Y-X|	RANGO	RANGO+	RANGO-
A	4	6,6	2,6	2,6	0,2	13	
B	5,2	6	0,8	0,8	0,8	2,5	
C	3	4,5	1,5	1,5	0,8	8	
D	2	3	1	1	1	5	
E	0,1	3	2,9	2,9	1	14,5	
F	3	6	3	3	1	17	
G	2	6	4	4	1,4	19,5	
H	3	7	4	4	1,5	19,5	
I	2	4,5	2,5	2,5	1,6	12	
J	2	3	1	1	2	5	
K	3	6	3	3	2	17	
L	0,1	3	2,9	2,9	2,5	14,5	
M	6	7	1	1	2,6	5	
N	5,2	6	0,8	0,8	2,9	2,5	
O	6	6,2	0,2	0,2	2,9	1	
P	5	8	3	3	3	17	
Q	4	9	5	5	3	21	
R	5,2	6,6	1,4	1,4	3	7	
S	4	9,2	5,2	5,2	4	22,5	
T	7	9	2	2	4	10,5	
U	4	9,2	5,2	5,2	5	22,5	
V	5	6,6	1,6	1,6	5,2	9	
W	7	9	2	2	5,2	10,5	
TOTAL						$\sum R+ = 276$	$\sum R- = 0$

Valor estadístico

$$W = \left(\sum R +\right) - \left(\sum R -\right)$$

W= 276-0

W= 276

Media del estadístico

$$\mathbf{u_w} = \frac{\mathbf{N(N+1)}}{\mathbf{4}}$$

$$\mathbf{u_w} = \frac{23(23+1)}{4}$$

$$\mathbf{u_w} = \frac{552}{4}$$

$$\mathbf{u_w} = \mathbf{138}$$

Desviación Estándar

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{N(N+1)(2N+1)}}{\mathbf{24}}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{23(23+1)(2(23)+1)}{24}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{23(24)(47)}{24}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{\frac{25944}{24}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \sqrt{1081}$$

$$\boldsymbol{\sigma_W} = \mathbf{32.87}$$

Valor estadístico de la curva normal

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{W - \mu_W}}{\boldsymbol{\sigma_W}}$$

$$\boldsymbol{Z} = \frac{276 - 138}{32{,}87}$$

$$\boldsymbol{Z} = \frac{138}{32{,}87}$$

$\boldsymbol{Z}$ =**4,19**

Interpretación

Como el valor estadístico z obtenido, equivale a 4,19 mayor que 1,96 se verifica que la técnica de aprendizaje cooperativo << enseñanza acelerada por equipos>> mejora el aprendizaje de las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante, demostrando a través de la prueba de los Signos Rangos de Wilcoxon la efectividad de la alternativa empleada en el taller.

g. DISCUSIÓN

Objetivo específico 1: Se cumplió mediante la adaptación de las temáticas de funciones trigonométricas, al modelo del aprendizaje sociocultural de lev Vigotsky, y los elementos que este requiere.

Objetivo específico 2: Elaborar un diagnóstico de las deficiencias de los estudiantes o de las dificultades en el aprendizaje de funciones trigonométricas.

Diagnóstico del aprendizaje de las funciones trigonométricas

Informantes	**Criterio**	**Indicadores en situación negativa**	**Indicadores en situación positiva**
Estudiantes	Definición de funciones trigonométricas	55,21%	34,78%
	Personaje que estudió de las funciones trigonométricas	73,92%	26,08%
	Aplicación de las funciones trigonométricas	17,39%	82,61%
	Definición de la función seno	60,87%	39,13%
	Trabajo grupal	69,57%	30,43%
	Desarrollo de la capacidad de aprendizaje	69,57%	30,43%

Informantes	Criterio	Indicadores en situación negativa	Indicadores en situación positiva
Docente	Logro de las funciones mentales superiores	0%	100%
	Necesidad de funciones mentales	0%	100%
	Espacios de interacción social	0%	100%
	Logro de la zona de desarrollo próximo	0%	100%
	Herramientas psicológicas	30%	70%

Objetivo específico 3: Se realizó la adaptación de las técnicas de aprendizaje cooperativo mediante la elaboración de planificaciones didácticas para la enseñanza de funciones trigonométricas y material de apoyo entregado a estudiantes, en los grupos de trabajo estructurados en cada clase.

Objetivo específico 4: Se desarrolló mediante el planteamiento de talleres pedagógicos que dieron como resultado el uso de técnicas cooperativas para mejorar el aprendizaje de funciones trigonométricas en los estudiantes de 2º año de Bachillerato General Unificado, de la Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio.

Objetivo específico 5: Valoración de la efectividad de las técnicas cooperativas en el aprendizaje de funciones trigonométricas

N°	Taller	Valoración
1	El uso de la TAC “rompecabezas” para el aprendizaje de los orígenes y aportadores de las funciones trigonométricas.	$Z = 4{,}19$
2	El uso de la TAC “Student teams achievement division (Divisiones de rendimiento por equipos), para el aprendizaje de la utilidad a la humanidad de las funciones trigonométricas y aprendizaje de conceptos básico de geometría y trigonometría.	$Z = 4{,}19$
3	El uso de la TAC “Aprendizaje cooperativo guiado” para el aprendizaje de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo.	$Z = 4{,}19$
4	El uso de la TAC “Tutoría entre iguales” para el aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas en el círculo unitario.	$Z = 4{,}19$
5	El uso de la TAC “Trabajo en equipo de logro individual” para el aprendizaje características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente	$Z = 4{,}19$
6	El uso de la TAC “Enseñanza acelerada por equipos” para el aprendizaje de las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante	$Z = 4{,}19$

Interpretación

Por medio de la regla de decisión se establece que:

Si se Z es mayor o igual a 1.96 (que es el 95% bajo la curva normal, con el nivel de significancia es 0,05) se acepta que la alternativa funciona, caso contrario si Z es menor que el valor estándar se la rechaza.

Como el valor estadístico Z obtenido, equivale a 4,19 mayor que 1,96 se verifica que las técnicas cooperativas mejoran el aprendizaje de las funciones trigonométricas demostrando a través de la prueba de los signos rangos de Wilcoxon la efectividad de la alternativa empleada en el taller.

h. CONCLUSIONES

- Si se realiza un taller utilizando las técnicas de aprendizaje cooperativo se mejora el aprendizaje de las funciones trigonométricas.

- Al aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo <<rompecabezas>> mediante un taller se mejora el aprendizaje de los orígenes y aportadores de las funciones trigonométricas

- Si se aplica la técnica de aprendizaje cooperativo << Student teams achievement división>> (Divisiones de rendimiento por equipos), se mejora el aprendizaje de la utilidad a la humanidad de las funciones trigonométricas y aprendizaje de conceptos básicos de geometría y trigonometría

- La aplicación de la técnica de aprendizaje cooperativo << aprendizaje cooperativo guiado>> mejora el aprendizaje de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo

- La técnica de aprendizaje cooperativo << Tutoría entre iguales>> mejora el aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas en el círculo unitario

- La técnica de aprendizaje cooperativo << Trabajo en equipo de logro individual>> mejora el aprendizaje de las características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente

- La técnica de aprendizaje cooperativo << enseñanza acelerada por equipos>> mejora significativamente el aprendizaje de las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante.

i. RECOMENDACIONES

De acuerdo a la investigación realizada se plantean las siguientes recomendaciones:

- Utilizar las técnicas de aprendizaje cooperativo para superar los problemas del aprendizaje de funciones trigonométricas.

- Aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo <<rompecabezas>> mediante un taller para mejorar el aprendizaje de los orígenes y aportadores de las funciones trigonométricas.

- Emplear la técnica de aprendizaje cooperativo << Student teams achievement división>> (Divisiones de rendimiento por equipos), para lograr mejorar el aprendizaje de la utilidad a la humanidad de las funciones trigonométricas y aprendizaje de conceptos básico de geometría y trigonometría.

- Utilizar la técnica de aprendizaje cooperativo << aprendizaje cooperativo guiado>>para mejorar el aprendizaje de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

- Utilizar la técnica de aprendizaje cooperativo << Tutoría entre iguales>> debido a que esta mejora el aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas en el círculo unitario.

- Aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo << Trabajo en equipo de logro individual>> pues esta técnica mejora el aprendizaje de las características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.

- Utilizar la técnica de aprendizaje cooperativo << enseñanza acelerada por equipos>> para mejorar significativamente el aprendizaje de las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante.

j. BIBLIOGRAFÍA

Achury, T. (23 de Octubre de 2011). *Trigonometría didáctica 10 b*. Recuperado el 21 de Enero de 2015, de Razones trigonométricas: http://trigonometriadidactica10b.blogspot.com/2011/10/personajes-que-aportaron-la_23.html

Alonso, P., López, A., Martin, P., Figueroa, V., Solari, M., & Rasskin., I. (s.f.). *Aprendizaje cooperativo.* Recuperado el 29 de Noviembre de 2014, de http://www.google.com.ec/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CBwQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.smsavia.com%2Fsites%2Fdefault%2Ffiles%2Felemento%2Ffichero%2FGu%25C3%25ADas%2520espec%25C3%25ADficas%2520para%2520los%2520programas%2520de%2520innovaci%25

Anónimo. (5 de 12 de 2010). Obtenido de http://es.slideshare.net/46123/cmo-hacer-un-taller-educativo

Anónimo. (s.f.). *Instituto Tecnológico de Chihuahua*. Obtenido de Prueba del signo para muestras pareadas: http://www.itch.edu.mx/academic/industrial/estadistica1/cap04d.html

Aprendizaje cooperativo. (22 de enero de 2015). Obtenido de La conformación de grupos: http://www.clermont.edu.co/edublogs/aprendizajecooperativo/pagina-ejemplo/

Aritor. (s.f.). Recuperado el 12 de Enero de 2015, de Funciones trigonométricas inversas: nometria/funciones_inversas.html

buenvivir.gob.ec. (11 de 4 de 2015). Obtenido de El socialismo del buen vivir: http://www.buenvivir.gob.ec/el-socialismo-del-buen-vivir

Corella, J. (12 de Febrero de 2012). *Reflexiones sobre la evaluación educativa*. Recuperado el 15 de Febrero de 2015, de La evaluación dinámica: http://reflexionevaluacioneducativa.blogspot.com/2012/02/la-evaluacion-dinamica.html

Definición de. (s.f.). Recuperado el 29 de Enero de 2015, de Definición de radian: http://definicion.de/radian/

Disfruta las matemáticas. (2011). Recuperado el 16 de Febrero de 2015, de Ángulos: http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/angulos.html

Galindo, E. (2014). *Matemática 2.* Quito: Prociecia editores.

García, M. d. (14 de Enero de 2009). Obtenido de Inmnovación y experiencias educativas: http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_14/MARIA%20DEL%20MAR_VERA_1.pdf

González, R. (5 de Marzo de 2009). *Funciones Trigonométricas*. Recuperado el 23 de Enero de 2015, de La Trigonometría: http://funcionestrigonometricas.blogspot.com/

Haniff, S. (18 de agosto de 2011). *Slideshare*. Recuperado el 17 de Febrero de 2015, de Funciones mentales superiores 2: http://es.slideshare.net/shanazhaniff/funciones-mentales-superiores-2

Hernández, V. (Agosto de 2000). *Razón y Palabra*. Recuperado el 17 de Febrero de 2015, de Lenguaje: Creación y expresión del pensamiento: http://www.razonypalabra.org.mx/anteriores/n19/19_vhernandez.html

Hiru.com. (s.f.). Recuperado el 29 de Enero de 2015, de Funciones Trigonométricas: http://www.hiru.com/matematicas/funciones-trigonometricas

J.Conde. (2002). Recuperado el 19 de Enero de 2015, de Eficacia y efectividad: una distinción útil para la práctica y la investigación clínicas: http://revistanefrologia.com/revistas/P1-E194/P1-E194-S123-A3494.pdf

Jiménez, G. J. (s.f.). *Academia.edu*. Recuperado el 28 de Enero de 2015, de Resumen Teórico.Funciones trigonométricas en la vida cotidiana: http://www.academia.edu/6123267/15_Funciones_trigonometricas_en_la_vida_cotidiana._Notafrancesco_doc

Johnson, D., & Johnson, R. (1999). *catedu.es.* Recuperado el 27 de Febrero de 2015, de El aprendizaje cooperativo en el aula: http://educativa.catedu.es/50009129/sitio/upload/Profesores._El_AC_en_el_aula._D._y_R._Johnson.pdf

Lesmire. (1994). Obtenido de Definición de taller.

Mamani, Y., Pinto, S., & Torpo., R. (marzo de 2012). Recuperado el 15 de diciembre de 2014, de http://www.google.com.ec/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=8&sqi=2&ved=0CD8QFjAH&url=http%3A%2F%2Fwww.virtual.ucb.edu.bo%2Fpluginfile.php%2F1%2Fblog%2Fattachment%2F512%2FUNIVERSIDAD%2520CATOLICA%2520BOLIVIANA%2520SAN%2520PABLO.docx&ei=cRriVJGGMYm-ggT

Maset, P. P. (s.f.). *aula libre.* Obtenido de http://www.aulalibre.es/IMG/pdf_DOC_7_Tecnicas_de_Trabajo_Cooperativo.pdf

Mattrigonometría. (24 de Noviembre de 2008). Recuperado el 21 de Enero de 2015, de Trigonometría: http://mattrigonometria.blogspot.mx/

Muños, M. (24 de septiembre de 2012). *La chakana*. Recuperado el 15 de diciembre de 2014, de http://psicologiaporlavida.blogspot.com/2012/09/la-zona-de-desarrollo-proximo.html

Parry. (1996). Obtenido de El taller pedagógico.

Pérez, V. (19 de Octubre de 2010). *La Guía*. Recuperado el 21 de Enero de 2015, de Historia de la trigonometría: http://matematica.laguia2000.com/general/historia-de-la-trigonometria

Pujolás Masét, P. (5-9 de Octubre de 2009). *mecd.gob.ec.* Recuperado el 28 de Diciembre de 2014, de Aprendizaje cooperativo y educación inclusiva:Una forma práctiva de aprender juntos alumnos diferentes: http://www.mecd.gob.es/dms-static/f4d240d3-55ad-474f-abd7-dca54643c925/2009-ponencia-jornadas-antiguas-pere-pdf.pdf

Pujolás, P. (s.f.). Recuperado el 14 de Noviembre de 2014, de Algunas Técnicas de aprendizaje cooperativo:

http://www.aulalibre.es/IMG/pdf_DOC_7_Tecnicas_de_Trabajo_Cooperativo.pdf

Sanchez, J. (26 de Abril de 2011). *Slideshare*. Recuperado el 5 de Marzo de 2015, de Método de diagnóstico: http://es.slideshare.net/jesussanval/metodo-de-diagnostico

Serrano, S. (10 de marzo de 2012). *slideshare*. Recuperado el 15 de Febreo de 2015, de Funciones mentales de Vigotsky: http://es.slideshare.net/SarahiSerrano1/funciones-mentales-de-vigotsky

Tusa, L. (9 de Febrero de 2015). Síntesis sobre el enfoque histório-cultural de Vigotsky. Loja, Loja, Ecuador.

Villalobos, J. (s.f.). Recuperado el 20 de Enero de 2015, de El Aula-Taller como actividad pedagógica para promover la participación en un aula de clase: http://www.google.com.ec/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CBwQFjAA&url=http%3A%2F%2Ferevistas.saber.ula.ve%2Findex.php%2Flegenda%2Farticle%2Fdownload%2F558%2F562&ei=D6zkVPiLCMKmggSCz4IY&usg=AFQjCNHKGRPj4ZR0GwgLZDe8uiq910H_kA&bvm=bv.85970519,d

Wiki Matemática. (18 de Mayo de 2010). Recuperado el 21 de Enero de 2015, de Origen de las funciones Trigonométricas: http://www.wikimatematica.org/index.php?title=Origen_de_las_Funciones_Trigonometricas

Withers, J. (s.f.). *Ehow*. Recuperado el 17 de Febrero de 2015, de Vigotsky y el desarrollo del lenguaje: http://www.ehowenespanol.com/vygotsky-desarrollo-del-lenguaje-sobre_108885/

Yola, M., Samantha, P., & Rina, T. (22 de febrero de 2012). Obtenido de Teoría de Vigotsky.

k. ANEXOS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN

CARRERA DE FÍSICO MATEMÁTICAS

TEMA

USO DE TÉCNICAS COOPERATIVAS PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS ESTUDIANTES DE 2ºAÑO DE BACHILLERATO GENERAL UNIFICADO DE LA UNIDAD EDUCATIVA FERNANDO SUÁREZ PALACIO DE LA CIUDAD DE LOJA. PERÍODO 2015-2016

Proyecto de tesis previa a la obtención del grado de licenciada en Ciencias de la Educación Mención: Físico Matemáticas

AUTORA

MÓNICA JANETH ARMIJOS LABANDA

1859

LOJA-ECUADOR

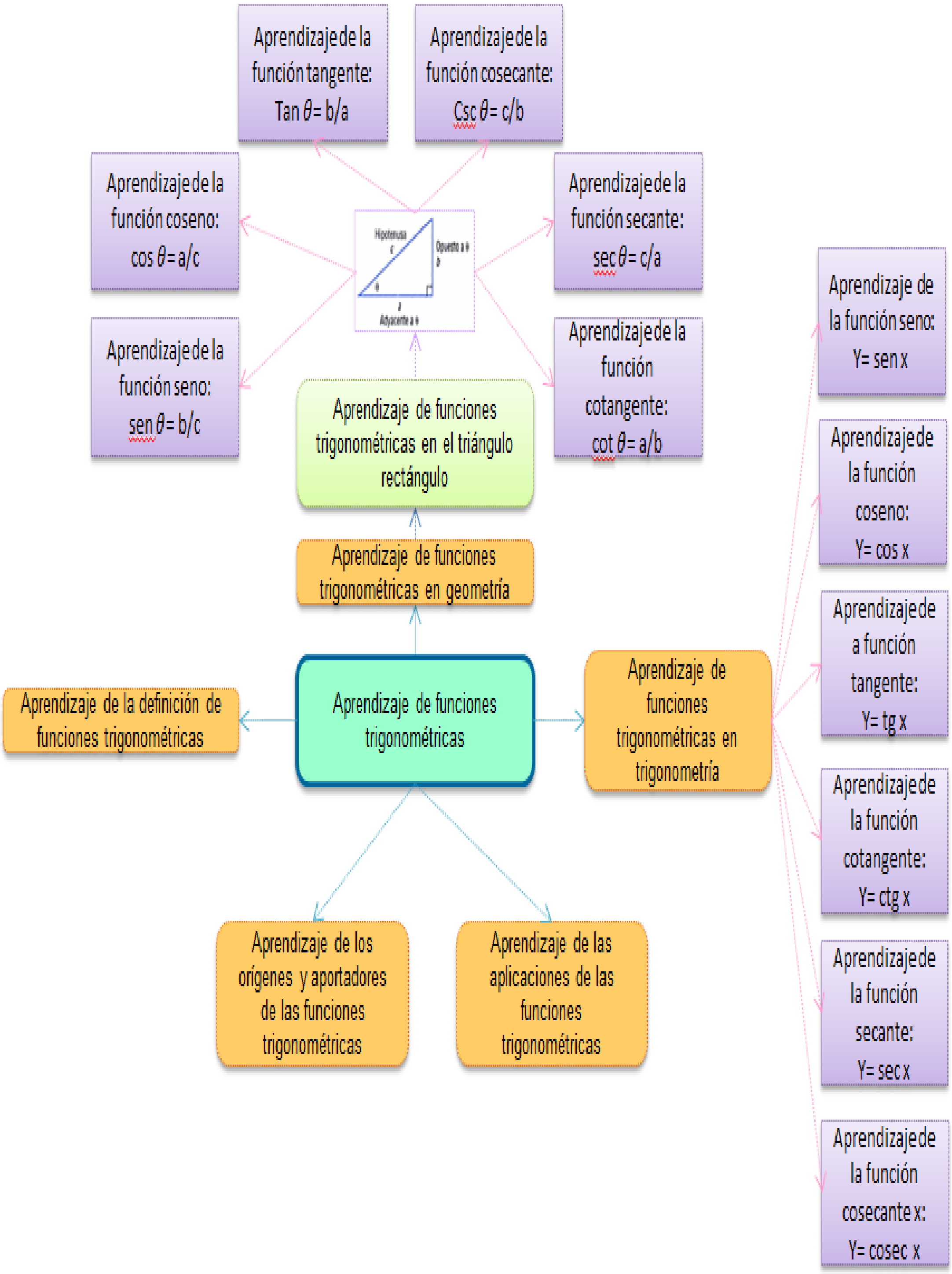
2015

a. TEMA

USO DE TÉCNICAS COOPERATIVAS PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS ESTUDIANTES DE 2ºAÑO DE BACHILLERATO GENERAL UNIFICADO DE LA UNIDAD EDUCATIVA FERNANDO SUÁREZ PALACIO DE LA CIUDAD DE LOJA. PERÍODO 2015-2016

b. PROBLEMÁTICA

- **MAPA MENTAL DEL APRENDIZAJE DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.**



DELIMITACIÓN ESPACIAL

Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio

DELIMITACIÓN TEMPORAL

Periodo 2015-2016

CAMPO DE INTERVENCIÓN

Estudiantes de 2º año de Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

- Historia y actualidad del centro educativo

La presente investigación se desarrollará en la prestigiosa Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio que se encuentra ubicada en el Barrio Carigan parroquia el Valle, Cantón y Provincia de Loja, km.10, margen derecho, vía a Cuenca, sector noroccidental de la ciudad de Loja. Fue creado mediante Acuerdo Ministerial N0 22-63, del 17 de septiembre de 1986, empezó con el Ciclo Básico.

En la actualidad este centro educativo cuenta con una estructura física de muy buena calidad, tiene un número de 23 docentes, y tienen un total de 364 estudiantes distribuidos en tres subsistemas: Educación Inicial, Educación General Básica y Bachillerato General Unificado en Ciencias.

- Situación problemática del aprendizaje de funciones

En el pre test aplicado a los estudiantes del 2° año de Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio, se encontraron un conjunto de dificultades en el aprendizaje de Funciones Trigonométricas, los mismos que se detallan a continuación:

-La décima parte de los estudiantes no tiene un conocimiento previo de trigonometría y lo puede relacionar con el concepto de funciones.

- Casi la mitad de los estudiantes encuestados no conoce cómo se representa una función trigonométrica.

- La tercera parte de estudiantes no conoce cómo se definen las funciones trigonométricas.

-La mayoría de los estudiantes no conocen las propiedades de las identidades trigonométricas.

-Casi la mitad de estudiantes no conocen como se representa las funciones trigonométricas inversas.

-La mitad de estudiantes no conocen como se deducen las funciones trigonométricas.

-Más de una tercera parte de los estudiantes no conoce cómo se puede resolver una ecuación trigonométrica.

- Problema de investigación

De la situación problemática se deriva la el siguiente problema de investigación:

¿De qué manera el uso de técnicas cooperativas mejora el aprendizaje de funciones trigonométricas en los estudiantes de 2ºaño de Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio de la ciudad de Loja, período 2015-2016?

c. JUSTIFICACIÓN

La investigación del uso de técnicas cooperativas para mejorar el aprendizaje de funciones trigonométricas en los estudiantes de 2ºaño de bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio de la ciudad de Loja, período 2015-2016. Se debe principalmente a dificultades en la definición y análisis de conceptos además de que:

a) Existen razones más que suficientes para repensar el aprendizaje de funciones trigonométricas debido a la falta de literatura especializada sobre las formas de cómo se debe aprender las funciones trigonométricas.

b) Por la necesidad de visualizar las carencias y dificultades conceptuales, procedimentales y axiológicas que obstaculizan el aprendizaje científico de funciones trigonométricas.

c) Existen investigaciones como la de Dolores (2011) en donde los resultados de la aplicación de técnicas de aprendizaje cooperativo demuestran mejoras en la interacción entre los estudiantes, un mayor grado de atención por parte de los alumnos, y una mayor asistencia a tutorías. Son beneficiosas permitiendo a los estudiantes, la motivación, la autoconcepción y la interacción social, constituyéndose en una oportunidad para disminuir la falta de interés, las falencias y dificultades que se presentan en el aprendizaje de funciones trigonométricas.

d) Por la necesidad que se suscita en la actualidad, de experimentar y valorar la aplicación de técnicas cooperativas para mejorar el aprendizaje de funciones trigonométricas en estudiantes de 2º año de Bachillerato General Unificado.

e) Por el interés de experimentar el uso de técnicas cooperativas para mejorar el aprendizaje de funciones trigonométricas en los estudiantes de 2ºaño de Bachillerato General Unificado, para fortalecer aprendizajes y mejorar el desempeño de colectivo.

f) Por la necesidad de vincular a través del problema la teoría científico-pedagógica en la solución de dificultades que los estudiantes tiene en el campo de física y matemática.

d. OBJETIVOS

Objetivo General

- Aprovechar la importancia que tienen las técnicas cooperativas para mejorar el aprendizaje de funciones trigonométricas en los estudiantes de 2ºaño de Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio de la ciudad de Loja. Período 2015-2016.

Objetivos Específicos

- Elaborar una perspectiva teórica sobre el aprendizaje de funciones trigonométricas.
- Elaborar un diagnóstico de las deficiencias de los estudiantes o de las dificultades en el aprendizaje de funciones trigonométricas.
- Diseñar un modelo alternativo de técnicas cooperativas para que los estudiantes mejoren su aprendizaje de funciones trigonométricas.
- Utilizar el taller como técnica didáctica para experimentar el modelo de técnicas cooperativas para mejorar el aprendizaje de funciones trigonométricas en los estudiantes de 2ºaño de Bachillerato General Unificado.
- Valorar el nivel de impacto del uso de técnicas cooperativas en el mejoramiento del aprendizaje de funciones trigonométricas en los estudiantes de 2ºaño de Bachillerato General Unificado.

e. MARCO TEÓRICO

1. APRENDIZAJE DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

El modelo pedagógico que se ha considerado para realizar el estudio de las funciones trigonométricas corresponde al aprendizaje sociocultural de Lev Semionóvich Vygotsky.

1.1 Aprendizaje de funciones trigonométricas desde la perspectiva de Lev Vygotsky

El aprendizaje de funciones trigonométricas se analizará desde la perspectiva del aprendizaje sociocultural de Vygotsky, haciendo relación de esta teoría con los contenidos teóricos de funciones trigonométricas que permitan propiciar aprendizajes en cada uno de los estudiantes.

Se hace necesario empezar dicho análisis teórico con el aprendizaje del origen e historia de las funciones trigonométricas para luego analizar el aprendizaje de estas funciones desde un punto de vista geométrico y trigonométrico.

- *Aprendizaje de los orígenes y aportadores de las funciones trigonométricas.*

Se considera apropiado empezar el aprendizaje de funciones trigonométricas, con el estudio del origen y aportadores de las mismas, debido a que Vygotsky, considera al alumno como un ser histórico cultural, lo que se traduce a que el alumno está en cierta etapa de la historia y depende de la cultura en la que se encuentra, considerándose pertinente hacer un análisis de todos los acontecimientos desarrollados en años anteriores que permitieron dar lugar al estudio de funciones trigonométricas.

- **Situación problema:** Elaborar un diagrama secuencial del origen e historia de las funciones trigonométricas, así como de los aportadores de las funciones trigonométricas haciendo y uso de datos históricos de las mismas.
- <u>Funciones mentales</u>
  - Las funciones mentales inferiores: “Sensación, atención reactiva, memoria espontánea, inteligencia sensomotora” (Serrano, 2012)
  - Las funciones mentales superiores: Memoria, agnosia, gnosia, praxia, apraxia, lenguaje y habla, inteligencia. (Haniff, 2011)
- <u>Habilidades psicológicas:</u> Vygotsky considera que en cualquier punto del desarrollo hay problemas que el niño está a punto de resolver. Este andamiaje puede reducirse gradualmente conforme el niño se haga cargo de la orientación.
  - Andamiaje:
    - El docente conformara grupos de aprendizaje
    - Facilitará un documento con información del origen y aportadores de las funciones trigonométricas.

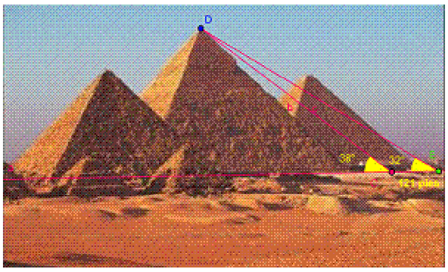
- Herramientas psicológicas:

  Las herramientas psicológicas son el puente entre las funciones mentales inferiores y las funciones mentales superiores. En este caso se va a utilizar el:

  - "Lenguaje gráfico: como las señales en calles y carreteras son un código
  - Lenguaje oral y escrito: el alfabeto es un código" (Hernández, 2000)

- La mediación: La cultura proporciona las orientaciones que estructuran el comportamiento de los individuos. La cultura nos dice que pensar y cómo pensar; nos da el conocimiento y la forma de construir ese conocimiento. En este tema se va a usar el siguiente medio para el aprendizaje:

Aprendizaje del origen de las funciones trigonométricas.



Haciendo un análisis del origen de las funciones trigonométricas, se puede dar cuenta de que "el estudio de las funciones trigonométricas se remonta a la época de Babilonia, y gran parte de los fundamentos de trigonométrica fueron desarrollados por los matemáticos de la Antigua Grecia, de la India y estudiosos musulmanes" (Wiki Matemática, 2010)

"Hace unos 4000 años en Babilonia (antiguo reino localizado en la región de Mesopotamia) y Egipto se determinó y establecieron aproximaciones de medidas de ángulos y de longitudes de los lados de los triángulos rectángulos para ampliar y desarrollar medidas tanto en la agricultura como en la construcción de pirámides. Los egipcios fijaron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. Además se utilizaba la trigonometría para el estudio de la astronomía.

Luego de Egipto y Babilonia, el estudio de la trigonometría se asentó en Grecia, donde el matemático y astrónomo Griego Hiparco de Nicea, fue uno de los principales y más importantes desarrolladores de la Trigonometría. Este matemático construyó una tabla de cuerdas para solucionar triángulos. Comenzando con un ángulo de 71° y aproximándose hasta 180° con ampliaciones de 71°, la tabla facilitaba la longitud de la cuerda limitada por los lados del ángulo central ya que fragmentaba a una circunferencia de radio r. Hasta el momento no se conoce el valor que Hiparco utilizó para r.

300 años más tarde, el astrónomo griego Tolomeo utilizó r = 60, ya que los griegos tomaron el sistema numeral (base 60) que era usado por los babilonios.

En India y Arabia la trigonometría era utilizada en la Astronomía. El primer uso de la función seno, aparece en el Shulba o Sulba Sutras escrito en India del siglo VIII al VI a. C. Se desarrolló entonces un sistema trigonométrico que estaba basado en la función seno en vez de cuerdas como los griegos. Esta nueva función, era la longitud del lado opuesto a un ángulo en un triángulo rectángulo de hipotenusa.

Las funciones trigonométricas fueron estudiadas por Hiparco de Nicea (180-125 a. C.), Aryabhata (476-550), Varahamihira, Brahmagupta, Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, Abu'l-Wafa, Omar Khayyam, Bhaskara II, Nasir al-Din Tusi, Regiomontanus (1464), Ghiyath al-Kashi y Ulugh Beg (Siglo XIV), Madhava (ca. 1400), Rheticus, y el alumno de éste, Valentin Otho. La obra de Leonhard Euler Introductio in analysin infinitorum (1748) fue la que estableció el tratamiento analítico de las funciones trigonométricas en Europa, definiéndolas como series infinitas presentadas en las llamadas <Fórmulas de Euler>.

La noción de que debería existir alguna correspondencia estándar entre la longitud de los lados de un triángulo siguió a la idea de que triángulos similares mantienen la misma proporción entre sus lados. Esto es, que para cualquier triángulo semejante, la relación entre la hipotenusa y otro de sus lados es constante. Si la hipotenusa es el doble de larga, así serán los catetos. Justamente estas proporciones son las que expresan las funciones trigonométricas. A finales del siglo X ya se habían completado la función seno y las otras cinco funciones trigonométricas.

Durante el siglo XII el astrónomo alemán Georges Joachim, introdujo el concepto moderno de las funciones trigonométricas como proporcionales en vez de longitudes de algunas determinadas líneas.

En el siglo XVIII, el físico y matemático suizo Leonhard Euler, estudió la notación actual de las funciones trigonométricas y se le atribuye el descubrimiento de la letra e como base del logaritmo natural, así como la unidad imaginaria que generalmente se denota con la letra i. Euler también popularizó el número pi (π).

Durante el siglo XX la trigonometría ha realizado muchos aportes en el estudio de los fenómenos de onda y oscilatorio, así como el comportamiento periódico, el cual se relaciona con las propiedades analíticas de las funciones trigonométricas. En astronomía se utiliza para medir distancias a estrellas próximas, para la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas de navegación satelital". (Pérez V. , 2010)

<u>Aprendizaje de los representantes modernos de las funciones trigonométricas</u>

El aprendizaje de los aportadores de las funciones trigonométricas permite orientar el aprendizaje adquiriendo referencias de los estudios y descubrimientos y aportes de personajes anteriores a nuestra época que se interesaron en estudiar las funciones trigonométricas, entre algunos aportadores podemos describir

“Francios Viette.

Francois Viette nació en Francia en 1540, fue un matemático francés, que hizo importantes contribuciones a las matemáticas en las áreas de aritmética, álgebra, la trigonometría y la geometría, falleció en París en 1603.

Algunas de sus obras son las siguientes:

El Canon mathematicus, que contiene notables contribuciones a la trigonometría. Generaliza una aproximación analítica a la trigonometría que se designa a veces por el vocablo <>. Así, aplicando sistemáticamente el álgebra a la trigonometría.

En particular, en el Canon encontramos las siguientes identidades:

$$\text{SEN } \theta=\text{SEN } (60^{o} +\theta) +\text{SEN } (60^{o}-\theta)$$

$$3 \text{ SEN}\theta-4\text{SEN}3\ \theta =\text{SEN}3\theta$$

$$\text{CSC}\theta - \text{COT}\theta=\text{TAN } (\theta/2)$$

$$\text{CSC}\theta + \text{COT}\theta=\text{COT } (\theta/2)$$

Viéte descubre de nuevo la mayor parte de las identidades elementales y obtiene fórmulas generales equivalentes a las expresiones de Sen(nx) y Cos(nx) en función de Sen x y Cos x. Consigue mediante una manipulación ingeniosa de los triángulos rectángulos y de la identidad: Obtener fórmulas para el Sen(nx) y Cos(nx) equivalentes a:

$$sen\,nx = ncos^{x+1}xsenx - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}cos^{x-3}xsen^{3}x + \cdots$$

$$cosnx = cos^{x}x - \frac{n(n-1)}{2}cos^{x-2}xsen^{2}x + \frac{n(n+1)(n-2)(n-3)}{3!}cos^{x-4}xsen^{4}x + \cdots$$

Encontramos también, entre las fórmulas que convierten un producto de funciones en una suma o una diferencia, la formula obtenida por Viéte:

Sen (A+B) +sen (A-B) =2senA (cos B)

Sen (A-B) - sen (A-B) =2senB (cos A)

Y formulas análogas para los cósenos. Viéte obtiene también el teorema del coseno aunque lo formula así:

$$\frac{2ab}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{1}{sen(90° + C)}$$

Donde a, b y c son los lados y C un ángulo.

En su obra Variorum de Rebus Mathematicis, Publicada en 1593 encontramos un enunciado equivalente al del teorema de la tangente:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}} = \frac{\frac{a+b}{2}}{\frac{a-b}{2}}$$

Donde A y B son ángulos, a y b son los lados de un triángulo. Viéte considera la trigonometría como una rama Independiente de las matemáticas y hace una exposición de la misma análoga a la de Rhaeticus, aunque perfeccionando las tablas trigonométricas de este. Aumenta las tablas de Rhaeticus para las seis funciones trigonométricas dando valores para intervalos de un segundo con una precisión de siete decimales". (Mattrigonometría, 2008)

Entre otros autores que brindaron sus aportes a las funciones trigonométricas, podemos mencionar a:

"Edmund Gunter

Nació en 1581 en Hertfordshire-Inglaterra y falleció en Londres 1626. Sus principales trabajos versaron sobre trigonometría y cálculo logarítmico. Introdujo los términos coseno y cotangente, desarrolló la aritmética logarítmica y, en astronomía, descubrió la variación anual de la declinación magnética.

Rheticus

Georg Joachim von Lauchen, nació en Feldkirch actual Austria en 1514 y falleció en Kosice unbicada en Eslovaquía en 1576 .Matemático y astrónomo austriaco. Relacionó por primera vez las funciones trigonométricas con los ángulos (en vez de con los arcos) y elaboró una de las mejores tablas trigonométricas de su época. Nombrado en 1536 profesor de astronomía en la Universidad de Wittemberg, fue uno de los primeros seguidores de la hipótesis copernicana y discípulo de N. Copérnico, a quien convenció para que publicase su famosa obra De revolutionibus orbium caelestium(1543).

Leonhard Euler

En el siglo XVIII, el matemático suizo Leonhard Euler fue quien verdaderamente fundó la trigonometría moderna, definiendo las funciones trigonométricas mediante expresiones con exponenciales de números complejos. Esto convirtió a la trigonometría en sólo una de las muchas aplicaciones de los números complejos. De hecho, Euler demostró que las propiedades básicas de la trigonometría eran simplemente producto de la aritmética de los números complejos.

Thomas Fincke

Thomas Fincke nació en Flensburg-Dinamarca (Alemania) el 6 enero 1561 y murió Copenhagen-Dinamarca el 24 abril 1656) fue un danés, matemático y físico, y un profesor de la Universidad de Copenhague por más de 60 años.

Su logro duradero se encuentra en su libro Geometría rotundi (1583), en la que introdujo los nombres modernos de las funciones trigonométricas tangente y secante." (Achury, 2011)

“Isaac Newton.

Nació en la pequeña aldea de Woolsthorpe-Lincolnshire el 25 de diciembre de 1642, y murió la madrugada del 20 de marzo en Kensington- Londres.

A mediados del siglo XVIII, el genial Isaac Newton inventó el cálculo diferencial e integral, logrando así representar muchas funciones matemáticas mediante el uso de series infinitas de potencias de la variable x.

En la rama de trigonometría, Newton encontró la serie para el sen x, y series similares para el cos x y la tg x.

Con la invención del Cálculo, las funciones trigonométricas fueron incorporadas al Análisis, donde todavía hoy desempeñan un importante papel tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas.” (Mattrigonometría, 2008)

- Zona Proximal de Desarrollo (ZPD): El ZDP es el momento del aprendizaje que es posible en unos estudiantes, dadas las condiciones educativas apropiadas el maestro y alumno (adulto y niño, tutor y pupilo, modelo y observador, experto y novato) trabajan juntos en las tareas que el estudiante no podría realizar solo, dada la dificultad del nivel” .En la zona de desarrollo próximo se utilizará grupos cooperativos de aprendizaje en donde el estudiante tendrá que resolver la siguiente situación problema: Elaborar un diagrama secuencial del origen e historia de las funciones trigonométricas, así como de los aportadores de las funciones trigonométricas haciendo y uso de datos históricos de las mismas; y es esta resolución de la situación problema el estudiante pasara de sus funciones mentales inferiores a las superiores, con la ayuda de sus compañeros y docente que le permitirán aprender el origen y los aportadores de las funciones trigonométricas.

- *Aprendizaje de la utilidad a la humanidad de las funciones trigonométricas, conceptos básicos de geometría y trigonometría.*

Lev Vigotsky indica que “el desarrollo del ser humano está íntimamente ligado con su interacción en el contexto socio histórico-cultural”, por esta razón se hace importante comprender la interacción de las funciones trigonométricas con otras ramas de la ciencia, analizando las funciones trigonométricas con su aplicación en las demás ciencias y en aspectos de la vida diaria.

- **Situación problema:** Enunciar las aplicaciones de las funciones trigonométricas en la vida diaria mencionando una relación con materiales o elementos que circundan el entorno de aprendizaje.
- Funciones mentales
  - Las funciones mentales inferiores: “Sensación, atención reactiva, memoria espontánea, inteligencia sensomotora” (Serrano, 2012)
  - Las funciones mentales superiores: Memoria, agnosia, gnosia, praxia, apraxia, lenguaje y habla, inteligencia. (Haniff, 2011)
- Habilidades psicológicas: En cualquier punto del desarrollo hay problemas que el niño está a punto de resolver, al andamiaje con el que el alumno contará es:
  - Andamiaje:
    - ◊ El docente conformara grupos cooperativos de aprendizaje
    - ◊ Facilitará un documento con información sobre las aplicaciones que existen respecto de las funciones trigonométricas y conceptos básicos que ayudarán a la comprensión de las mismas.
- Herramientas psicológicas:

  Las herramientas psicológicas son el puente entre las funciones mentales inferiores y las funciones mentales superiores. En este caso se utilizará:
    - Lenguaje oral y escrito: el alfabeto es un código” (Hernández, 2000)

- Signos: Para Vygotsky, las palabras son signos. En lugar de hacerlos partícipes de un sistema de signos primario, en el que los objetos se denominan simplemente como ellos mismos, los adultos introducen a los niños en un sistema de signos secundario, en el que las palabras representan objetos e ideas. (Withers), los signos además de palabras pueden ser las abreviaturas de las funciones trigonométricas, y las letras griegas que se usan comúnmente para referirse a ángulos. Se considera el alfabeto griego que es el más común en la trigonometría , y de manera especial en la denominación de ángulos, tenemos:

	LATEX	Render
"Minúsculas griegas	\alpha, \beta, \gamma, \delta,	$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,$
	\epsilon, \zeta, \eta, \theta,	$\epsilon,\ \zeta,\ \eta,\ \theta,$
	\iota, \kappa, \lambda, \mu,	$\iota,\ \kappa,\ \lambda,\ \mu,$
	\nu, \xi, \pi, \rho,	$\nu,\ \xi,\ \pi,\ \rho,$
	\sigma, \tau, \upsilon, \phi,	$\sigma,\ \tau,\ \upsilon,\ \phi,$
	\chi, \psi, \omega.	$\chi,\ \psi,\ \omega.$
Mayúsculas griegas	\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda,	$\Gamma,\ \Delta,\ \Theta,\ \Lambda,$
	\Xi, \Pi, \Sigma, \Upsilon,	$\Xi,\ \Pi,\ \Sigma,\ \Upsilon,$
	\Phi, \Psi, \Omega.	$\Phi,\ \Psi,\ \Omega.$
Variables griegas	\varepsilon, \vartheta, \varpi,	$\varepsilon,\ \vartheta,\ \varpi,$
	\varrho, \varsigma, \varphi.	$\varrho,\ \varsigma,\ \varphi.$"

Fuente: (Santisi, 2006)

- La mediación: La cultura proporciona las orientaciones que estructuran el comportamiento de los individuos. La cultura nos dice que pensar y cómo pensar; nos da el conocimiento y la forma de construir ese conocimiento. El siguiente texto con información de acuerdo al tema , como medio para el aprendizaje:

Aprendizaje de las aplicaciones de las funciones trigonométricas

Para evidenciar las interacciones de las funciones trigonométricas con las demás ciencias se puede decir que “se encuentran notables aplicaciones de las funciones trigonométricas en la física y en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos y como se propagan las ondas: las ondas que se producen al tirar una piedra en el agua, o al agitar una cuerda cogida por los dos extremos, o las ondas electromagnéticas de la luz, el microondas o los rayos-x, las ondas sonoras, entre otros.

- Astronomía

  Cálculo del radio de la Tierra, distancia de la Tierra a la Luna, distancia de la Tierra al Sol, predicción de eclipses, confección de calendarios, etc.
- Artillería

  ¿A qué distancia se encuentra un blanco al que se desea disparar con una catapulta o con un cañón?
- Aviación

  En una base aérea parten dos aviones a la misma velocidad formando un ángulo y siguiendo en trayectorias rectas, se puede determinar la distancia que se encuentran entre los mismos.
- Cartografía

  Elaboración del mapa de un lugar del que se conocen algunas distancias y algunos ángulos.
- Construcciones

  Cómo construir un edificio para que cumpla ciertas exigencias de orientación. En qué dirección se excava un túnel para que salga, al otro lado de la montaña, en el lugar deseado.
- Navegación

  Construcción de cartas marinas en las que se detalle la ubicación de escollos, arrecifes, etc.” (González, 2009)
- “Aplicaciones CAD y Dibujo

  Las curvas, elipse, círculos utilizan en su formulación funciones trigonométricas.

- Electricidad

  Muchas señales de aparatos eléctricos usan funciones trigonométricas para ser modelas, las series de Fourier permiten casi definir cualquier señal como suma ponderada de senos y cosenos.” (Jiménez)

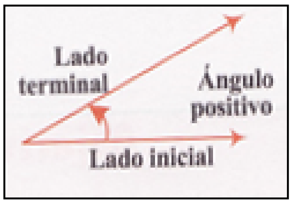
Aprendizaje de conceptos básicos de geometría y trigonometría

- Aprendizaje de ángulos.

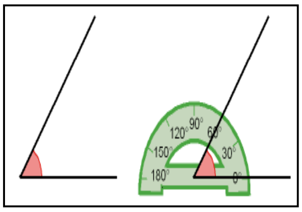
Es importante que el alumno tenga el interés para pueda reconocer y graficar un ángulo, si esto no es posible puede valerse de la comunicación con otros compañeros, o hacer uso de conocimientos desarrollados anteriormente que le sirvan para entender dicho conocimiento.

- Aprendizaje de la definición de ángulo

Los ángulos se miden por la rotación del lado inicial sobre el otro lado final, si la rotación es en sentido anti horario, el ángulo es positivo, si la rotación es en sentido horario, el ángulo es negativo. (Galindo, Matemática 2, 2012)



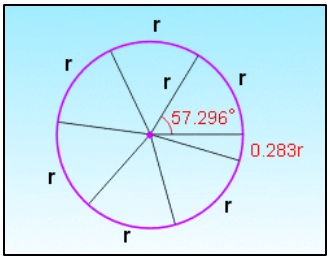
- Aprendizaje para medir grados.



La unidad de medida de los ángulos son los grados, la medida de una vuelta completa a la circunferencia es de 360°, entonces 180° es igual a media vuelta y 90 es un cuarto de vuelta.Un grado se subdivide en 60 minutos y un minuto en sesenta segundos. (Galindo, Matemática 2, 2012)

- Aprendizaje para medir radianes.

Un radián, en este sentido, es el ángulo central que se encuentra en una circunferencia, con un arco que tiene la misma longitud que el radio.

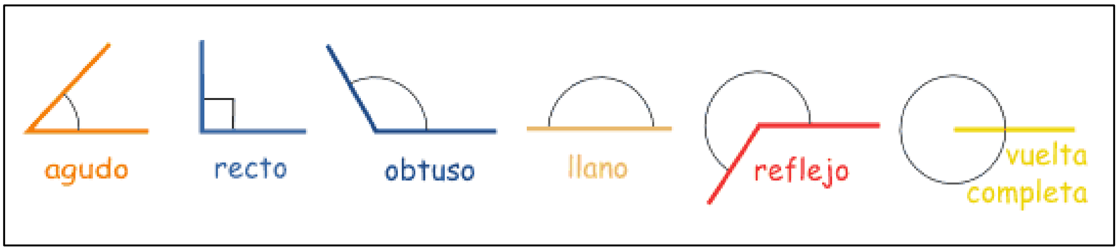


Dicho de otro modo: un radián es equivalente a 180º/π (pi). Esta unidad, que puede identificarse a través del símbolo rad, facilita la realización de diversos cálculos, que pueden expresarse a través de divisores o múltiplos de π.

Lo que hace el radián es indicar una longitud de circunferencia que resulta idéntica al radio. En una circunferencia completa, se encuentran dos π radianes. (MarcadorDePosición3)

- Aprendizaje de las Clases de ángulos.

Tipos de ángulos	**Descripción**
Ángulo agudo	Un ángulo de menos de 90º
Ángulo recto	Un ángulo de 90º
Ángulo obtuso	Un ángulo de más de 90º pero menos de 180º
Ángulo llano	Un ángulo de 180º
Ángulo reflejo o cóncavo	Un ángulo de más de 180º



Fuente (Disfruta las matemáticas, 2011)

- Zona Proximal de Desarrollo (ZPD): Es el momento del aprendizaje que es posible en los estudiantes mientras se relacionan con sus compañeros realizando un trabajo conjunto en los grupos cooperativos y también con el docente para que el estudiante pueda resolver la siguiente situación problema: Enunciar las aplicaciones de las funciones trigonométricas en la vida diaria o con otras ciencias mencionando una relación con materiales o elementos que circundan el entorno de aprendizaje, esta resolución de la situación problema el estudiante , le permitirá aprender mediante la mediación, andamiaje y las herramientas psicológicas necesarias para que se produzca el aprendizaje en cada estudiante.

- *Aprendizaje dela definición de funciones trigonométricas y su definición en el triángulo rectángulo.*

El aprendizaje de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo se lo hace desde un punto geométrico, se lo hace primeramente desde esta perspectiva por que por lo general el estudiante tiene conocimientos sobre geometría y algunas funciones trigonométricas básicas en el triángulo rectángulo, antes de entrar a tratarlas desde un punto de vista trigonométrico.

- **Situación problema:** Resolver problemas de aplicación haciendo uso de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo
- Funciones mentales
  - Las funciones mentales inferiores: "Sensación, atención reactiva, memoria espontánea, inteligencia sensomotora" (Serrano, 2012)
  - Las funciones mentales superiores: Memoria, agnosia, gnosia, praxia, apraxia, lenguaje y habla, inteligencia. (Haniff, 2011)
- Habilidades psicológicas: En cualquier punto del desarrollo hay problemas que el niño está a punto de resolver, al andamiaje con el que el alumno contará es:
  - Andamiaje:
    - ◊ El docente conformara grupos cooperativos de aprendizaje
    - ◊ Facilitará un documento con información sobre las funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo.
    - ◊ Resolver una plantilla de ejercicios de aplicación sobre las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo
    - ◊ El docente presentará un video sobre las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo.
- Herramientas psicológicas:
  Las herramientas psicológicas son el puente entre las funciones mentales inferiores y las funciones mentales superiores. En este caso se utilizará:
    - Lenguaje oral y escrito: el alfabeto es un código" (Hernández, 2000)

- <u>Signos</u>: Para Vygotsky, las palabras son signos. En lugar de hacerlos partícipes de un sistema de signos primario, en el que los objetos se denominan simplemente como ellos mismos, los adultos introducen a los niños en un sistema de signos secundario, en el que las palabras representan objetos e ideas. (Withers), los signos además de palabras pueden ser las abreviaturas de las funciones trigonométricas, y las letras griegas que se usan comúnmente para referirse a ángulos. Se considera el alfabeto griego que es el más común en la trigonometría , y de manera especial en la denominación de ángulos, tenemos:

LaTeX		**Resultado**		**LaTeX**		**Resultado**
\alfa		α		\exists		$\exists$
\beta		β		\infty		∞
\gamma		γ		\forall		$\forall$
\delta		δ		\emptyset		$\emptyset$
\epsilon		ϵ		\pm		$\pm$
\pi		π		\cup		$\cup$
\sigma		σ		\cap		$\cap$
\omega		ω		\leq		$\leq$
\theta		θ		\geq		$\geq$
\lambda		λ		\neq		$\neq$
\mu		μ		\in		$\in$
\Omega		Ω		\notin		$\notin$
\rho		ρ		\subset		$\subset$

Fuente (López)

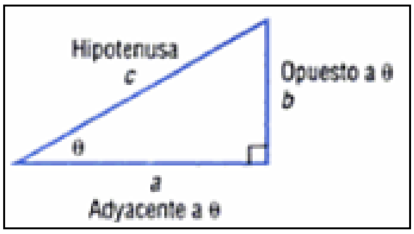
★ <u>La mediación:</u> La cultura proporciona las orientaciones que estructuran el comportamiento de los individuos. La cultura nos dice que pensar y cómo pensar; nos da el conocimiento y la forma de construir ese conocimiento. El siguiente texto con información de acuerdo al tema , como medio para el aprendizaje:

<u>Aprendizaje de la definición de las funciones trigonométricas</u>

“Una función trigonométrica, también llamada circular, es aquella que se define por la aplicación de una razón trigonométrica a los distintos valores de la variable independiente, que ha de estar expresada en radianes. Existen seis clases de funciones trigonométricas: seno y su inversa, la cosecante; coseno y su inversa, la secante; y tangente y su inversa, la cotangente. Para cada una de ellas pueden también definirse funciones circulares inversas: arco seno, arco coseno, etcétera.” (MarcadorDePosición4)

<u>Aprendizaje de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo</u>

“Un triángulo que tiene un ángulo recto se denomina triángulo rectángulo. Como la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo rectángulo. Como la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180°, los otros dos lados son agudos.



Como las razones dependen sólo del ángulo θ y no del triángulo en sí, seda a cada razón un nombre que involucra a θ:

Nombre de la función	Abreviatura	Valor
Seno de θ	Sen θ	b/c
Coseno de θ	Cos θ	a/c
Tangente de θ	Tan θ	b/a
Cosecante de θ	Csc θ	c/b
Secante de θ	Sec θ	c/a
Cotangente de θ	Cot θ	a/b

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados es decir:

$c^2 = a^2+b^2$

- Plantilla de ejercicios

4. Un niño eleva su cometa, la cual está a 20m de altura y donde el niño no puede soltarle más la cuerda. El ángulo que la cuerda hace con el piso es de 30º. ¿Cuánta piola tenía el niño?
5. Un observador está a 50 m de una iglesia. El ángulo de elevación a la punta de la torre de la iglesia es de 25º y el observador mide 1,70 cm ¿Cuál es la altura de la iglesia?
6. Un salvavidas está en su torre de observación a 20m de altura, una persona implora su ayuda con un ángulo de depresión de 35º.¿A qué distancia de la base de la torre de observación está la persona que solicitó ayuda?”. (Galindo, 2012)

- Zona Proximal de Desarrollo (ZPD): Es el momento del aprendizaje que es posible en los estudiantes mientras se relacionan con sus compañeros realizando un trabajo conjunto en los grupos cooperativos y también con el docente para que el estudiante pueda resolver la siguiente situación problema: Resolver problemas de aplicación haciendo uso de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo le permite relacionar el aprendizaje con el contexto social, además de que esta resolución le permitirá tener una idea de lo que son las funciones trigonométricas en la trigonometría.

Aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas y el círculo unitario

El aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas en el círculo unitario es una introducción al estudio de estas funciones en trigonometría, de igual manera se la analizará desde la teoría de aprendizaje socio -cultural de Vigotsky.

- **Situación problema:** Definir y enunciar las funciones trigonométricas en el círculo unitario.
- Funciones mentales
  - Las funciones mentales inferiores: “Sensación, atención reactiva, memoria espontánea, inteligencia sensomotora” (Serrano, 2012)
  - Las funciones mentales superiores: Memoria, agnosia, gnosia, praxia, apraxia, lenguaje y habla, inteligencia. (Haniff, 2011)
- Habilidades psicológicas: En cualquier punto del desarrollo hay problemas que el niño está a punto de resolver, al andamiaje con el que el alumno contará es:
  - Andamiaje:
    - ◊ El docente conformara grupos cooperativos de aprendizaje
    - ◊ Facilitará un documento con información sobre la definición de funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas en el círculo unitario.
- Herramientas psicológicas:

  Las herramientas psicológicas son el puente entre las funciones mentales inferiores y las funciones mentales superiores. En este caso se utilizará:
    - Lenguaje oral y escrito: el alfabeto es un código” (Hernández, 2000)
    - Signos: Para Vygotsky, las palabras son signos. En lugar de hacerlos partícipes de un sistema de signos primario, en el que los objetos se denominan simplemente como ellos mismos, los adultos introducen a los niños en un sistema de signos secundario, en el que las palabras representan objetos e ideas. (Withers), los signos además de palabras pueden ser las abreviaturas de las funciones trigonométricas, y las letras griegas que se usan comúnmente para referirse a ángulos. Se considera el alfabeto griego que es el más común en la trigonometría , y de manera especial en la denominación de ángulos, tenemos:

LaTeX		Resultado		LaTeX		Resultado
\alfa		α		\exists		$\exists$
\beta		β		\infty		∞
\gamma		γ		\forall		$\forall$
\delta		δ		\emptyset		$\emptyset$
\epsilon		ϵ		\pm		$\pm$
\pi		π		\cup		$\cup$
\sigma		σ		\cap		$\cap$
\omega		ω		\leq		$\leq$
\theta		θ		\geq		$\geq$
\lambda		λ		\neq		$\neq$
\mu		μ		\in		$\in$
\Omega		Ω		\notin		$\notin$
\rho		ρ		\subset		$\subset$

Fuente (López)

★ La mediación: La cultura proporciona las orientaciones que estructuran el comportamiento de los individuos. La cultura nos dice que pensar y cómo pensar; nos da el conocimiento y la forma de construir ese conocimiento. El siguiente texto con información de acuerdo al tema , como medio para el aprendizaje:

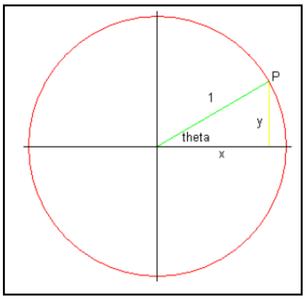
Aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas

Si θ es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, entonces hay seis funciones trigonométricas de θ, cada una de las cuales es la razón de dos de los lados del mencionado triángulo.

Si θ es un ángulo agudo del triángulo rectángulo, entonces

Función	Definición
Seno de θ	$Sen\ \theta = \dfrac{lado\ opuesto\ de\ \theta}{hipotenusa}$
Coseno de θ	$Cos\ \theta = \dfrac{lado\ adyacente\ de\ \theta}{hipotenusa}$
Tangente de θ	$Tan\ \theta = \dfrac{lado\ opuesto\ de\ \theta}{Lado\ adyacente\ de\ \theta}$
Cosecante de θ	$Csc\ \theta = \dfrac{hipotenusa}{lado\ opuesto\ de\ \theta}$
Secante de θ	$Sec\ \theta = \dfrac{hipotenusa}{lado\ adyacente\ \ de\ \theta}$
Cotangente de θ	$Cot\ \ \theta = \dfrac{lado\ adyacente\ de\ \theta}{hipotenusa}$

Aprendizaje de las Funciones trigonométricas en el círculo unitario



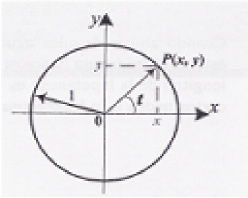
“El círculo unitario también llamado círculo trigonométrico, es un círculo de radio 1 y de centro en el origen” (Galindo, 2012)

Tomemos como vértice de cualquier ángulo el origen de coordenadas, es decir, el punto 0(0, 0). Consideramos como lado inicial el semieje positivo de abscisas, es decir, como punto de referencia para cualquier ángulo φ. 9

Sea dado un ángulo cualquiera φ es obvio que el lado final 0A, que describe este ángulo φ cortará si falta el círculo unitario en cierto punto P(a; b). No es menos evidente que para cualquier punto Q(c; d) del círculo unitario existe obligatoriamente un ángulo θ tal, que el lado final 0A, que describe dicho ángulo θ corte el círculo unitario precisamente en este punto Q(c; d). Queda claro,

Ante todo que: el lado final 0A, que describe el ángulo nulo, corta el círculo unitario en el punto (1, 0); el lado final 0A que describe el ángulo π corta el círculo unitario en el punto (-1, 0); el lado final 0A que describe el ángulo $\pi/2$ interseca el círculo unitario en el punto (0, 1); el lado final 0A que describe el ángulo $\pi/2$ interseca el círculo unitario en el punto (0, -1).

Si el punto (x,y) está a t unidades del punto (1,0) sobre el círculo unidad, entonces:

	sen t= y	csc t = 1/y (y≠0)
	cos t= x	sec t = 1/x (x≠0)
	tan t= y/x (x≠0)	cot t= x/y (y≠0)

Fuente (Galindo, 2012)

- <u>Zona Proximal de Desarrollo</u> (ZPD): Es el momento del aprendizaje que es posible en los estudiantes mientras se relacionan con sus compañeros realizando un trabajo conjunto en los grupos cooperativos y también con el docente para que el estudiante pueda resolver la siguiente situación problema: Definir y enunciar las funciones trigonométricas en el círculo unitario, aprendizaje que le permite al estudiante introducirse en el conocimiento de las funciones trigonométricas dentro de la trigonometría, considerando que el alumno ya tiene una historia leve de las funciones trigonométricas en geometría, por lo tanto se le facilita al estudiante la comprensión de las funciones trigonométricas.

    - *Aprendizaje de las características de las funciones trigonométricas Seno, Coseno y Tangente*

- **Situación problema:** Definir y comprender las características de las funciones trigonométricas Seno, Coseno y Tangente.
- <u>Funciones mentales</u>
    - Las funciones mentales inferiores: “Sensación, atención reactiva, memoria espontánea, inteligencia sensomotora” (Serrano, 2012)
    - Las funciones mentales superiores: Memoria, agnosia, gnosia, praxia, apraxia, lenguaje y habla, inteligencia. (Haniff, 2011)
- <u>Habilidades psicológicas:</u> En cualquier punto del desarrollo hay problemas que el niño está a punto de resolver, al andamiaje con el que el alumno contará es:

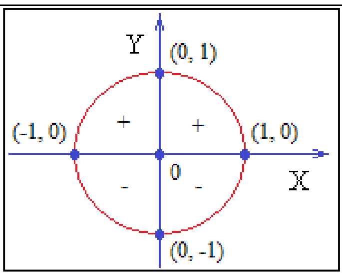
- Andamiaje:
  - ◊ El docente conformara grupos cooperativos de aprendizaje
  - ◊ Facilitará un documento con información sobre las características de las funciones trigonométricas.

★ <u>Herramientas psicológicas</u>:

Las herramientas psicológicas son el puente entre las funciones mentales inferiores y las funciones mentales superiores. En este caso se utilizará:

- <u>Lenguaje oral y escrito</u>: el alfabeto es un código" (Hernández, 2000)
- <u>Signos</u>: Para Vygotsky, las palabras son signos. Además de palabras pueden ser las abreviaturas de las funciones trigonométricas, y las letras griegas que se usan comúnmente para referirse a ángulos. Se considera los signos de las funciones trigonométricas según cada cuadrante del plano cartesiano.

	Cuadrante			
Función	I	II	III	IV
Sen θ	+	+	-	-
Cos θ	+	-	-	+
Tan θ	+	-	+	-

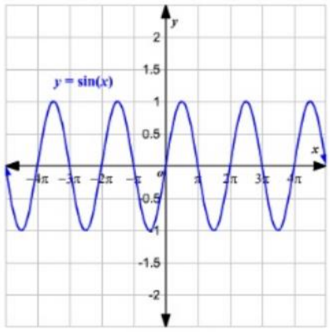


Fuente (Galindo, 2012)

★ <u>La mediación:</u> La cultura proporciona las orientaciones que estructuran el comportamiento de los individuos. La cultura nos dice que pensar y cómo pensar; nos da el conocimiento y la forma de construir ese conocimiento. El siguiente texto con información de acuerdo al tema , como medio para el aprendizaje:

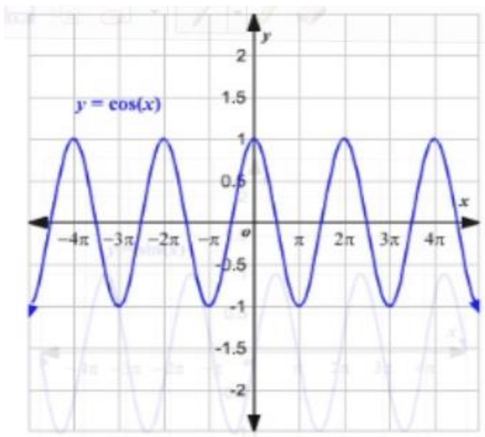
Aprendizaje de las características de las funciones trigonométricas seno:, coseno y tangente: Dominio, recorrido, ceros, monotonía, simetría y periodicidad

- **"Aprendizaje de las características de la función Seno**



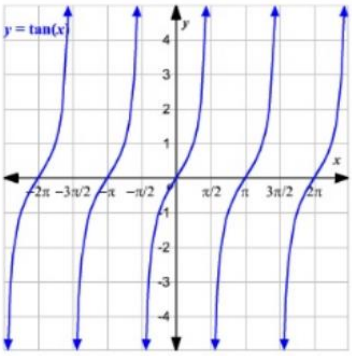
Dominio: IR
Recorrido: { y ∈ IR | -1 ≤ y ≤ 1 }
Ceros: la función se anula para x=0, x=$\pm\pi$, x= $\pm 2\pi$, x= $\pm 3\pi$ y y en general para x= kπ, con k∈ Z
Monotonía: El gráfico es creciente en los intervalos [0, $\pi/2$[y]3π/2 , 2 π] y decreciente en el intervalo]π/2, 3 π/2]
Simetría: Para a función sen x se cumple sen(-x)=-sen(-x), luego es una función impar por consiguiente, es simétrica respecto al origen de coordenadas cartesianas.
Periodicidad: La función seno cumple que sen x=sen(x+2k π) con k ∈ Z, luego es una función de periodo 2 π.

- **Aprendizaje de las características de la función coseno**



Dominio: IR
Recorrido: { y∈ IR | -1 ≤ y ≤ 1 }
Ceros: la función se anula para x=$\pm\pi/2$, x=$\pm$ $3\pi/2$, x= $\pm5\,\pi/2\ldots$ y en general para x=(2k+1) $\pi/2$, con k ∈ Z.
Monotonía: El gráfico es decreciente en los intervalos [0, π] y creciente en] π, 2].
Simetría: La función coseno se cumple que cos x=cos (-x), luego esta función es par por lo tanto es simétrica con respecto al eje y.
Periodicidad: La función coseno se cumple que cos x=cos (x+2k π) con k ∈ Z con un periodo de 2 π.

- **Aprendizaje de las características de la Función Tangente**



Dominio: { x∈R | x ≠ π/2 (2k + 1) }
Recorrido: *IR*
Ceros: la función se anula para x=0, x=$\pm$ π, x= $\pm2\,\pi$ y en general para x= k π, con k∈ Z
Monotonía: El gráfico es creciente en]$-\pi/2$, π/2[
Simetría: Para a función tangente cumple tan(-x)=-tan(x),es una función impar *Periodicidad:* La función seno cumple que tanx=tan(x+ kπ) con k ∈ Z, luego es una función de periodo π.
Asíntotas: La función no está definida para los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$; siendo las asíntotas las rectas x= (2k+1) $\pi/2$ con k ∈ Z.

(Galindo, 2012)

- <u>Zona Proximal de Desarrollo</u> (ZPD): Es el momento del aprendizaje que es posible en los estudiantes mientras se relacionan con sus compañeros realizando un trabajo conjunto en los grupos cooperativos y también con el docente para que el estudiante pueda resolver la siguiente situación problema: Definir y comprender las características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, la resolución de esta situación problema le permite al estudiante le permite al estudiante conocer las características de las funciones trigonométricas dentro de la trigonometría, por medio del lenguaje y las relaciones dentro del grupo de aprendizaje cooperativo, desarrollando sus funciones mentales superiores.

- *Aprendizaje de funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante.*

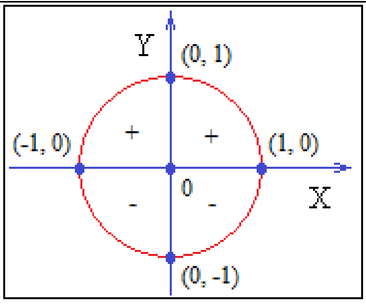
Al aprendizaje de las funciones trigonométricas inversas, es muy superficial, puesto que es similar al estudio de las funciones trigonométricas directas.

- **Situación problema:** Enunciar e identificar las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante.
- Funciones mentales
  - Las funciones mentales inferiores: "Sensación, atención reactiva, memoria espontánea, inteligencia sensomotora" (Serrano, 2012)
  - Las funciones mentales superiores: Memoria, agnosia, gnosia, praxia, apraxia, lenguaje y habla, inteligencia. (Haniff, 2011)
- Habilidades psicológicas: En cualquier punto del desarrollo hay problemas que el niño está a punto de resolver, al andamiaje con el que el alumno contará es:
  - Andamiaje:
    - El docente conformara grupos cooperativos de aprendizaje
    - Facilitará un documento con información de funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante.
- Herramientas psicológicas:

  Las herramientas psicológicas son el puente entre las funciones mentales inferiores y las funciones mentales superiores. En este caso se utilizará:

- [ ] <u>Lenguaje oral y escrito</u>: el alfabeto es un código” (Hernández, 2000)
- [ ] <u>Signos</u>: Para Vygotsky, las palabras son signos. Los signos también pueden ser las abreviaturas de las funciones trigonométricas, y las letras griegas que se usan comúnmente para referirse a ángulos. Se considera el alfabeto griego que es el más común en la trigonometría , y de manera especial en la denominación de ángulos, tenemos:

	Cuadrante			
Función	I	II	III	IV
Csc θ	+	-	+	-
Sec θ	+	-	-	+
Cot θ	+	+	-	-



Fuente (Galindo, 2012)

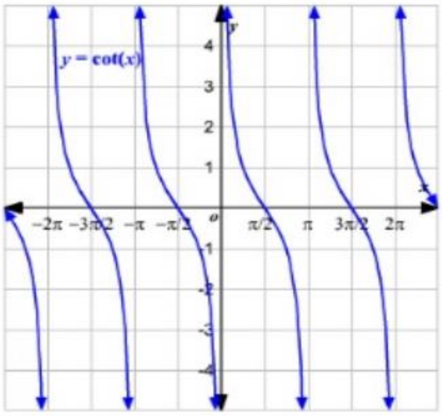
LaTeX		Resultado	
\alfa		α	
\beta		β	
\pi		π	
\sigma		σ	
\omega		ω	
\theta		θ	

Fuente (López)

- ★ <u>La mediación:</u> La cultura proporciona las orientaciones que estructuran el comportamiento de los individuos. La cultura nos dice que pensar y cómo pensar; nos da el conocimiento y la forma de construir ese conocimiento. El siguiente texto con información de acuerdo al tema , como medio para el aprendizaje:

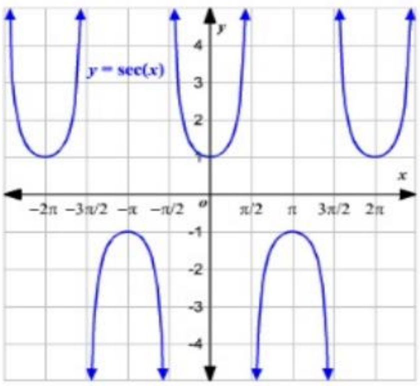
Aprendizaje de las funciones trigonométricas inversas.

★ Aprendizaje de las características de la Función cotangente



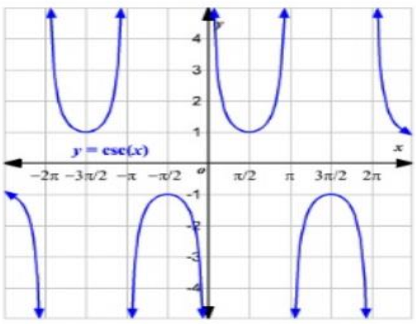
Dominio: { x ∈ R | x ≠k·π }	
Recorrido: *IR*	
Ceros: la función se anula para x=$\pm\pi/2$, x=$\pm$ $3\pi/2$, x= ±5 $\pi/2\ldots$ y en general para x=(2k+1) $\pi/2$, con k ∈ Z.	
Simetría: Para a función tangente cumple cot(-x)=-cot(x),es una función impar	
Periodicidad: La función seno cumple que cot cot x= cot (x+ kπ) con k ∈ Z, luego es una función de periodo π.	
Asíntotas: La función no está definida para los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$; siendo las asíntotas las rectas x= (2k+1) $\pi/2$ con k ∈ Z.	

★ Aprendizaje de las características de la Función secante



Dominio: { x∈R | x ≠ π/2 (2k + 1) }	
Recorrido: { y∈R | y ≤ -1 ó y ≥ 1 }	
Ceros: la función no tiene ceros.	
Monotonía: El gráfico es decreciente en los intervalos [$-\pi$, -$\pi/2$[∪]-$\pi/2$,0] y creciente en]0, $\pi/2$[∪]$\pi/2$,π[.	
Simetría: Cumple sec x = sec(-x), siendo una función par.	
Periodicidad: La función secante es una función de periodo 2 π.	
Asíntota: Las asíntotas son las rectas x= (2k+1) π/2, con k ∈ Z.	

★ **Aprendizaje de las características de la función cosecante**



Dominio: { x∈R | x ≠k·π }	
Recorrido: { y∈R | y ≤ -1 ó y ≥ 1 }	
Ceros: la función no tiene ceros	
Monotonía: El gráfico es decreciente en los intervalos [-$\pi/2$,0[∪]0,$\pi/2$[,0] y creciente en [$\pi/2$, π[∪]π,3$\pi/2$].	
Simetría: Es una función impar	
Periodicidad: Periodicidad: Es una función de periodo 2 π.	
Asíntotas: Asíntotas: Las asíntotas son las rectas x= kπ con k ∈ Z".	

(Galindo, 2012)

- Zona Proximal de Desarrollo (ZPD): Es el momento del aprendizaje que es posible en los estudiantes mientras se relacionan con sus compañeros realizando un trabajo conjunto en los grupos cooperativos y también con el docente para que el estudiante pueda resolver la siguiente situación problema: Enunciar e identificar las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante aprendizaje que le permite mejorar la historia de su aprendizaje por lo tanto se le facilita al estudiante la comprensión de las funciones trigonométricas inversas.

1.2 Evaluación del aprendizaje según Vigotsky

- *Evaluación dinámica:*

La evaluación dinámica es el tipo de evaluación propuesta para evaluar aprendizajes dentro de la perspectiva de aprendizaje socio-cultural de Vigotsky. “El gran maestro Vigotsky estableció líneas claras sobre la evaluación y a los ojos de los especialistas contemporáneos debe ser algo central en los procesos educativos para el Siglo XXI.

Algunos teóricos, como Newman, Griffin y Cole, inspirados en Vigotsky, han propuesto una evaluación dinámica, la cual debe girar en ciertos aspectos, tales como:

La evaluación educativa es una actividad de reflexión sobre la acción, basada en procedimientos sistemáticos de recolección, análisis, interpretación, valoración, registro y comunicación de información.

La evaluación implica instrumentos que no se circunscriben a conocer solamente lo que sabe el educando, sino especialmente cómo aprende, cuál es la calidad de esos aprendizajes, de dónde proviene su motivación, cuáles son sus intereses, sus aptitudes, sus actitudes, sus necesidades, su autoestima.

Los sujetos de la evaluación serán los educandos y los educadores (como individuos y como colectivo), la comunidad educativa y los funcionarios del sistema educativo.

La evaluación no puede desligarse de una cuestión de valores (solidaridad, justicia, compromiso con los excluidos”.

Características de la Evaluación Dinámica

- Flexible
- Integral
- Continua
- Colectiva
- Cooperativa
- Personal
- Natural (evitar la presión, el estrés; que sea algo cotidiano, habitual…).

¿Cómo evaluar?

Como un proceso y construcción edificante de las personas, es necesario elaborar registros completos que ayuden a entender qué le está sucediendo a cada educando, que incluyan los apartados suficientes con bastantes datos que permitan conocer en profundidad la complejidad de los procesos que cada educando realiza.

A través de la evaluación deberíamos poder diferenciar entre:

- Lo que las y los educandos saben, lo que saben hacer y cómo son.
- El proceso seguido: desafíos, aciertos, dificultades.
- La valoración según sus propias posibilidades.
- La valoración según los objetivos o competencias establecidos para el grado o nivel.
- Las medidas que hay que adoptar y las recomendaciones pertinentes.

Auto-evaluación

En la evaluación es importante considerar la opinión y la reflexión, dentro del contexto ético, de cada involucrado del proceso educativo para mejorar la práctica profesional, construir nuevas visiones, valorar proyectos establecidos, renovar contenidos y metodologías, entre otras. Para todos los involucrados es imperativo desarrollar la evaluación propia, de nuestros esfuerzos, omisiones y compromisos para continuar edificando la Educación.

Un docente realmente interesado en su práctica, responsable de la educación de sus educandos y apegado con las necesidades sociales, sería un dinámico evaluador, en especial de su propia práctica. En esta línea, un educador contemporáneo aplicaría una auto-evaluación y reflexionaría éticamente sobre los resultados, con el horizonte claro en el mejoramiento cualitativo de la educación. La auto-evaluación debe considerar aspectos como:

- La atención que presta al desarrollo integral de cada educando.
- Las expectativas (positivas o negativas) que tiene sobre cada aprendiente y la manera en que las mismas condicionan su actitud.
- La calidad de las relaciones interpersonales que sostiene con cada educando, con sus colegas y con la comunidad educativa.
- El crecimiento de sus propias potencialidades para comprender, cuestionar, sentir, acompañar, hacer, comunicar, jugar…
- La interpretación que hace de las condicionantes del entorno que inciden en la vida y aprendizaje del educando proyectando acciones que lo beneficien.
- Los recursos y soportes didácticos que utiliza, observando cómo facilitan o no las elaboraciones de los educandos.
- El grado de interés y motivación que sus actividades provocan en las y los aprendientes.
- Las innovaciones implementadas y sus efectos.
- La utilidad y relevancia de los contenidos que selecciona, tanto de los conocimientos, como de las capacidades y las actitudes.
- El ambiente socio-afectivo o clima que se mantiene en el aula.
- El aprovechamiento del horario de trabajo.
- La atención prestada a las diferencias individuales: ritmos, estilos, inteligencias, intereses…
- El nivel de autonomía que tienen las y los educandos, y las estrategias que implementa para elevarlo.
- Los procedimientos que utiliza para planificar y evaluar el aprendizaje." (Corella, 2012)

“Este tipo de evaluación tan original constituye una de las propuestas más interesantes de Vigotsky y se realiza mediante la interacción continua entre examinador-examinado, precisando ciertas >>ayudas<<, (previamente analizadas y que son de distintos niveles) según el grado de desempeño de cada examinado etc. Con la intención de con la intención de determinar el desempeño real y potencial del sujeto. Por tanto, el fin básico de la evaluación dinámica consiste en diagnosticar el potencial de aprendizaje o bien la amplitud de las zonas de los niños. De igual manera, la evaluación dinámica no sólo serviría para determinar el nivel potencial de aprendizaje, sino también las líneas de acción por donde deberían verse encaminadas las prácticas educativas que jalonasen el desarrollo cognitivo (Brown y Reeve, 1987; Brown y Ferrara, 1985)” (Pérez H. , 2011)

1.3 Tecnología

En el aprendizaje de las funciones trigonométricas se hace necesario el uso de TIC, como medios que faciliten el trabajo del alumno y a la vez su aprendizaje. Esto también permite al profesor mostrar al alumno la dualidad entre la exactitud que se consigue con las herramientas TIC y las aproximaciones con las representaciones hechas en papel.

- *La calculadora*

Es calculadora es una herramienta de vital importancia, porque facilita las operaciones y cálculos con las distintas funciones trigonométricas, es recomendable a la hora de abordar su estudio, pues esta ahorrara tiempo y procedimientos a los estudiantes.

- *El ordenador.*

Lo que en primer lugar se pide del software y de las herramientas de cómputo es que sean instrumentos pedagógicos. Deben permitir aprender mejor el contenido y los valores de las matemáticas que han sido definidos sin tomar en cuenta estas herramientas.

Por lo tanto, las herramientas usadas con el ordenador para el estudio de las funciones trigonométricas deberán ser simples en su utilización. Por ello es recomendable el uso de proyectores, bases de datos u otros métodos parecidos, en los que el uso del software sea relativamente simple.

1.4 Resultados de aprendizaje

- Comprender conceptos científicos

El alumno podrá comprender y explicar los conocimientos científicos, será capaz de definir que es una:

- Función trigonométrica
- Relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo
- Funciones trigonométricas en él círculo unitario
- Características de las funciones trigonométricas
- Funciones trigonométricas inversas

- Aplicar conocimientos sobre relaciones y funciones trigonométricas en problemas de la realidad

El estudiante, será capaz de aplicar y resolver problemas matemáticos mediante la aplicación de razones y funciones trigonométricas.

- Comprender las funciones trigonométricas

El alumno podrá explicar y comprender la definición de las funciones trigonométricas, así como las características particulares de cada una e interpretar su correspondiente función inversa.

2. DIAGNÓSTICO DE APRENDIZAJE DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

El presente diagnóstico se basa en indicadores de acuerdo al “Enfoque histórico cultural de Vigotsky.

- **Criterio:**

El docente conoce que su estudiante que está abordando las funciones trigonométricas, tiene dos tipos de funciones mentales: las inferiores y las superiores.

Indicadores:

- Las funciones inferiores nacen con la persona
- Son las funciones naturales
- Están determinadas genéticamente
- El comportamiento derivado de las Funciones Inferiores es limitado
- Está condicionado por lo que podemos hacer
- Las funciones mentales superiores se adquieren
- Las funciones mentales superiores (FMS) se desarrollan a través de la interacción social
- Las FMS están determinadas por una sociedad específica y cultura concreta en la que viven profesores y alumnos
- Las funciones mentales superiores están mediadas culturalmente
- El comportamiento derivado de las funciones mentales superiores está abierta a mayores posibilidades
- El conocimiento es resultado de la interacción social
- En la interacción con los demás adquirimos conciencia de nosotros
- En la interacción con los demás aprendemos el uso de los símbolos que, a su vez, nos permiten pensar en formas cada vez más complejas
- A mayor interacción social mayor conocimiento
- A mayor interacción social, más posibilidades de actuar
- A mayor interacción social, más robustas funciones mentales superiores

- **Criterio:**

El docente concibe que las funciones mentales superiores sobre el aprendizaje funciones trigonométricas se desarrollan y aparecen en dos momentos. En un primer momento se manifiestan en el ámbito social y, en segundo momento en el ámbito individual.

Indicadores:

- La atención, la memoria, la formulación de conceptos son primero un fenómeno social y después progresivamente, se transforman en una propiedad del individuo
- Cada función mental superior primero es interpsicológica y después es individual, personal, intrapsicológica
- Cuando el estudiante se angustia por que algo no le sale bien, es una función mental interior, es una reacción del ambiente
- Cuando el estudiante se angustia, emociona, hace gestos, se pronuncia, para llamar la atención ya es una forma mental de comunicación, que se da en la interacción con los demás, se trata de una función mental superior, interpsicológica (su de él)
- El conocimiento es posible en la comunicación con los demás
- La angustia, la emoción, la motivación, el arte de decir presente, aquí estoy, el aprendiz lo utiliza como instrumento para comunicarse; ya posee un instrumento para comunicarse. Es una función mental superior o habilidad psicológica propia, personal, dentro de su mente.

- **Criterio:**

El docente comparte que en el estudiante hay que hacer una distinción entre habilidades interpsicológicas y habilidades intrapsicológicas, así como el paso que se da de las primeras a las segundas a través del concepto de interiorización.

Indicadores:

- En la interacción social las habilidades interpsicológica se transforman en habilidades intrapsicológicas
- La interiorización, expresa el proceso de empoderamiento personal, de lo que era cultural

- El alumno se desarrolla a plenitud en la medida en qué se apropia, hace suyo, interioriza las habilidades interpsicológicas
- En un primer momento, depende de los otros
- Con la interacción de habilidades de los otros adquiere la posibilidad de actuar por sí mismo y asumir la responsabilidad de su actuar

Criterio:

El docente conoce que en el paso de una habilidad interpsicológica a una habilidad intrapsicológica los demás juegan un papel importante – para que el llanto tenga sentido y significado, se requiere que el padre o la madre presten atención a ese llanto –

La posibilidad o potencial que los individuos tienen para ir desarrollando las habilidades psicológicas en un primer momento depende de los demás. Este potencial de desarrollo mediante la interacción con los demás, Vygotsky lo llama zona de desarrollo próximo.

Indicadores:

- Cada estudiante tiene su zona de desarrollo próximo
- La zona de desarrollo próximo es la posibilidad que tiene cada estudiante (individuo) de aprender en el ambiente social, en la interacción con los demás
- El conocimiento y la experiencia del alumno es posibilitado por la experiencia y conocimiento de los otros
- Mientras más rica y frecuente sea la interacción con los demás, el conocimiento del estudiante será más rico y amplio
- El estudiante aprende con la ayuda de los demás
- El estudiante aprende en el ámbito de la interacción social
- La interacción social como posibilidad de aprendizaje es su zona de desarrollo próximo
- La zona de desarrollo próximo del estudiante puede ser amplia o ampliada desde el pasado, presente y futuro: interactuando con científicos, comunidades de investigación, autores notables,

conferencistas, grupos cooperativos de aprendizaje, encuentros, conferencias, simposios, congresos, prometeos, etc.

- ★ Inicialmente las personas (maestros, padres o compañeros) que interactúan con el estudiante son las que en cierto sentido, son responsables de que el individuo aprenda
- ★ Aprendiendo el estudiante en su zona de desarrollo próximo, gradualmente asumirá la responsabilidad de construir su conocimiento y guiar su propio comportamiento
- ★ La ZDP, del estudiante es la etapa de máxima potencialidad de aprendizaje con la ayuda de los demás
- ★ El nivel de desarrollo de las habilidades interpsicológicas depende del nivel de interacción social
- ★ El nivel de desarrollo y aprendizaje que el individuo puede alcanzar con la ayuda, guía o colaboración de los adultos o de sus compañeros siempre será mayor que el nivel que pueda alcanzar por si solo.

Criterio:

Los símbolos, las obras de arte, ciencia y tecnología, la escritura, los diagramas, los mapas, los dibujos, los signos, los sistemas numéricos, en una palabra, las herramientas psicológicas son el puente para que el estudiante pase de las funciones mentales inferiores a las superiores.

Indicadores:

- ★ Las herramientas psicológicas (HP) son motivo para la interacción social
- ★ Las HP, hacen posible el paso de las FMI a las FMS
- ★ Las HP, posibilitan el paso de la habilidades interpsicológicas a las habilidades intrapsicológicas
- ★ Las HP, hacen que el alumno aprenda, que construya el conocimiento
- ★ Las HP, median los pensamientos, sentimientos y conductas de los estudiantes
- ★ La capacidad de pensar, sentir y actuar del estudiante depende de la HP que usa

- El lenguaje es la HP, más importante del estudiante con lo que piensa y controla su comportamiento
- El lenguaje le permite al alumno cobrar conciencia de sí mismo y ejercitar el control voluntario de sus acciones
- Con el lenguaje tiene la posibilidad de afirmar o negar, en ese momento empieza a ser distinto y diferente de los objetos y de los demás
- Con el lenguaje del estudiante se apropia de la riqueza del conocimiento, apropiándose del contenido y herramientas del pensamiento.

- **Criterio:**

Profesores y estudiantes saben que cuando nacemos solamente tenemos funcione mentales inferiores, las funciones mentales superiores todavía no están desarrolladas, con la interacción con los demás, vamos aprendiendo, y al ir aprendiendo, vamos desarrollando nuestras funciones mentales superiores, algo completamente diferente, de lo que recibimos, genéticamente por herencia.

Indicadores:

- Lo que aprendemos depende de las HP que tenemos
- Las HP, dependen de las culturas en que vivimos
- Nuestros pensamientos, nuestras experiencias, nuestras intenciones y nuestras acciones están culturalmente mediadas
- La cultura proporciona las orientaciones que estructura el comportamiento de los individuos
- Lo que los seres humanos percibimos como deseable o no deseable depende del ambiente, de la cultura a la que pertenecemos, de la sociedad de la cual somos parte
- El ser humano, en cuanto sujeto que conoce, no tiene acceso directo, a los objetos; el acceso es mediado a través de las herramientas psicológicas de que dispone
- El conocimiento se construye a través de la interacción con las demás mediada por la cultura, desarrolladas histórica y socialmente

- La cultura es determinante primario del desarrollo individual
- Los seres humanos somos los únicos que creamos cultura y en ella es como nos desarrollamos
- A través de la cultura el aprendiz adquiere el contenido de su pensamiento, el conocimiento
- La cultura nos dice qué pensar y cómo pensar
- La cultura nos da el conocimiento y la forma de construir ese conocimiento

Criterio:

En el proceso de aprendizaje, docentes y estudiantes analizan el legado científico y tecnológico de los temas, construyen sus utilidades en el presente y avizoran futurables humanos de buen vivir, conocimiento y bienes culturales para las futuras generaciones

Indicadores:

- El conocimiento de construye socialmente, el plan y programa de estudios están diseñados para posibilitar la interacción social: alumno-alumno- padre de familia alumno(a)-experto(a) alumno- comunidad alumno- grupo etc.
- La zona de desarrollo próximo, que es la posibilidad de aprender con el apoyo de los demás, crea condiciones para ayudarlo personalmente en su aprendizaje y desarrollo
- El conocimiento es construido a partir de la experiencia, va más allá del pizarrón y acetato, introduce actividades de laboratorio, experimentación y solución de problemas contextuales. Máxima preocupación por el ambiente de aprendizaje
- El aprendizaje es construcción social en equipos, clubs, comunidades de aprendizaje, grupos ecológicos, grupos de andinismo, excursiones, rincones de aprendizaje, técnicas cooperativas, vínculos asociativos con la comunidad, grupos de socorro y ayuda, grupos de deportes, de recreación, grupos de investigación acción, etc…

- ★ El dialogo entendido como intercambio activo entre locutores es básico en el aprendizaje, mediante el estudio colaborativo, grupos y equipos de trabajo participativo en discusiones de alto nivel sobre el contenido del aprendizaje de funciones trigonométricas
- ★ El aprendizaje es un proceso activo en el que se experimenta, se cometen errores, se buscan soluciones, la búsqueda, la indagación, la exploración, la investigación y la solución de problemas contextuales propios del medio comunitario-social." (Tusa, 2015)

3. TÉCNICAS DE APRENDIZAJE COOPERATIVO PARA POTENCIAR EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

- ¿Qué es el aprendizaje cooperativo?

El aprendizaje cooperativo se define como "el uso didáctico de equipos reducidos de alumnos, generalmente de composición heterogénea en rendimiento y capacidad, aunque ocasionalmente pueden ser más homogéneos, utilizando una estructura de actividad tal que asegure al máximo la participación igualitaria (para que todos los miembros del equipo tengan las mismas oportunidades de participación) y se potencie al máximo la interacción simultánea entre ellos, con la finalidad de que todos los miembros de un equipo aprendan los contenidos escolares, cada uno hasta el máximo de sus posibilidades y aprendan, además, a trabajar en equipo". (Pujolás Masét, 2009)

- ¿Para qué el aprendizaje cooperativo?

"El aprendizaje cooperativo ayuda a atender la diversidad de los alumnos, según sus distintos ritmos y estilos de aprendizaje; por tanto, es accesible y beneficioso para todos, con independencia de sus diferencias. Además, fomenta valores y habilidades sociales que contribuyen al desarrollo integral de los alumnos como personas. Por ejemplo, el respeto a las diferencias, la responsabilidad individual y colectiva, la solidaridad, la escucha activa y la capacidad de reflexión y crítica." (Alonso, y otros)

- Ventajas de aprendizaje cooperativo

Tipos de situaciones	Ventajas del aprendizaje cooperativo
★ Problemas de ansiedad ★ Miedo a no ser aceptado o a equivocarse delante de otros ★ Bloqueo o frustración ante el desempeño de alguna tarea o actividad. ★ Temor al fracaso.	El aprendizaje cooperativo fomenta la autoestima y la confianza en sí mismo, permite un entorno de trabajo tranquilo y relajado, con tiempo y ocasiones suficientes para practicar y recibir la ayuda de los demás.
★ Escasa habilidad social. ★ Timidez. ★ Dificultades para entablar amistades y para relacionarse con sus compañeros y/o con las personas adultas. ★ Impulsividad. ★ Rechazo a sus compañeros. ★ Trastornos del lenguaje.	Promueve la interacción entre iguales para aprender y contempla actividades específicas, para desarrollar habilidades sociales y comunicativas.
★ Poca autonomía. ★ Necesidad de continua ayuda por parte del profesor. ★ Dificultad para planificar una actividad y aprovechar el tiempo. ★ Escaso control de los progresos y dificultades en el proceso de aprender.	Reduce la dependencia de los alumnos respecto al profesor debido a la ayuda de los compañeros, favorece la autonomía e independencia, permite al profesor disponer de más tiempo para atender a los niños con mayores necesidades.
★ Distintos grados de competencia.	Beneficia a los alumnos que necesitan ayuda y a los que ayudan a estos, fomenta el trabajo entre compañeros d distintos grados de competencias de manera eficaz.

★ Diferencias sociales y culturales, según la procedencia , el idioma, las costumbres, etc.	Promueve la participación igualitaria de todos permite a los niños conocerse mejor y estrechar vínculos y fomenta el respeto mutuo.

Fuente (Alonso, y otros)

La diferencia entre las distintas estructuras de la actividad que hemos identificado (individualista, competitiva y cooperativa) viene determinada fundamentalmente en los segmentos AA (no tanto en los segmentos AP).

La concepción constructivista del aprendizaje postula que la estructura de aprendizaje de una sesión de clase debe contener un alto porcentaje de segmentos AA, cuantos más mejor, de tipo cooperativo." (Pujolás Masét, 2009)

- La conformación de los grupos.

"Los grupos de aprendizaje cooperativo suelen tener de dos a cuatro miembros. La regla es cuánto más pequeño sea el grupo, tanto mejor. En caso de duda, al docente le conviene formar pares o tríos de alumnos. Cada vez que se tenga que determinar la dimensión de los grupos cooperativos habrá que tener en cuenta los siguientes factores:

1) Dentro de un par, los alumnos deben manejar solo dos interacciones. Dentro de un trío, habrá seis interacciones que manejar. Dentro de un grupo de cuatro, las interacciones a manejar serán doce. Cuanto mayor es el número de interacciones, mayor será la cantidad de prácticas interpersonales y grupales necesarias para manejar esas interacciones.
2) Cuanto menor es el tiempo disponible, más reducido deberá ser el grupo de aprendizaje.
3) Cuanto más pequeño es el grupo, más difícil será que algunos alumnos se dejen estar y no hagan su aporte al trabajo colectivo.
4) Cuanto más reducido sea el grupo, más fácil será detectar cualquier dificultad que pudieran tener los alumnos para trabajar juntos.

Antes de concretar la distribución de los alumnos en los grupos, el docente tiene que decidir si los grupos de aprendizaje deberán ser homogéneos o heterogéneos. A veces conviene emplear grupo homogéneos, cuyos miembros tengan similar capacidad para enseñar determinadas prácticas sociales o alcanzar ciertos objetivos conceptuales. Por lo general, sin embargo, son preferibles los grupos heterogéneos. Los grupos compuestos por estudiantes con diferentes rendimientos y distintos intereses permiten que los alumnos tengan acceso a diversas perspectivas y métodos de resolución de problemas, y producen un mayor desequilibrio cognitivo, necesario para estimular el aprendizaje y el desarrollo cognitivo de los alumnos. Para formar grupos heterogéneos similares conviene utilizar la distribución estratificada. Este tipo de distribución permite al docente asignar a cada grupo un alumno de un nivel superior, un alumno de nivel inferior y el resto de nivel medio. El nivel estará en función del tipo de tarea que se vaya a realizar (escritura de un texto, lectura, resolución de problemas, resolución de ecuaciones, etc.)

Conviene igualmente crear grupos de apoyo para cada estudiante aislado. A estos efectos, se pide a cada alumno que enumere tres compañeros de clase con los que le gustaría trabajar. Luego se cuenta la cantidad de veces en que fue elegido cada alumno. Así es posible identificar a los estudiantes aislados de la clase (los que no fueron elegidos por ningún compañero). Estos son los alumnos de alto riesgo que necesitan de la ayuda del docente. El alumno más aislado formará un grupo con dos de los compañeros más populares, solidarios y serviciales de la clase. Luego se determinará quién es el segundo alumno más aislado y se procederá de igual manera. El procedimiento menos recomendable para distribuirá los alumnos en grupos es dejar que ellos mismos lo hagan. Los grupos seleccionados por los propios alumnos suelen ser homogéneos, es decir, que los miembros de un grupo son todos buenos alumnos, o todos de raza blanca, o todos varones, etc. Esto el elimina la posibilidad de que amplíen su círculo de relaciones. Una modificación útil consiste en que los alumnos enumeren a varios compañeros con lo que les gustaría trabajar y luego ubicarlos en un grupo de aprendizaje con una persona que hayan numerado y con otra elegida por el docente.

En cuanto a la duración del grupo, los grupos de base duran por lo menos un año, e idealmente, varios años. Los grupos informales duran solo unos pocos minutos o, como máximo, un período de clase. La duración de un grupo formal, depende en gran medida, del grupo y del docente. Algunos docentes mantienen los grupos cooperativos durante todo un semestre o un año lectivo. Otros prefieren mantenerlos solo el tiempo requerido para cumplir con una tarea, una unidad o un capítulo. Nuestro consejo es dejar que los grupos trabajen juntos durante el tiempo necesario para lograr un buen resultado. Deshacer los grupos que tienen dificultades para funcionar a menudo tiene el efecto de impedir que los alumnos aprendan las técnicas que necesitan para resolver problemas. Con todo a lo largo del año cada alumno debería trabajar con cada uno de los demás de su clase. Si se les hace saber a los alumnos que en algún momento trabajarán con todos los otros, se sentirán mejor predispuestos a trabajar en grupo que al principio podrían no gustarles, y ésta es una importante lección en sí misma." (Johnson & Johnson, 1999)

- Desarrollo de la alternativa de investigación

Se presenta a continuación la manera en que se trabajará la alternativa de experimentación:

Planificación didáctica N°1

Técnica de aprendizaje cooperativo

Rompecabezas

- **Tema:** El uso de la TAC "rompecabezas" para el aprendizaje de los orígenes y aportadores de las funciones trigonométricas

- **Datos informativos:**
  - **Institución Educativa:** Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio.
  - **Alumnos:** Segundo Año de bachillerato General Unificado.
  - **Investigador:** Mónica Janeth Armijos Labanda
  - **Fecha:** -------
  - **Período:** 8:05-9:45

★ **Objetivos:**

- ◊ Fortalecer el aprendizaje de funciones trigonométricas haciendo uso de la técnica de aprendizaje cooperativo (TAC) <<rompecabezas>>.
- ◊ Comprender el origen y desarrollo de las funciones trigonométricas a través de los años.
- ◊ Identificar los aportadores de las funciones trigonométricas
- ◊ Elaborar un diagrama secuencial del origen e historia de las funciones trigonométricas, así como de los aportadores de las funciones trigonométricas haciendo y uso de datos históricos de las mismas.

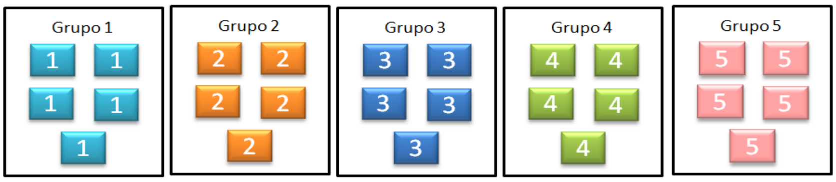
★ **Normas de trabajo:**

- ◊ Se debe resolver el pre test y postes, con la mayor honestidad posible y luego devolverlos.
- ◊ La lectura que se realiza debe ser comprensiva, puede utilizar algunas técnicas que le permitan la comprensión de la lectura tales como el subrayado, resumen, etc. La que usted considere más adecuada.
- ◊ Se pueden hacer preguntas durante el desarrollo de la clase, siempre que sean pertinentes y de acuerdo al tema.

★ **Metodología de trabajo**

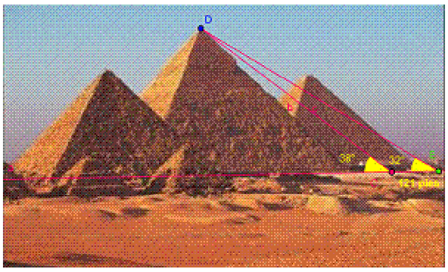
Hora	**Actividad**
08:20	Presentación
08h25	Tomar lista a los alumnos
08h30	Planteamiento del tema de estudio
08h32	Aplicación de pre test
08h40	Enumerar los alumnos del 1 al 5 para la división de los alumnos en grupos, agrupando todos los alumnos 1, luego los 2 y así sucesivamente. 

	Disposición de los grupos “Al disponer el aula para el trabajo en grupos cooperativos, el docente debe tener presentes las siguientes pautas: ★ Los miembros de un grupo de aprendizaje deben sentarse juntos y de forma tal que puedan mirarse a la cara. ★ Todos los alumnos deben estar en condiciones de ver al docente al frente del aula sin tener que retorcerse en sus sillas o adoptar una posición incómoda. ★ Los distintos grupos deben estar lo bastante separados como para que no interfieran unos con otros.
08h45	Entrega de fragmentos de estudio sobre el origen y los aportadores de la funciones trigonométricas, e indicaciones sobre el trabajo en grupo a realizar. Características presentes en cada grupo ★ Interdependencia positiva: Cada miembro del equipo aprende por su pertenencia a él, por la colaboración y aportaciones de todos, con un objetivo común. El éxito del equipo depende del trabajo de todos sus miembros. ★ Responsabilidad individual: Cada miembro del equipo es responsable de una parte del trabajo, de manera que el éxito del equipo depende de todos. ★ Participación igualitaria: Todos los miembros del equipo deben participar. ★ Interacción simultánea: El trabajo cooperativo requiere una interacción entre todos los miembros del equipo, respetando unos turnos y unos tiempos.

	<u>Asignación de roles</u> 1. Encargado de buscar fundamentos: Les pide a los miembros del grupo que fundamenten sus respuestas y conclusiones con hechos o razonamientos. 2. Encargado de llevar un registro: Anota las decisiones y redacta el informe del grupo. 3. Encargado de verificar la comprensión: Se asegura de que todos los miembros del grupo sepan explicar cómo se llega a determinada respuesta o conclusión. 4. Integrador: Integra las ideas y los razonamientos de los miembros del grupo en una única posición con la que todos puedan concordar. 5. Verificador: Verifica la validez del trabajo del grupo en función de las instrucciones, del tiempo disponible y del sentido común
09h25	Reagrupamiento de los alumnos en la llamada reunión de expertos, pero esta vez en un el nuevo grupo constara un miembro de cada uno los grupos antes conformados. 
09h40	Regreso al grupo original y cada uno explicara a sus demás compañeros el documento que preparo en la reunión de expertos. Para luego hacer una exposición sobre el fragmento de estudio entregado al grupo. 
09h45	Aplicación de pos test

★ Texto de estudio

<u>Aprendizaje del origen de las funciones trigonométricas.</u>



Haciendo un análisis del origen de las funciones trigonométricas, se puede dar cuenta de que “el estudio de las funciones trigonométricas se remonta a la época de Babilonia, y gran parte de los fundamentos de trigonométrica fueron desarrollados por los matemáticos de la Antigua Grecia, de la India y estudiosos musulmanes” (Wiki Matemática, 2010)

“Hace unos 4000 años en Babilonia (antiguo reino localizado en la región de Mesopotamia) y Egipto se determinó y establecieron aproximaciones de medidas de ángulos y de longitudes de los lados de los triángulos rectángulos para ampliar y desarrollar medidas tanto en la agricultura como en la construcción de pirámides. Los egipcios fijaron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. Además se utilizaba la trigonometría para el estudio de la astronomía.

Luego de Egipto y Babilonia, el estudio de la trigonometría se asentó en Grecia, donde el matemático y astrónomo Griego Hiparco de Nicea, fue uno de los principales y más importantes desarrolladores de la Trigonometría. Este matemático construyó una tabla de cuerdas para solucionar triángulos. Comenzando con un ángulo de 71° y aproximándose hasta 180° con ampliaciones de 71°, la tabla facilitaba la longitud de la cuerda limitada por los lados del ángulo central ya que fragmentaba a una circunferencia de radio r. Hasta el momento no se conoce el valor que Hiparco utilizó para r.

300 años más tarde, el astrónomo griego Tolomeo utilizó r = 60, ya que los griegos tomaron el sistema numeral (base 60) que era usado por los babilonios.

En India y Arabia la trigonometría era utilizada en la Astronomía. El primer uso de la función seno, aparece en el Shulba o Sulba Sutras escrito en India del siglo VIII al VI a. C. Se desarrolló entonces un sistema trigonométrico que estaba basado en la función seno en vez de cuerdas como los griegos. Esta nueva función, era la longitud del lado opuesto a un ángulo en un triángulo rectángulo de hipotenusa.

Las funciones trigonométricas fueron estudiadas por Hiparco de Nicea (180-125 a. C.), Aryabhata (476-550), Varahamihira, Brahmagupta, Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, Abu'l-Wafa, Omar Khayyam, Bhaskara II, Nasir al-Din Tusi, Regiomontanus (1464), Ghiyath al-Kashi y Ulugh Beg (Siglo XIV), Madhava (ca. 1400), Rheticus, y el alumno de éste, Valentin Otho. La obra de Leonhard Euler Introductio in analysin infinitorum (1748) fue la que estableció el tratamiento analítico de las funciones trigonométricas en Europa, definiéndolas como series infinitas presentadas en las llamadas <Fórmulas de Euler>.

La noción de que debería existir alguna correspondencia estándar entre la longitud de los lados de un triángulo siguió a la idea de que triángulos similares mantienen la misma proporción entre sus lados. Esto es, que para cualquier triángulo semejante, la relación entre la hipotenusa y otro de sus lados es constante. Si la hipotenusa es el doble de larga, así serán los catetos. Justamente estas proporciones son las que expresan las funciones trigonométricas. A finales del siglo X ya se habían completado la función seno y las otras cinco funciones trigonométricas.

Durante el siglo XII el astrónomo alemán Georges Joachim, introdujo el concepto moderno de las funciones trigonométricas como proporcionales en vez de longitudes de algunas determinadas líneas.

En el siglo XVIII, el físico y matemático suizo Leonhard Euler, estudió la notación actual de las funciones trigonométricas y se le atribuye el descubrimiento de la letra e como base del logaritmo natural, así como la unidad imaginaria que generalmente se denota con la letra i. Euler también popularizó el número pi (π).

Durante el siglo XX la trigonometría ha realizado muchos aportes en el estudio de los fenómenos de onda y oscilatorio, así como el comportamiento periódico, el cual se relaciona con las propiedades analíticas de las funciones trigonométricas. En astronomía se utiliza para medir distancias a estrellas próximas, para la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas de navegación satelital”. (Pérez V. , 2010)

Aprendizaje de los representantes modernos de las funciones trigonométricas

El aprendizaje de los aportadores de las funciones trigonométricas permite orientar el aprendizaje adquiriendo referencias de los estudios y descubrimientos y aportes de personajes anteriores a nuestra época que se interesaron en estudiar las funciones trigonométricas, entre algunos aportadores podemos describir

“Francios Viette.

Francois Viette nació en Francia en 1540, fue un matemático francés, que hizo importantes contribuciones a las matemáticas en las áreas de aritmética, álgebra, la trigonometría y la geometría, falleció en París en 1603.

Algunas de sus obras son las siguientes:

El Canon mathematicus, que contiene notables contribuciones a la trigonometría. Generaliza una aproximación analítica a la trigonometría que se designa a veces por el vocablo <>. Así, aplicando sistemáticamente el álgebra a la trigonometría.

En particular, en el Canon encontramos las siguientes identidades:

$$\mathrm{SEN}\ \theta = \mathrm{SEN}\ (60^{\circ} + \theta) + \mathrm{SEN}\ (60^{\circ} - \theta)$$

$$3\ \mathrm{SEN}\theta - 4\mathrm{SEN}3\ \theta = \mathrm{SEN}3\theta$$

$$\mathrm{CSC}\theta - \mathrm{COT}\theta = \mathrm{TAN}\ (\theta/2)$$

$$\mathrm{CSC}\theta + \mathrm{COT}\theta = \mathrm{COT}\ (\theta/2)$$

Viéte descubre de nuevo la mayor parte de las identidades elementales y obtiene fórmulas generales equivalentes a las expresiones de Sen(nx) y

Cos(nx) en función de Sen x y Cos x. Consigue mediante una manipulación ingeniosa de los triángulos rectángulos y de la identidad: Obtener fórmulas para el Sen(nx) y Cos(nx) equivalentes a:

$$sen\, nx = ncos^{x+1}xsenx - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}cos^{x-3}xsen^{3}x + \cdots$$

$$cosnx = cos^{x}x - \frac{n(n-1)}{2}cos^{x-2}xsen^{2}x + \frac{n(n+1)(n-2)(n-3)}{3!}cos^{x-4}xsen^{4}x + \cdots$$

Encontramos también, entre las fórmulas que convierten un producto de funciones en una suma o una diferencia, la formula obtenida por Viéte:

Sen (A+B) +sen (A-B) =2senA (cos B)

Sen (A-B) - sen (A-B) =2senB (cos A)

Y formulas análogas para los cósenos. Viéte obtiene también el teorema del coseno aunque lo formula así:

$$\frac{2ab}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{1}{sen(90° + C)}$$

Donde a, b y c son los lados y C un ángulo.

En su obra Variorum de Rebus Mathematicis, Publicada en 1593 encontramos un enunciado equivalente al del teorema de la tangente:

$$\frac{\mathrm{tg}\,\frac{A+B}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{A-B}{2}} = \frac{\frac{a+b}{2}}{\frac{a-b}{2}}$$

Donde A y B son ángulos, a y b son los lados de un triángulo. Viéte considera la trigonometría como una rama Independiente de las matemáticas y hace una exposición de la misma análoga a la de Rhaeticus, aunque perfeccionando las tablas trigonométricas de este. Aumenta las tablas de Rhaeticus para las seis funciones trigonométricas dando valores para intervalos de un segundo con una precisión de siete decimales”. (Mattrigonometría, 2008)

Entre otros autores que brindaron sus aportes a las funciones trigonométricas, podemos mencionar a:

“Edmund Gunter

Nació en 1581 en Hertfordshire-Inglaterra y falleció en Londres 1626. Sus principales trabajos versaron sobre trigonometría y cálculo logarítmico. Introdujo los términos coseno y cotangente, desarrolló la aritmética logarítmica y, en astronomía, descubrió la variación anual de la declinación magnética.

Rheticus

Georg Joachim von Lauchen, nació en Feldkirch actual Austria en 1514 y falleció en Kosice unbicada en Eslovaquía en 1576 .Matemático y astrónomo austriaco. Relacionó por primera vez las funciones trigonométricas con los ángulos (en vez de con los arcos) y elaboró una de las mejores tablas trigonométricas de su época. Nombrado en 1536 profesor de astronomía en la Universidad de Wittemberg, fue uno de los primeros seguidores de la hipótesis copernicana y discípulo de N. Copérnico, a quien convenció para que publicase su famosa obra De revolutionibus orbium caelestium(1543).

Leonhard Euler

En el siglo XVIII, el matemático suizo Leonhard Euler fue quien verdaderamente fundó la trigonometría moderna, definiendo las funciones trigonométricas mediante expresiones con exponenciales de números complejos. Esto convirtió a la trigonometría en sólo una de las muchas aplicaciones de los números complejos. De hecho, Euler demostró que las propiedades básicas de la trigonometría eran simplemente producto de la aritmética de los números complejos.

Thomas Fincke

Thomas Fincke nació en Flensburg-Dinamarca (Alemania) el 6 enero 1561 y murió Copenhagen-Dinamarca el 24 abril 1656) fue un danés, matemático y físico, y un profesor de la Universidad de Copenhague por más de 60 años.

Su logro duradero se encuentra en su libro Geometría rotundi (1583), en la que introdujo los nombres modernos de las funciones trigonométricas tangente y secante." (Achury, 2011)

"Isaac Newton.

Nació en la pequeña aldea de Woolsthorpe-Lincolnshire el 25 de diciembre de 1642, y murió la madrugada del 20 de marzo en Kensington- Londres.

A mediados del siglo XVIII, el genial Isaac Newton inventó el cálculo diferencial e integral, logrando así representar muchas funciones matemáticas mediante el uso de series infinitas de potencias de la variable x.

En la rama de trigonometría, Newton encontró la serie para el sen x, y series similares para el cos x y la tg x.

Con la invención del Cálculo, las funciones trigonométricas fueron incorporadas al Análisis, donde todavía hoy desempeñan un importante papel tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas." (Mattrigonometría, 2008)

Planificación didáctica N°2

Técnica de aprendizaje cooperativo

Student teams achievement division

(Divisiones de rendimiento por equipos)

- **Tema:** El uso de la TAC student teams achievement división, para el aprendizaje de la utilidad a la humanidad de las funciones trigonométricas y aprendizaje de conceptos básico de geometría y trigonometría.

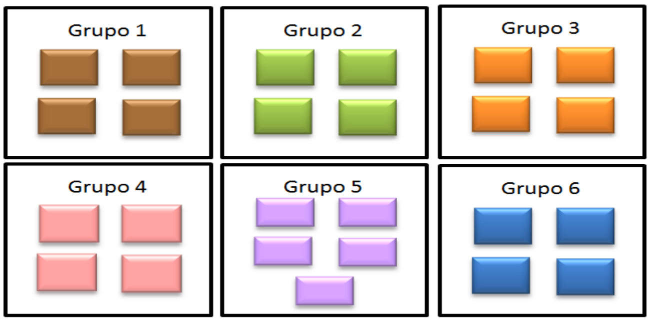
- **Datos informativos:**
  - **Institución Educativa:** Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio.
  - **Alumnos:** Segundo Año de bachillerato General Unificado.
  - **Investigador:** Mónica Janeth Armijos Labanda
  - **Fecha:** -------
  - **Período:** 8:05-9:45

- **Objetivos:**
  - Fortalecer el aprendizaje de funciones trigonométricas haciendo uso de la técnica de aprendizaje cooperativo (TAC) <<STAD>>.
  - Relacionar las aplicaciones de las funciones trigonométricas con elementos del medio circundante.
  - Enunciar las aplicaciones de las funciones trigonométricas en la vida diaria mencionando una relación con materiales o elementos que circundan el entorno de aprendizaje.

- **Normas de trabajo:**
  - Se debe resolver el pre test y postes, con la mayor honestidad posible y luego devolverlos.
  - La lectura que se realiza debe ser comprensiva, puede utilizar algunas técnicas que le permitan la comprensión de la lectura tales como el subrayado, resumen, etc. La que usted considere más adecuada.

◊ Se pueden hacer preguntas durante el desarrollo de la clase, siempre que sean pertinentes y de acuerdo al tema.

★ **Metodología de trabajo**

Hora	**Actividad**
08:20	Tomar listas a los alumnos
08h25	Retroalimentación sobre el tema anterior
08h30	Planteamiento del tema de estudio
08h32	Aplicación de pre test
08h40	Presentación y trabajo de la lección por parte del docente.
09h00	Integración de grupos de 4 estudiantes por parte del docente.  <u>Características de las estructuras cooperativas</u> Para que exista el aprendizaje cooperativo los grupos de aprendizaje deben considerar ciertas “características que debe reunir una actividad para ser cooperativa: ★ Interdependencia positiva: Cada miembro del equipo aprende por su pertenencia a él, por la colaboración y aportaciones de todos, con un objetivo común. El éxito del equipo depende del trabajo de todos sus miembros. ★ Responsabilidad individual: Cada miembro del equipo es responsable de una parte del trabajo, de manera que el éxito del equipo depende de todos. ★ Participación igualitaria: Todos los miembros del equipo deben participar, todos cuentan.

	★ Interacción simultánea: El trabajo cooperativo requiere una interacción entre todos los miembros del equipo, respetando unos turnos y unos tiempos. <u>La disposición de los grupos en el aula</u> Al disponer el aula para el trabajo en grupos cooperativos, el docente debe tener presentes las siguientes pautas: 1) Los miembros de un grupo de aprendizaje deben sentarse juntos y de forma tal que puedan mirarse a la cara. 2) Todos los alumnos deben estar en condiciones de ver al docente al frente del aula sin tener que retorcerse en sus sillas o adoptar una posición incómoda. 3) Los distintos grupos deben estar lo bastante separados como para que no interfieran unos con otros.
09h10	Entrega de texto de estudio sobre de la utilidad a la humanidad de las funciones trigonométricas y conceptos básicos de trigonometría e indicaciones sobre le trabajo en grupo a realizar. <u>Asignación de roles a los miembros de los grupos</u> o Encargado de buscar fundamentos: Les pide a los miembros del grupo que fundamenten sus respuestas y conclusiones con hechos o razonamientos. o Encargado de llevar un registro: Anota las decisiones y redacta el informe del grupo. o Corrector: Corrige cualquier error en las explicaciones de otro miembro o resume y complementa cualquier dato importante que se haya omitido. o Inquisidor: Hace preguntas profundas que conducen a un análisis o profundizan la comprensión.

	○ Integrador: Integra las ideas y los razonamientos de los miembros del grupo en una única posición con la que todos puedan concordar.
09h35	Desintegración del grupo y aplicación individual del pos test.

★ **Texto de estudio**

Aprendizaje de las aplicaciones de las funciones trigonométricas

Para evidenciar las interacciones de las funciones trigonométricas con las demás ciencias se puede decir que "se encuentran notables aplicaciones de las funciones trigonométricas en la física y en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos y como se propagan las ondas: las ondas que se producen al tirar una piedra en el agua, o al agitar una cuerda cogida por los dos extremos, o las ondas electromagnéticas de la luz, el microondas o los rayos-x, las ondas sonoras, entre otros.

- Astronomía

  Cálculo del radio de la Tierra, distancia de la Tierra a la Luna, distancia de la Tierra al Sol, predicción de eclipses, confección de calendarios, etc.

- Artillería

  ¿A qué distancia se encuentra un blanco al que se desea disparar con una catapulta o con un cañón?

- Aviación

  En una base aérea parten dos aviones a la misma velocidad formando un ángulo y siguiendo en trayectorias rectas, se puede determinar la distancia que se encuentran entre los mismos.

- Cartografía

  Elaboración del mapa de un lugar del que se conocen algunas distancias y algunos ángulos.

- Construcciones

  Cómo construir un edificio para que cumpla ciertas exigencias de orientación. En qué dirección se excava un túnel para que salga, al otro lado de la montaña, en el lugar deseado.

- Navegación

  Construcción de cartas marinas en las que se detalle la ubicación de escollos, arrecifes, etc.” (González, 2009)

- “Aplicaciones CAD y Dibujo

  Las curvas, elipse, círculos utilizan en su formulación funciones trigonométricas.

- Electricidad

  Muchas señales de aparatos eléctricos usan funciones trigonométricas para ser modelas, las series de Fourier permiten casi definir cualquier señal como suma ponderada de senos y cosenos.” (Jiménez)

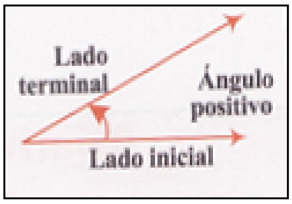
Aprendizaje de conceptos básicos de geometría y trigonometría

- Aprendizaje de ángulos.

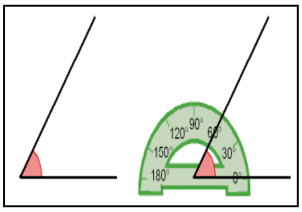
Es importante que el alumno tenga el interés para pueda reconocer y graficar un ángulo, si esto no es posible puede valerse de la comunicación con otros compañeros, o hacer uso de conocimientos desarrollados anteriormente que le sirvan para entender dicho conocimiento.

- Aprendizaje de la definición de ángulo

Los ángulos se miden por la rotación del lado inicial sobre el otro lado final, si la rotación es en sentido anti horario, el ángulo es positivo, si la rotación es en sentido horario, el ángulo es negativo. (Galindo, Matemática 2, 2012)

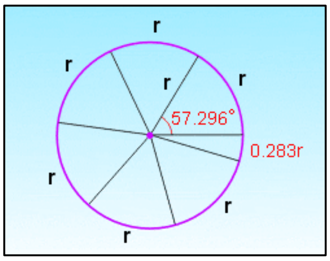


- Aprendizaje para medir grados.



La unidad de medida de los ángulos son los grados, la medida de una vuelta completa a la circunferencia es de 360°, entonces 180° es igual a media vuelta y 90 es un cuarto de vuelta.Un grado se subdivide en 60 minutos y un minuto en sesenta segundos. (Galindo, Matemática 2, 2012)

- Aprendizaje para medir radianes.



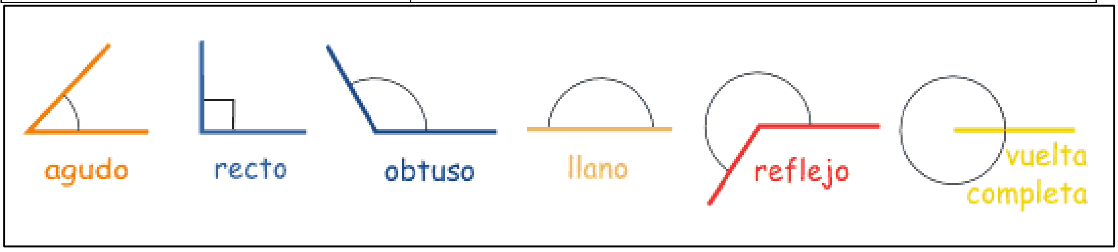
Un radián, en este sentido, es el ángulo central que se encuentra en una circunferencia, con un arco que tiene la misma longitud que el radio.

Dicho de otro modo: un radián es equivalente a 180º/π (pi). Esta unidad, que puede identificarse a través del símbolo rad, facilita la realización de diversos cálculos, que pueden expresarse a través de divisores o múltiplos de π.

Lo que hace el radián es indicar una longitud de circunferencia que resulta idéntica al radio. En una circunferencia completa, se encuentran dos π radianes. (MarcadorDePosición3)

- Aprendizaje de las Clases de ángulos.

Tipos de ángulos	**Descripción**
Ángulo agudo	Un ángulo de menos de 90º
Ángulo recto	Un ángulo de 90º
Ángulo obtuso	Un ángulo de más de 90º pero menos de 180º
Ángulo llano	Un ángulo de 180º
Ángulo reflejo o cóncavo	Un ángulo de más de 180º



Fuente (Disfruta las matemáticas, 2011)

Planificación Didáctica N°3

Técnica de aprendizaje cooperativo

Aprendizaje cooperativo guiado

- **Tema:** El uso de la TAC "Aprendizaje cooperativo guiado" para el aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas y las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

- **Datos informativos:**
  - **Institución Educativa:** Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio.
  - **Alumnos:** Segundo Año de bachillerato General Unificado.
  - **Investigador:** Mónica Janeth Armijos Labanda
  - **Fecha:** -------
  - **Período:** 8:05-9:45

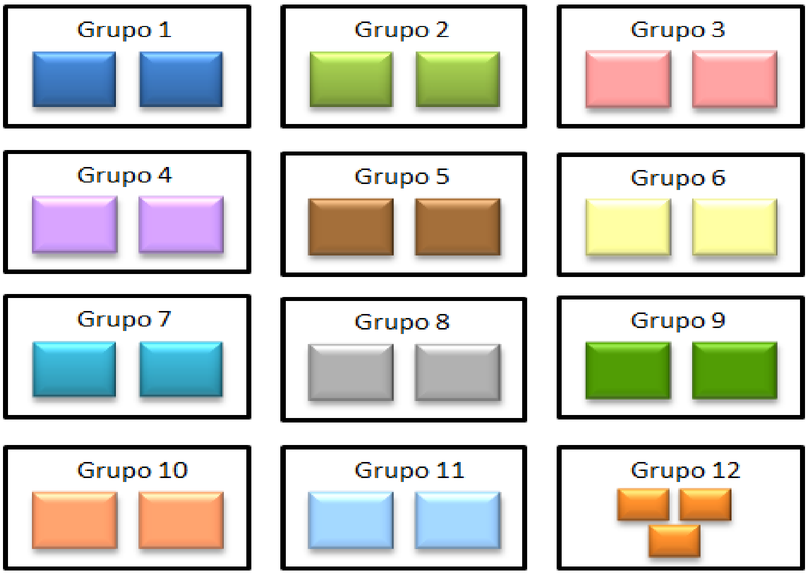
- **Objetivos:**

  - ◊ Fortalecer el aprendizaje de funciones trigonométricas haciendo uso de la técnica de aprendizaje cooperativo (TAC) <<aprendizaje cooperativo guiado>>.
  - ◊ Comprender la definición de funciones trigonométricas.
  - ◊ Resolver problemas de aplicación haciendo uso de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

- **Normas de trabajo:**
  - ◊ Se debe resolver el pre test y postes, con la mayor honestidad posible y luego devolverlos.
  - ◊ La lectura que se realiza debe ser comprensiva, puede utilizar algunas técnicas que le permitan la comprensión de la lectura tales como el subrayado, resumen, etc. La que usted considere más adecuada.
  - ◊ Se pueden hacer preguntas durante el desarrollo de la clase, siempre que sean pertinentes y de acuerdo al tema.

- **Metodología de trabajo**

Hora	**Actividad**
08:20	Tomar listas a los alumnos
08h25	Retroalimentación sobre el tema anterior
08h30	Planteamiento del tema de estudio
08h32	Aplicación de pre test
08h40	Conformación de grupos de dos personas en igual nivel de conocimiento



Características de las estructuras cooperativas

Para que exista el aprendizaje cooperativo los grupos de aprendizaje deben considerar ciertas "características que debe reunir una actividad para ser cooperativa:

- Interdependencia positiva: Cada miembro del equipo aprende por su pertenencia a él, por la colaboración y aportaciones de todos, con un objetivo común. El éxito del equipo depende del trabajo de todos sus miembros.
- Responsabilidad individual: Cada miembro del equipo es responsable de una parte del trabajo, de manera que el éxito del equipo depende de todos.
- Participación igualitaria: Todos los miembros del equipo deben participar, todos cuentan.
- Interacción simultánea: El trabajo cooperativo requiere una interacción entre todos los miembros del equipo, respetando unos turnos y unos tiempos.

	<u>La disposición de los grupos en el aula</u> Al disponer el aula para el trabajo en grupos cooperativos, el docente debe tener presentes las siguientes pautas: 1) Los miembros de un grupo de aprendizaje deben sentarse juntos y de forma tal que puedan mirarse a la cara. 2) Todos los alumnos deben estar en condiciones de ver al docente al frente del aula sin tener que retorcerse en sus sillas o adoptar una posición incómoda. 3) Los distintos grupos deben estar lo bastante separados como para que no interfieran unos con otros.
08h45	Entrega de texto de estudio sobre la definición de funciones trigonométricas y las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo e indicaciones sobre le trabajo en grupo a realizar. Asignación de roles o Analista: Relaciona los conceptos y las estrategias actuales con el material previamente estudiado y con los marcos cognitivos existentes. o Inquisidor: Hace preguntas profundas que conducen a un análisis o profundizan la comprensión. o Integrador: Integra las ideas y los razonamientos de los miembros del grupo en una única posición con la que todos puedan concordar. o Encargado de llevar un registro: Anota las decisiones y redacta el informe del grupo.
09h35	Desintegración del grupo y aplicación individual del pos test.

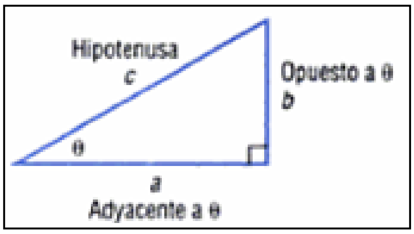
★ **Texto de estudio**

Aprendizaje de la definición de las funciones trigonométricas

"Una función trigonométrica, también llamada circular, es aquella que se define por la aplicación de una razón trigonométrica a los distintos valores de la variable independiente, que ha de estar expresada en radianes. Existen seis clases de funciones trigonométricas: seno y su inversa, la cosecante; coseno y su inversa, la secante; y tangente y su inversa, la cotangente. Para cada una de ellas pueden también definirse funciones circulares inversas: arco seno, arco coseno, etcétera." (MarcadorDePosición4)

Aprendizaje de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

"Un triángulo que tiene un ángulo recto se denomina triángulo rectángulo. Como la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo rectángulo. Como la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180°, los otros dos lados son agudos.



Como las razones dependen sólo del ángulo θ y no del triángulo en sí, seda a cada razón un nombre que involucra a θ:

Nombre de la función	Abreviatura	Valor
Seno de θ	Sen θ	b/c
Coseno de θ	Cos θ	a/c
Tangente de θ	Tan θ	b/a
Cosecante de θ	Csc θ	c/b
Secante de θ	Sec θ	c/a
Cotangente de θ	Cot θ	a/b

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados es decir:

$c^2 = a^2+b^2$

- ♣ Plantilla de ejercicios

7. Un niño eleva su cometa, la cual está a 20m de altura y donde el niño no puede soltarle más la cuerda. El ángulo que la cuerda hace con el piso es de 30º. ¿Cuánta piola tenía el niño?
8. Un observador está a 50 m de una iglesia. El ángulo de elevación a la punta de la torre de la iglesia es de 25º y el observador mide 1,70 m ¿Cuál es la altura de la iglesia?
9. Un salvavidas está en su torre de observación a 20m de altura, una persona implora su ayuda con un ángulo de depresión de 35º. ¿A qué distancia de la base de la torre de observación está la persona que solicitó ayuda?". (Galindo, 2012)

Planificación Didáctica N°4

Técnica de aprendizaje cooperativo

Tutoría entre iguales

- **Tema:** El uso de la TAC "Tutoría entre iguales" para el aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas en el círculo unitario.
- **Datos informativos:**
  - **Institución Educativa:** Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio.
  - **Alumnos:** Segundo Año de bachillerato General Unificado.
  - **Investigador:** Mónica Janeth Armijos Labanda
  - **Fecha:** -------
  - **Período:** 8:05-9:45
- **Objetivos:**
  - Fortalecer el aprendizaje de funciones trigonométricas haciendo uso de la técnica de aprendizaje cooperativo (TAC) << tutoría entre iguales>>.
  - Comprender la definición de funciones trigonométricas.
  - Definir y enunciar las funciones trigonométricas en el círculo unitario.
  - Identificar las funciones trigonométricas en el círculo unitario

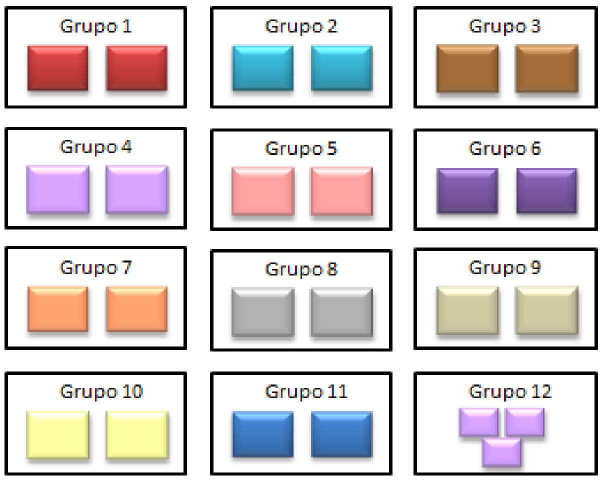
★ **Normas de trabajo:**

◊ Se debe resolver el pre test y postes, con la mayor honestidad posible y luego devolverlos.

◊ La lectura que se realiza debe ser comprensiva, puede utilizar algunas técnicas que le permitan la comprensión de la lectura tales como el subrayado, resumen, etc. La que usted considere más adecuada.

◊ Se pueden hacer preguntas durante el desarrollo de la clase, siempre que sean pertinentes y de acuerdo al tema.

★ **Metodología de trabajo**

Hora	**Actividad**
08:20	Tomar listas a los alumnos
08h25	Retroalimentación sobre el tema anterior
08h30	Planteamiento del tema de estudio
08h32	Aplicación de pre test
08h40	Conformación de grupos de dos personas con distinto nivel de conocimiento  <u>La disposición de los grupos en el aula</u> Al disponer el aula para el trabajo en grupos cooperativos, el docente debe tener presentes las siguientes pautas:

	1) Los miembros de un grupo de aprendizaje deben sentarse juntos y de forma tal que puedan mirarse a la cara. 2) Todos los alumnos deben estar en condiciones de ver al docente al frente del aula sin tener que retorcerse en sus sillas o adoptar una posición incómoda. 3) Los distintos grupos deben estar lo bastante separados como para que no interfieran unos con otros. <u>Características de las estructuras cooperativas</u> Para que exista el aprendizaje cooperativo los grupos de aprendizaje deben considerar ciertas “características que debe reunir una actividad para ser cooperativa: ★ Interdependencia positiva: Cada miembro del equipo aprende por su pertenencia a él, por la colaboración y aportaciones de todos, con un objetivo común. El éxito del equipo depende del trabajo de todos sus miembros. ★ Responsabilidad individual: Cada miembro del equipo es responsable de una parte del trabajo, de manera que el éxito del equipo depende de todos. ★ Participación igualitaria: Todos los miembros del equipo deben participar, todos cuentan. ★ Interacción simultánea: El trabajo cooperativo requiere una interacción entre todos los miembros del equipo, respetando unos turnos y unos tiempos.
08h45	Entrega de texto de estudio sobre la definición de funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas en el círculo unitario e indicaciones sobre el trabajo en grupo a realizar. <u>Asignación de roles</u>

	- Corrector: Corrige cualquier error en las explicaciones de otro miembro o resume y complementa cualquier dato importante que se haya omitido. - Encargado de buscar fundamentos: Les pide a los miembros del grupo que fundamenten sus respuestas y conclusiones con hechos o razonamientos. - Inquisidor: Hace preguntas profundas que conducen a un análisis o profundizan la comprensión. - Encargado de llevar un registro: Anota las decisiones y redacta el informe del grupo.
09h35	Desintegración del grupo y aplicación individual del pos test.

★ **Texto de estudio**

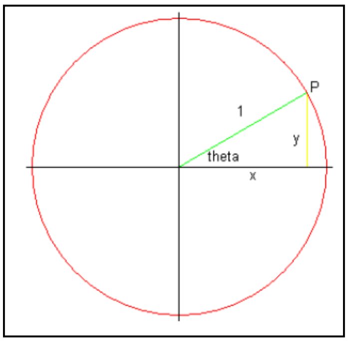
<u>Aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas</u>

Si θ es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, entonces hay seis funciones trigonométricas de θ, cada una de las cuales es la razón de dos de los lados del mencionado triángulo.

Si θ es un ángulo agudo del triángulo rectángulo, entonces

Función	Definición
Seno de θ	$Sen\ \theta = \dfrac{lado\ opuesto\ de\ \theta}{hipotenusa}$
Coseno de θ	$Cos\ \theta = \dfrac{lado\ adyacente\ de\ \theta}{hipotenusa}$
Tangente de θ	$Tan\ \theta = \dfrac{lado\ opuesto\ de\ \theta}{Lado\ adyacente\ de\ \theta}$
Cosecante de θ	$Csc\ \theta = \dfrac{hipotenusa}{lado\ opuesto\ de\ \theta}$
Secante de θ	$Sec\ \theta = \dfrac{hipotenusa}{lado\ adyacente\ \ de\ \theta}$
Cotangente de θ	$Cot\ \ \theta = \dfrac{lado\ adyacente\ de\ \theta}{hipotenusa}$

Aprendizaje de las Funciones trigonométricas en el círculo unitario



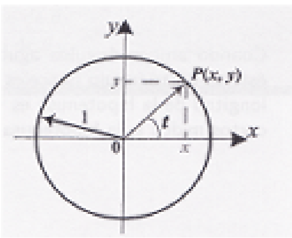
"El círculo unitario también llamado círculo trigonométrico, es un círculo de radio 1 y de centro en el origen" (Galindo, 2012)

Tomemos como vértice de cualquier ángulo el origen de coordenadas, es decir, el punto 0(0, 0). Consideramos como lado inicial el semieje positivo de abscisas, es decir, como punto de referencia para cualquier ángulo φ. 9

Sea dado un ángulo cualquiera φ es obvio que el lado final 0A, que describe este ángulo φ cortará si falta el círculo unitario en cierto punto P(a; b). No es menos evidente que para cualquier punto Q(c; d) del círculo unitario existe obligatoriamente un ángulo θ tal, que el lado final 0A, que describe dicho ángulo θ corte el círculo unitario precisamente en este punto Q(c; d). Queda claro,

Ante todo que: el lado final 0A, que describe el ángulo nulo, corta el círculo unitario en el punto (1, 0); el lado final 0A que describe el ángulo π corta el círculo unitario en el punto (-1, 0); el lado final 0A que describe el ángulo $\pi/2$ interseca el círculo unitario en el punto (0, 1); el lado final 0A que describe el ángulo $\pi/2$ interseca el círculo unitario en el punto (0, -1).

Si el punto (x,y) está a t unidades del punto (1,0) sobre el círculo unidad, entonces:

	sen t= y	csc t = 1/y (y≠0)
	cos t= x	sec t = 1/x (x≠0)
	tan t= y/x (x≠0)	cot t= x/y (y≠0)

Fuente (Galindo, 2012)

Planificación Didáctica N°5

Técnica de aprendizaje cooperativo

Trabajo en equipo de logro individual

- **Tema:** El uso de la TAC "Trabajo en equipo de logro individual" para el aprendizaje características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.

- **Datos informativos:**
  - **Institución Educativa:** Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio.
  - **Alumnos:** Segundo Año de bachillerato General Unificado.
  - **Investigador:** Mónica Janeth Armijos Labanda
  - **Fecha:** -------
  - **Período:** 8:05-9:45

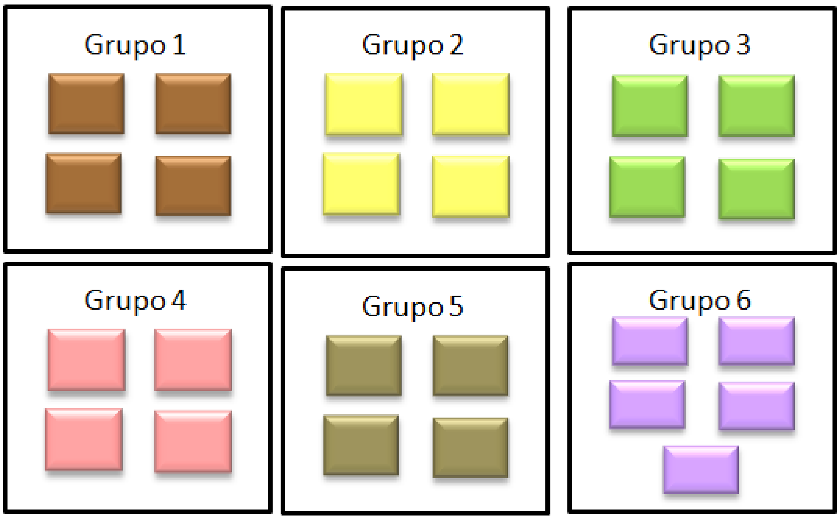
- **Objetivos:**

  - Fortalecer el aprendizaje de funciones trigonométricas haciendo uso de la técnica de aprendizaje cooperativo (TAC) << Trabajo en equipo de logro individual >>.
  - Definir y comprender las características de las funciones trigonométricas.
  - Identificar las características de las funciones trigonométricas

- **Normas de trabajo:**
  - Se debe resolver el pre test y postes, con la mayor honestidad posible y luego devolverlos.
  - La lectura que se realiza debe ser comprensiva, puede utilizar algunas técnicas que le permitan la comprensión de la lectura tales como el subrayado, resumen, etc. La que usted considere más adecuada.
  - Se pueden hacer preguntas durante el desarrollo de la clase, siempre que sean pertinentes y de acuerdo al tema.

Metodología de trabajo

<table>
<tr><th>Hora</th><th>Actividad</th></tr>
<tr><td>08:20</td><td>Tomar listas a los alumnos</td></tr>
<tr><td>08h25</td><td>Retroalimentación sobre el tema anterior</td></tr>
<tr><td>08h30</td><td>Planteamiento del tema de estudio</td></tr>
<tr><td>08h32</td><td>Aplicación de pre test</td></tr>
<tr><td>08h40</td><td>Conformación de grupos de cuatro personas con distinto nivel de conocimiento



<u>La disposición de los grupos en el aula</u>

Al disponer el aula para el trabajo en grupos cooperativos, el docente debe tener presentes las siguientes pautas:

4) Los miembros de un grupo de aprendizaje deben sentarse juntos y de forma tal que puedan mirarse a la cara.
5) Todos los alumnos deben estar en condiciones de ver al docente al frente del aula sin tener que retorcerse en sus sillas o adoptar una posición incómoda.
6) Los distintos grupos deben estar lo bastante separados como para que no interfieran unos con otros.</td></tr>
</table>

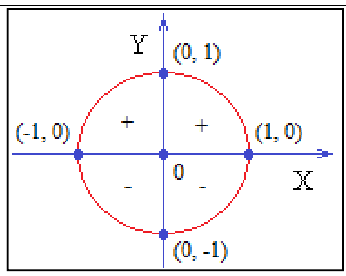
	<u>Características de las estructuras cooperativas</u> Para que exista el aprendizaje cooperativo los grupos de aprendizaje deben considerar ciertas “características que debe reunir una actividad para ser cooperativa: ★ Interdependencia positiva: Cada miembro del equipo aprende por su pertenencia a él, por la colaboración y aportaciones de todos, con un objetivo común. El éxito del equipo depende del trabajo de todos sus miembros. ★ Responsabilidad individual: Cada miembro del equipo es responsable de una parte del trabajo, de manera que el éxito del equipo depende de todos. ★ Participación igualitaria: Todos los miembros del equipo deben participar, todos cuentan. ★ Interacción simultánea: El trabajo cooperativo requiere una interacción entre todos los miembros del equipo, respetando unos turnos y unos tiempos.
08h45	Entrega de texto de estudio de las características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente. e indicaciones sobre el trabajo en grupo a realizar. <u>Asignación de roles</u> ○ Analista: Relaciona los conceptos y las estrategias actuales con el material previamente estudiado y con los marcos cognitivos existentes. ○ Crítico de ideas: Cuestiona intelectualmente a sus compañeros criticando sus ideas, al mismo tiempo que les transmite su respeto en tanto personas. ○ Encargado de ampliar: Amplía las ideas y conclusiones de los miembros del grupo, agregando nueva información o señalando consecuencias.

	○ Encargado de buscar fundamentos: Les pide a los miembros del grupo que fundamenten sus respuestas y conclusiones con hechos o razonamientos. ○ Encargado de llevar un registro: Anota las decisiones y redacta el informe del grupo.
09h35	Desintegración del grupo y aplicación individual del pos test.

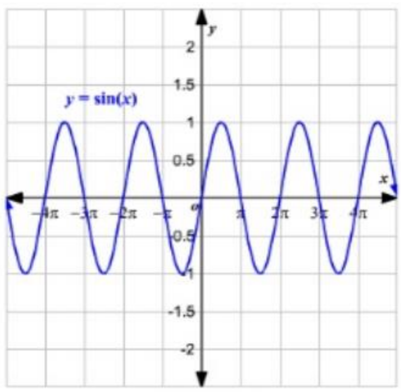
★ **Texto de estudio**

<u>Aprendizaje de las características de las funciones trigonométricas seno:, coseno y tangente: Dominio, recorrido, ceros, monotonía, simetría y periodicidad</u>

	Cuadrante			
Función	I	II	III	IV
Sen θ	+	+	-	-
Cos θ	+	-	-	+
Tan θ	+	-	+	-



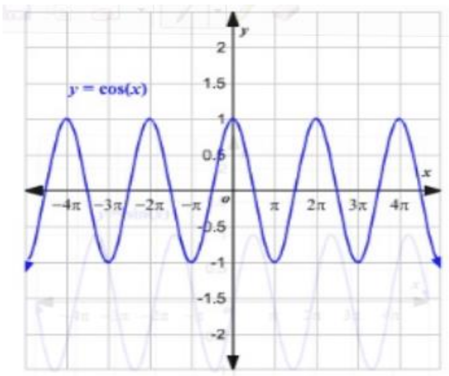
♣ **"Aprendizaje de las características de la función Seno**



Dominio: IR
Recorrido: { y ∈ IR | -1 ≤ y ≤ 1 }
Ceros: la función se anula para x=0, x=$\pm\pi$, x= $\pm 2\pi$, x= $\pm 3\pi$ y y en general para x= kπ, con k∈ Z

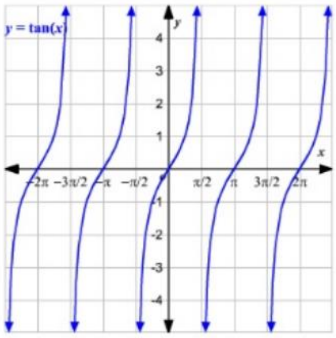
Monotonía: El gráfico es creciente en los intervalos [0, $\pi/2$[y]3π/2 , 2 π] y decreciente en el intervalo]π/2, 3 π/2]
Simetría: Para a función sen x se cumple sen(-x)=-sen(-x), luego es una función impar por consiguiente, es simétrica respecto al origen de coordenadas cartesianas.
Periodicidad: La función seno cumple que sen x=sen(x+2k π) con k ∈ Z, luego es una función de periodo 2 π.

- **Aprendizaje de las características de la función coseno**



Dominio: IR
Recorrido: { y∈ IR | -1 ≤ y ≤ 1 }
Ceros: la función se anula para x=$\pm\pi/2$, x=$\pm$ $3\pi/2$, x= $\pm$5 $\pi/2$… y en general para x=(2k+1) $\pi/2$, con k ∈ Z.
Monotonía: El gráfico es decreciente en los intervalos [0, π] y creciente en] π, 2].
Simetría: La función coseno se cumple que cos x=cos (-x), luego esta función es par por lo tanto es simétrica con respecto al eje y.
Periodicidad: La función coseno se cumple que cos x=cos (x+2k π) con k ∈ Z con un periodo de 2 π.

★ **Aprendizaje de las características de la Función Tangente**



Dominio: { x∈R | x ≠ π/2 (2k + 1) }
Recorrido: *IR*
Ceros: la función se anula para x=0, x=$\pm\pi$, x= $\pm 2\pi$ y en general para x= kπ, con k∈ Z
Monotonía: El gráfico es creciente en $]-\pi/2$, $\pi/2[$
Simetría: Para a función tangente cumple tan(-x)=-tan(x),es una función impar *Periodicidad:* La función seno cumple que tanx=tan(x+ kπ) con k ∈ Z, luego es una función de periodo π.
Asíntotas: La función no está definida para los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$; siendo las asíntotas las rectas x= (2k+1) $\pi/2$ con k ∈ Z.

(Galindo, 2012)

Planificación Didáctica N°6

Técnica de aprendizaje cooperativo

Enseñanza acelerada por equipos

★ **Tema:** El uso de la TAC Enseñanza acelerada por equipos” para el aprendizaje de las funciones trigonométricas, cotangente, secante y cosecante.

★ **Datos informativos:**

- **Institución Educativa:** Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio.
- **Alumnos:** Segundo Año de bachillerato General Unificado.
- **Investigador:** Mónica Janeth Armijos Labanda

- **Fecha:** -------
- **Período:** 8:05-9:45

★ **Objetivos:**

◊ Fortalecer el aprendizaje de funciones trigonométricas haciendo uso de la técnica de aprendizaje cooperativo (TAC) << Enseñanza acelerada por equipos>>.

◊ Definir y comprender las características de las funciones trigonométricas.

◊ Identificar las características de las funciones trigonométricas

★ **Normas de trabajo:**

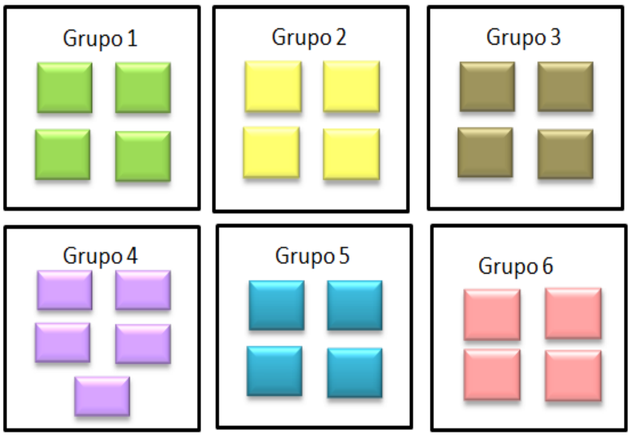
◊ Se debe resolver el pre test y postes, con la mayor honestidad posible y luego devolverlos.

◊ La lectura que se realiza debe ser comprensiva, puede utilizar algunas técnicas que le permitan la comprensión de la lectura tales como el subrayado, resumen, etc. La que usted considere más adecuada.

◊ Se pueden hacer preguntas durante el desarrollo de la clase, siempre que sean pertinentes y de acuerdo al tema.

★ **Metodología de trabajo**

Hora	**Actividad**
08:20	Tomar listas a los alumnos
08h25	Retroalimentación sobre el tema anterior
08h30	Planteamiento del tema de estudio
08h32	Aplicación de pre test
08h40	Conformación de grupos de cuatro personas con distinto nivel de conocimiento



<u>La disposición de los grupos en el aula</u>

Al disponer el aula para el trabajo en grupos cooperativos, el docente debe tener presentes las siguientes pautas:

1) Los miembros de un grupo de aprendizaje deben sentarse juntos y de forma tal que puedan mirarse a la cara.
2) Todos los alumnos deben estar en condiciones de ver al docente al frente del aula sin tener que retorcerse en sus sillas o adoptar una posición incómoda.
3) Los distintos grupos deben estar lo bastante separados como para que no interfieran unos con otros.

<u>Características de las estructuras cooperativas</u>

Para que exista el aprendizaje cooperativo los grupos de aprendizaje deben considerar ciertas “características que debe reunir una actividad para ser cooperativa:

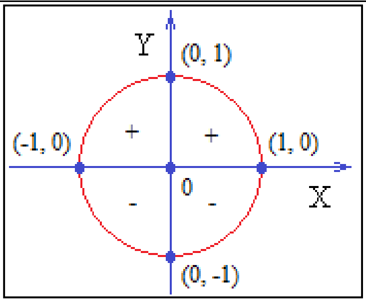
- Interdependencia positiva: Cada miembro del equipo aprende por su pertenencia a él, por la colaboración y aportaciones de todos, con un objetivo común. El éxito del equipo depende del trabajo de todos sus miembros.

	★ Responsabilidad individual: Cada miembro del equipo es responsable de una parte del trabajo, de manera que el éxito del equipo depende de todos. ★ Participación igualitaria: Todos los miembros del equipo deben participar, todos cuentan. Interacción simultánea: El trabajo cooperativo requiere una interacción entre todos los miembros del equipo, respetando unos turnos y unos tiempos.
08h45	Entrega de texto de estudio de las características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente. e indicaciones sobre el trabajo en grupo a realizar. <u>Asignación de roles</u> ○ Crítico de ideas: Cuestiona intelectualmente a sus compañeros criticando sus ideas, al mismo tiempo que les transmite su respeto en tanto personas. ○ Encargado de ampliar: Amplía las ideas y conclusiones de los miembros del grupo, agregando nueva información o señalando consecuencias. ○ Encargado de buscar fundamentos: Les pide a los miembros del grupo que fundamenten sus respuestas y conclusiones con hechos o razonamientos. ○ Encargado de llevar un registro: Anota las decisiones y redacta el informe del grupo. ○ Verificador: Verifica la validez del trabajo del grupo en función de las instrucciones, del tiempo disponible y del sentido común
09h35	Desintegración del grupo y aplicación individual del pos test.

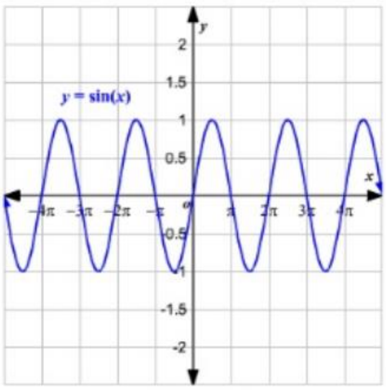
★ **Texto de estudio**

Aprendizaje de las características de las funciones trigonométricas seno:, coseno y tangente: Dominio, recorrido, ceros, monotonía, simetría y periodicidad

	Cuadrante			
Función	I	II	III	IV
Csc θ	+	-	+	-
Sec θ	+	-	-	+
Cot θ	+	+	-	-

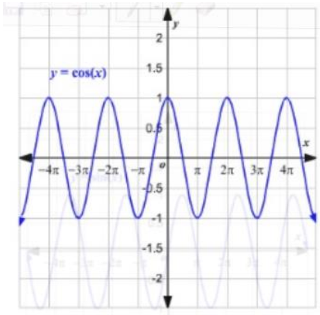


"Aprendizaje de las características de la función Seno



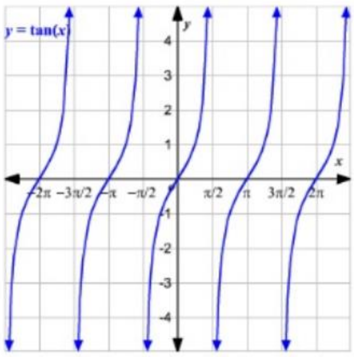
Dominio: IR	
Recorrido: { y ∈ IR | -1 ≤ y ≤ 1 }	
Ceros: la función se anula para x=0, x=$\pm\pi$, x= $\pm 2\pi$, x= $\pm 3\pi$ y y en general para x= kπ, con k∈ Z	
Monotonía: El gráfico es creciente en los intervalos [0, $\pi/2$[y]3π/2 , 2 π] y decreciente en el intervalo]π/2, 3 π/2]	
Simetría: Para a función sen x se cumple sen(-x)=-sen(-x), luego es una función impar por consiguiente, es simétrica respecto al origen de coordenadas cartesianas.	
Periodicidad: La función seno cumple que sen x=sen(x+2k π) con k ∈ Z, luego es una función de periodo 2 π.	

♣ Aprendizaje de las características de la función coseno



Dominio: IR
Recorrido: { y∈ IR | -1 ≤ y ≤ 1 }
Ceros: la función se anula para x=$\pm\pi/2$, x=$\pm$ $3\pi/2$, x= $\pm 5\pi/2$… y en general para x=(2k+1) $\pi/2$, con k ∈ Z.
Monotonía: El gráfico es decreciente en los intervalos [0, π] y creciente en] π, 2].
Simetría: La función coseno se cumple que cos x=cos (-x), luego esta función es par por lo tanto es simétrica con respecto al eje y.
Periodicidad: La función coseno se cumple que cos x=cos (x+2k π) con k ∈ Z con un periodo de 2 π.

★ Aprendizaje de las características de la Función Tangente



Dominio: { x∈R | x ≠ π/2 (2k + 1) }
Recorrido: IR
Ceros: la función se anula para x=0, x=$\pm\pi$, x= $\pm 2\pi$ y en general para x= k π, con k∈ Z
Monotonía: El gráfico es creciente en]$-\pi/2$, π/2[

Simetría: Para a función tangente cumple tan(-x)=-tan(x),es una función impar *Periodicidad:* La función seno cumple que tanx=tan(x+ kπ) con k ∈ Z, luego es una función de periodo π.
Asíntotas: La función no está definida para los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$; siendo las asíntotas las rectas x= (2k+1) $\pi/2$ con k ∈ Z.

(Galindo, 2012)

4. EL TALLER PEDAGÓGICO COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA APLICAR TÉCNICAS DE APRENDIZAJE COOPERATIVO PARA POTENCIAR EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

- Taller Pedagógico

  - **Definición de taller**

“El aula-taller es un espacio donde se ejecutan actividades educativas o se llevan a cabo situaciones de enseñanza aprendizaje conducentes a la solución de problemas reales, con la participación activa del docente y de los estudiantes, organizados por medio de la elaboración de proyectos.

El aula-taller se constituye en ámbito de una relación entre docente y estudiante, mutuamente modificante, abierta al cambio, que acepta el error e integra la teoría y la práctica (Parry, 1996). Para conducir la estrategia del aula-taller, aprender esa experiencia, es, sin duda, indispensable un docente que disfrute de la tarea, que transforme el dilema en problema, que no sacralice la estrategia y esté dispuesto a la ruptura de hábitos, a la aceptación de divergencias y disensos (Lensmire, 1994). Este docente pensante, capaz de ejercer su autonomía, interpreta la trasgresión como base del acto creativo y está dispuesto a develar lo oculto de un problema. Los estudiantes, por su lado, sin importar la edad ni los objetivos enunciados, constituyen un grupo con intereses coincidentes que trabajan a veces solos, o en pequeños subgrupos; otras veces trabajarán integrados totalmente.

El número de participantes no debe exceder los quince o veinte y las reuniones se deben realizar con una frecuencia establecida. Las actividades podrán incluir momentos de acción y vivencia, de reflexión y conceptualización. La duración de las sesiones de trabajo dependerá de las características del grupo, del tipo de problema y de las posibilidades que ofrezca el contexto (Lensmire,1994; Parry, 1996.)

★ **El papel del docente**

- Considerarse a sí mismos coordinadores de grupos basados en la autogestión.
- Reservarse el rol de coordinadores, conductores, animadores y orientadores y ceder el protagonismo al grupo.
- Facilitar todos los medios que les permitan a los estudiantes acceder a la máxima información posible para la selección y solución de los problemas a trabajar.
- Coparticipar con el grupo en la formulación de los objetivos de aprendizaje.
- Facilitar ejes flexibles para el logro de esos objetivos.
- Tener como propósito muy especial el que los estudiantes se capaciten en el logro de las técnicas de estudio (dirigido, sugerido y autónomo) y de trabajo intelectual, destacando la elaboración de proyectos integrales de trabajo), para orientar el autoaprendizaje.
- Favorecer en todos los casos situaciones de aprendizaje por el método del descubrimiento: observando, planteándose problemas, formulándose hipótesis o preguntas de investigación, experimentando con las hipótesis o buscando respuestas a esas preguntas, concluyendo y, finalmente, elaborando el proyecto (Lensmire, 1994; Parry, 1996).

★ **El papel del alumno**

- Sentirse actores principales de las diferentes actividades que se realicen.
- Demostrar curiosidad por la realidad circundante.
- Participar activamente de las actividades organizadas.

- Comprometerse con los proyectos de trabajo que se realicen
- Responsabilizarse personalmente de las acciones que estén a su cargo.
- Investigar con libertad y autonomía y procurar el máximo posible de control de la subjetividad.
- Actuar con la creatividad máxima de que sean capaces.
- No envanecerse con los éxitos ni deprimirse con los fracasos que, seguramente encontrará en su actuación en el grupo.
- Manifestar creciente autonomía en su trabajo (Lensmire, 1994; Parry, 1996)”).” (Villalobos)

★ **Pasos para un buen taller**

Los pasos para la realización de un taller se detallan a continuación

- “Planeación del Taller
  - ◊ Definir objetivos: es importante que concretemos lo que queremos lograr con el taller por ejemplo: ¿se intenta transmitir nueva información?, ¿queremos cambiar comportamientos?, etc
  - ◊ Información de los participantes: obtener información de los que asistirán al taller, ejemplo: edad, nivel educativo actualmente cursado, número de asistentes, etc
  - ◊ Diseñar métodos de enseñanza y actividades: formular los métodos de enseñanza conforme a las actividades y de acuerdo a la temática que se abordará, ejemplo: videos, técnicas de grupo, diapositivas, etc.
- Realización del taller
  - ◊ Presentación : permitir que los participantes se conozcan , realizar técnicas de presentación
  - ◊ Enunciar objetivos: contar al grupo lo que se busca lograr con el taller , establecer reglas y enunciar actividades que se harán, pedir retroalimentación
  - ◊ Crear ambiente adecuado: si se hace correctamente los pasos anteriores, se logara una buena atmósfera

- ◊ Participación activa y resolución de conflictos: permitir que todos los asistentes participen y busquen solucionar los conflictos
- ◊ Proporcionar información: dar conocimientos generales de la temática del taller
- ◊ Recordar los aprendizajes obtenidos: hacer un recuento de todo lo enseñado para generar conexiones de aprendizaje
- ◊ Cambio de actividades: si es necesario, cambia tus actividades, es por eso que se te pide que tengas unas actividades extras.

- Evaluación
  - ◊ Resumir la sesión y pedir retroalimentación: es importante hacer un resumen breve para que realmente se haga un aprendizaje significativo y la retroalimentación te ayuda a ti, a mejorar.” (Slideshare, 2010)

Talleres para aplicación de la alternativa

4.1.1. Taller 1.- El uso de la TAC “rompecabezas” para el aprendizaje de los orígenes y aportadores de las funciones trigonométricas.

TEMA

El uso de la TAC “rompecabezas” para el aprendizaje de Los orígenes y los aportadores de las funciones trigonométricas.

RECURSOS

- Planificación Didáctica N°1
- Documento con la información sobre el origen y aportadores de las funciones trigonométricas
- Marcadores
- Borrador
- Pizarra

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Los resultados de aprendizaje obtenidos se los evidenciará después de haber aplicado el pre test y otros resultados evidenciaremos después de haber culminado con el taller cuando se aplique el pre test, y mediante una ficha de observación.

- *CONCLUSIONES*

Se elaborarán al término del taller

- *RECOMENDACIONES*

Se elaborarán al término del taller, para cada conclusión una recomendación

- *BIBLIOGRAFÍA*

- *Wiki Matemática*. (18 de Mayo de 2010). Recuperado el 21 de Enero de 2015, de Origen de las funciones Trigonométricas: http://www.wikimatematica.org/index.php?title=Origen_de_las_Funciones_Trigonometricas
- Pérez, V. (19 de Octubre de 2010). *La Guía*. Recuperado el 21 de Enero de 2015, de Historia de la trigonometría: http://matematica.laguia2000.com/general/historia-de-la-trigonometria
- *Mattrigonometría*. (24 de Noviembre de 2008). Recuperado el 21 de Enero de 2015, de Trigonometría: http://mattrigonometria.blogspot.mx/
- Achury, T. (23 de Octubre de 2011). *Trigonometría didáctica 10 b*. Recuperado el 21 de Enero de 2015, de Razones trigonométricas: http://trigonometriadidactica10b.blogspot.com/2011/10/personajes-que-aportaron-la_23.html

4.1.2. Taller 2.- El uso de la TAC “Student teams achievement division (Divisiones de rendimiento por equipos), para el aprendizaje de la utilidad a la humanidad de las funciones trigonométricas y aprendizaje de conceptos básico de geometría y trigonometría.

- *TEMA*

El uso de la TAC “Student teams achievement division (Divisiones de rendimiento por equipos), para el aprendizaje de la utilidad a la humanidad de las funciones trigonométricas y aprendizaje de conceptos básico de geometría y trigonometría.

- *RECURSOS*
    - Planificación Didáctica N°2
    - Documento con la información utilidad a la humanidad de las funciones trigonométricas y conceptos básicos de trigonometría Marcadores
    - Borrador
    - Marcadores
    - Pizarra
- *RESULTADOS DE APRENDIZAJE*

  Los resultados de aprendizaje obtenidos se los evidenciará después de haber aplicado el pre test y otros resultados evidenciaremos después de haber culminado con el taller cuando se aplique el pre test, y mediante una ficha de observación.
- *CONCLUSIONES*

  Se elaborarán al término del taller
- *RECOMENDACIONES*

  Se elaborarán al término del taller, para cada conclusión una recomendación
- *BIBLIOGRAFÍA*

    - Jiménez, G. J. (s.f.). *Academia.edu*. Recuperado el 28 de Enero de 2015, de Resumen Teórico.Funciones trigonométricas en la vida cotidiana: http://www.academia.edu/6123267/15_Funciones_trigonometricas_en_la_vida_cotidiana._Notafrancesco_doc
    - Galindo, E. (2012). *Matemática 2.* Quito: Prociencia Editores.
    - González, R. (5 de Marzo de 2009). *Funciones Trigonométricas*. Recuperado el 23 de Enero de 2015, de La Trigonometría: http://funcionestrigonometricas.blogspot.com/
    - González, R. (5 de Marzo de 2009). *Funciones Trigonométricas*. Recuperado el 23 de Enero de 2015, de La Trigonometría: http://funcionestrigonometricas.blogspot.com/
    - *Disfruta las matemáticas*. (2011). Recuperado el 16 de Febrero de 2015, de Ángulos: http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/angulos.html

4.1.3. Taller 3.- El uso de la TAC “Aprendizaje cooperativo guiado” para el aprendizaje de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo

- *TEMA*

El uso de la TAC “Aprendizaje cooperativo guiado” para el aprendizaje de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo

- *RECURSOS*
  - Planificación Didáctica N°3
  - Documento con la información texto las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo
  - Marcadores
  - Borrador
  - Pizarra
- *RESULTADOS DE APRENDIZAJE*

  Los resultados de aprendizaje obtenidos se los evidenciará después de haber aplicado el pre test y otros resultados evidenciaremos después de haber culminado con el taller cuando se aplique el pre test, y mediante una ficha de observación.
- *CONCLUSIONES*

  Se elaborarán al término del taller
- *RECOMENDACIONES*

  Se elaborarán al término del taller, para cada conclusión una recomendación
- *BIBLIOGRAFÍA*

  - Galindo, E. (2012). *Matemática 2.* Quito: Prociencia Editores.

4.1.4. Taller 4.- El uso de la TAC “Tutoría entre iguales” para el aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas en el círculo unitario.

- *TEMA*

El uso de la TAC "Tutoría entre iguales" para el aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas en el círculo unitario

- *RECURSOS*
  - Planificación Didáctica N°4
  - Documento con la información sobre la definición funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas en el círculo unitario
  - Marcadores
  - Borrador
  - Pizarra
- *RESULTADOS DE APRENDIZAJE*

  Los resultados de aprendizaje obtenidos se los evidenciará después de haber aplicado el pre test y otros resultados evidenciaremos después de haber culminado con el taller cuando se aplique el pre test, y mediante una ficha de observación.
- *CONCLUSIONES*

  Se elaborarán al término del taller
- *RECOMENDACIONES*

  Se elaborarán al término del taller, para cada conclusión una recomendación
- *BIBLIOGRAFÍA*

- Galindo, E. (2012). *Matemática 2.* Quito: Prociencia Editores.

4.1.5. Taller 5.- El uso de la TAC "Trabajo en equipo de logro individual" para el aprendizaje características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.

- *TEMA*

  El uso de la TAC "Trabajo en equipo de logro individual" para el aprendizaje características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.

- *RECURSOS*
  - Planificación Didáctica N°5
  - Documento con la información sobre características de las funciones trigonométricas
  - Marcadores
  - Borrador
  - Pizarra
- *RESULTADOS DE APRENDIZAJE*

  Los resultados de aprendizaje obtenidos se los evidenciará después de haber aplicado el pre test y otros resultados evidenciaremos después de haber culminado con el taller cuando se aplique el pre test, y mediante una ficha de observación.
- *CONCLUSIONES*

  Se elaborarán al término del taller
- *RECOMENDACIONES*

  Se elaborarán al término del taller, para cada conclusión una recomendación
- *BIBLIOGRAFÍA*

  - Galindo, E. (2012). Matemática 2. Quito: Prociencia Editores.
  - Calculo.cc. (s.f.). Recuperado el 7 de Enero de 2015, de Dominio y recorrido de la funciones trigonométricas: http://calculo.cc/temas/temas_bachillerato/primero_ciencias_sociales/funciones_elementales/teoria/dom_trigo.html

4.1.6. Taller 6.- El uso de la TAC "Enseñanza acelerada por equipos" para el aprendizaje de las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante

- *TEMA*

El uso de la TAC "Enseñanza acelerada por equipos" para el aprendizaje de las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante

- *RECURSOS*
  - Planificación Didáctica N°6

- Documento con la información sobre documento con información de funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante
- Marcadores
- Borrador
- Pizarra

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Los resultados de aprendizaje obtenidos se los evidenciará después de haber aplicado el pre test y otros resultados evidenciaremos después de haber culminado con el taller cuando se aplique el pre test, y mediante una ficha de observación.

CONCLUSIONES

Se elaborarán al término del taller

RECOMENDACIONES

Se elaborarán al término del taller, para cada conclusión una recomendación

BIBLIOGRAFÍA

- *Aritor*. (s.f.). Recuperado el 12 de Enero de 2015, de Funciones trigonométricas inversas: nometria/funciones_inversas.html
- López, D. (s.f.). *Matemáticas IES*. Recuperado el 17 de Febrero de 2015, de Leras griegas y símbolos matemáticos: http://matematicasies.com/Letras-griegas-y-simbolos-matematicos

5. VALORACIÓN DE LA EFECTIVIDAD DEL USO DE TÉCNICAS DE APRENDIZAJE COOPERATIVO PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS ESTUDIANTES DE 2ºAÑO DE BACHILLERATO GENERAL UNIFICADO, DE LA UNIDAD EDUCATIVA "FERNANDO SUÁREZ PALACIO" DE LA CIUDAD DE LOJA. PERÍODO 2014-2015.

- ¿Qué es efectividad?

La efectividad desde un punto de vista clínico que no está muy apartado del campo de la investigación es "La medida de efectividad de una intervención pretende conocer el resultado alcanzado por la misma es condiciones habituales de uso.

Las condiciones ideales mencionadas en el caso del análisis de eficacia, no están garantizadas. Aunque tal medida puede realizarse mediante un experimento, los estudios de efectividad por su propia naturaleza están relacionados con el método inductivo u observacional. De hecho si el estudio pretende ser un experimento, las condiciones en que éste se realice habrán de ser lo más parecidas posible a las que se dan en el ejercicio de la práctica médica habitual. Algunos autores refiriéndose al ámbito de los ensayos clínicos denominan explanatory trials a los primeros (ensayos de eficacia) y pragmatic trials a los segundos (ensayos de efectividad).

Al situarnos en la «vida real» no es seguro que quienes estén aplicando la intervención hayan seleccionado estrictamente a sus pacientes. Mucho más incierta aún es la garantía de uso en condiciones de excelencia técnica (capacitación, seguimiento de protocolo, toma disciplinada de medicación).

No es por tanto probable que la intervención o tecnología esté siendo usada en las condiciones bajo las cuales pudo haber demostrado su eficacia. En esas mismas debilidades radica sin embargo su virtud: ofrece la imagen del resultado en la realidad.

No es quimera, utopía o nominalismo (recuérdese aquí el significado lingüísticamente ortodoxo del Diccionario de la Real Academia Española). Así pues la tipología de estudios dirigidos a conocer resultados puede imaginarse como un continuo, en el que la medida del efecto de una intervención sanitaria puede hacerse en un extremo (eficacia) a través de la realización de un experimento muy riguroso, y en el otro (efectividad), analizando los resultados que acaecen espontáneamente recogidos de modo rutinario en registros epidemiológicos generales o específicos.

Entre uno y otro extremo estarían los estudios observaciones analíticos (cohortes con concurrentes, casos y controles) más cerca del ECCA, y los estudios observacionales descriptivos (más cerca de los registros epidemiológicos).

Investigadores y usuarios de la información proporcionada por los estudios, diseñarán o utilizarán una u otra clase de ellos en función de la pregunta de interés que se pretenda contestar o aplicar para decisiones clínicas o gestoras." (J.Conde, 2002)

- Modelo matemático de la r de Pearson

Para la realización de la presente investigación

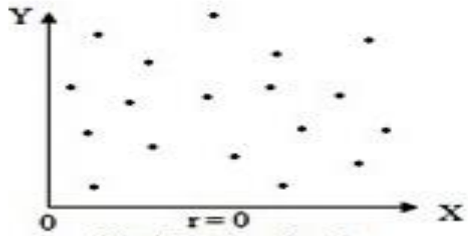
- Antes de aplicar la alternativa se tomará una prueba de conocimientos, actitudes y valores sobre la realidad temática.
- Aplicación de la TAC
- Aplicación de la misma prueba anterior después del taller.
- Comparación de los resultados con las pruebas aplicadas las pruebas tomadas antes del taller asignadas y después del taller
- La comparación se realizara utilizando el coeficiente de Pearson que se simboliza con (r)

- *Qué es la correlación r de Pearson*

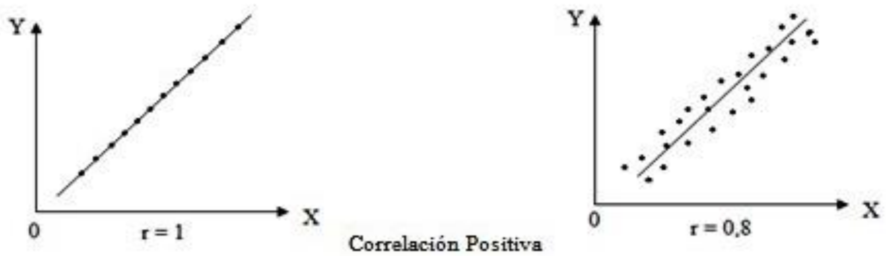
Se entiende por correlación aquella que nos permite expresar cuantitativamente, hasta qué grado están relacionadas dos variables o tienden a variar conjuntamente. Este grado de relación se mide a través de un coeficiente llamado coeficiente y se denota por la letra r.

“Dado dos variables, la correlación permite hacer estimaciones del valor de una de ellas conociendo el valor de la otra variable.

Los coeficientes de correlación son medidas que indican la situación relativa de los mismos sucesos respecto a las dos variables, es decir, son la expresión numérica que nos indica el grado de relación existente entre las 2 variables y en qué medida se relacionan. Son números que varían entre los límites +1 y -1. Su magnitud indica el grado de asociación entre las variables; el valor r = 0 indica que no existe relación entre las variables; los valores ± 1 son indicadores de una correlación perfecta positiva (al crecer o decrecer X, crece o decrece Y) o negativa (Al crecer o decrecer X, decrece o crece Y).



No hay correlación



Correlación Positiva

Correlación Negativa

Para interpretar el coeficiente de correlación utilizamos la siguiente escala:

Valor	Significado
-1	Correlación negativa grande y perfecta
-0,9 a -0,99	Correlación negativa muy alta
-0,7 a -0,89	Correlación negativa alta
-0,4 a -0,69	Correlación negativa moderada
-0,2 a -0,39	Correlación negativa baja
-0,01 a -0,19	Correlación negativa muy baja
0	Correlación nula
0,01 a 0,19	Correlación positiva muy baja
0,2 a 0,39	Correlación positiva baja
0,4 a 0,69	Correlación positiva moderada
0,7 a 0,89	Correlación positiva alta
0,9 a 0,99	Correlación positiva muy alta
1	Correlación positiva grande y perfecta

Para datos agrupados, el coeficiente de Correlación de Pearson se calcula aplicando la siguiente fórmula:

$$r = \frac{n \cdot \sum f \cdot dx \cdot dy - (\sum fx \cdot dx)\,(\sum fy \cdot dy)}{\sqrt{[n \cdot \sum fx \cdot dx^2 - (\sum fx \cdot dx)^2][n \cdot \sum fy \cdot dy^2 - (\sum fy \cdot dy)^2]}}$$

Donde

n = número de datos.

f = frecuencia de celda.

fx = frecuencia de la variable X.

fy = frecuencia de la variable Y.

dx = valores codificados o cambiados para los intervalos de la variable X, procurando que al intervalo central le corresponda dx = 0, para que se hagan más fáciles los cálculos.

dy = valores codificados o cambiados para los intervalos de la variable X, procurando que al intervalo central le corresponda dy = 0, para que se hagan más fáciles los cálculos.” (Ibujes)

★ *Interpretación*

“El coeficiente de correlación como previamente se indicó oscila entre –1 y +1 encontrándose en medio el valor 0 que indica que no existe asociación lineal entre las dos variables a estudio. Un coeficiente de valor reducido no indica necesariamente que no exista correlación ya que las variables pueden presentar una relación no lineal como puede ser el eso del recién nacido y el tiempo de gestación. En este caso el r infraestima la asociación al medirse linealmente. Los métodos no paramétrico estarían mejor utilizados en este paso para mostrar si las variables tienden a elevarse conjuntamente o a moverse en direcciones diferentes.

La significancia estadística de un coeficiente debe tenerse en cuenta conjuntamente con la relevancia clínica del fenómeno que estudiamos ya que coeficientes de 0.5 a 0.7 tienden ya a ser significativos como muestras pequeñas (6). Es por ello muy útil calcular el intervalo de confianza del r ya que en muestras pequeñas tenderá a ser amplio.

La estimación del coeficiente de determinación (r^2) nos muestra el porcentaje de la variabilidad de los datos que se explica por la asociación entre las dos variables. Como previamente se indicó la correlación elevada y estadísticamente significativa no tiene que asociarse a causalidad. Cuando objetivamos que dos variables están correlacionadas diversas razones pueden ser la causa de dicha correlación:
a) puede que X influencie o cause Y,
b) puede que influencie o cause X,
c) X e Y pueden estar influenciadas por terceras variables que hace que se modifiquen ambas a la vez.

El coeficiente de correlación no debe utilizarse para comparar dos métodos que intentan medir el mismo evento, como por ejemplo dos instrumentos que miden la tensión arterial. El coeficiente de correlación mide el grado de asociación entre dos cantidades pero no mira el nivel de acuerdo o concordancia. Si los instrumentos de medida miden sistemáticamente cantidades diferentes uno del otro, la correlación puede ser 1 y su concordancia ser nula" (Fernández & Díaz., 2001)

f. METODOLOGÍA

Diseño de la investigación

La investigación responde a un diseño diagnóstico, descriptivo y experimental.

El diagnóstico es un estudio derivado de un enfoque pedagógico debidamente fundamentado del aprendizaje de funciones trigonométricas, tomando en cuenta elementos históricos, tendencias actuales, contenidos de aprendizaje organizacional del proceso, prácticas formas de evaluación, analizado desde la teoría socio-cultural de Vygotsky.

La investigación es de tipo experimental en razón que se va a considerar los siguientes aspectos.

- Un conjunto de aprendizajes sobre funciones trigonométricas que se quiere potenciar
- Técnicas de aprendizaje cooperativo **que intencionadamente se experimentara con propósitos de potenciación.**
- Un seminario didáctico mediador del proceso de transformación:
  - Taller 1.- El uso de la TAC "rompecabezas" para el aprendizaje de los orígenes y aportadores de las funciones trigonométricas.
  - Taller 2.- El uso de la TAC "Student teams achievement division (Divisiones de rendimiento por equipos), para el aprendizaje de la utilidad a la humanidad de las funciones trigonométricas y aprendizaje de conceptos básico de geometría y trigonometría.
  - Taller 3.- El uso de la TAC "Aprendizaje cooperativo guiado" para el aprendizaje de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo
  - Taller 4.- El uso de la TAC "Tutoría entre iguales" para el aprendizaje de la definición de funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas en el círculo unitario.

- Taller 5.- El uso de la TAC “Trabajo en equipo de logro individual” para el aprendizaje características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Taller 6.- El uso de la TAC “Enseñanza acelerada por equipos” para el aprendizaje de las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante

★ Un proceso de valoración de la efectividad de las técnicas de aprendizaje cooperativo en la potenciación del aprendizaje de funciones trigonométricas.

Matriz de métodos

Objetivos	Métodos
Elaborar una perspectiva teórica sobre el aprendizaje de funciones trigonométricas.	Método deductivo
Elaborar un diagnóstico de las deficiencias de los estudiantes o de las dificultades en el aprendizaje de funciones trigonométricas.	Método de diagnóstico
Diseñar un modelo alternativo de técnicas de aprendizaje cooperativo para que los estudiantes mejoren su aprendizaje de funciones trigonométricas.	Método de modelación
Utilizar el taller como técnica didáctica para experimentar el modelo de técnicas de aprendizaje cooperativo para mejorar el aprendizaje de funciones trigonométricas en los estudiantes de 2ºaño de Bachillerato General Unificado.	Taller pedagógico
Valorar el nivel de impacto del uso de técnicas de aprendizaje cooperativo en el mejoramiento del aprendizaje de funciones trigonométricas en los estudiantes de 2ºaño de Bachillerato General Unificado.	R de Pearson .

- ★ Método deductivo

“La Lógica contemporánea entiende la Deducción como una de las formas de *inferencia* o razonamiento lógico que mediante, la aplicación de la Lógica.

En la Ciencia contemporánea se emplea el método deductivo de investigación en la formulación o enunciación de sistemas de axiomas o conjunto de tesis de partida en una determinada teoría. Ese conjunto de axiomas es utilizado para deducir conclusiones a través del empleo metódico de las reglas de la Lógica.

Mediante el método deductivo de investigación es posible llegar a conclusiones directas, cuando deducimos lo particular sin intermediarios. Esto es un método deductivo directo. Cuando esto no es posible, requerimos el empleo del método deductivo indirecto en el que necesitamos operar con silogismo lógico. Mediante este método, concluimos lo particular de lo general, pero mediante la comparación con una tercera proposición. Es lo que se denomina silogismo.

El método deductivo de investigación permite inferir nuevos conocimientos o leyes aún no conocidas. Este método consiste en inducir una ley y luego deducir nuevas hipótesis como consecuencia de otras más generales. Por ejemplo: la ley gravitacional permitió deducir la forma elipsoidal de la Tierra; las leyes gravitacionales e hidrostáticas, permitieron la obtención de la ley de las mareas”. (Carvajal, 2013)

- “Lógica del método deductivo
  - ◊ Resumen: Un resumen es la reducción de un escrito en términos breves y precisos. Este género es el más utilizado para estudiar de manera autónoma, y uno de los trabajos escritos más solicitados en todos los niveles de la enseñanza. Se recomienda lo siguiente:
    - Redactar con claridad concentrándose únicamente en la parte esencial de la información
    - Respetar el orden seguido por el autor
    - No aportar ideas propias

- Ser conciso en la redacción
- Debe de ser un todo y representar la unidad del texto

- Síntesis: Denota las ideas principales de un texto, presenta las ideas generales del autora, por lo tanto casi siempre es el autor quien las publica. Es decir, el lector ciertamente puede expresar con sus propias palabras y estilo la idea principal del autor, cambiando el orden según sus intereses.

- Sinopsis: Es una recopilación de datos acerca de los puntos de una obra o tema en particular, para otorgar al espectador un extracto de los aspectos más relevantes del asunto, y formándole una visión general de una manera resumida y adecuada. En ella no se incluyen detalles del desenlace de la obra, pues se trata es de captar el interés del lector.

- Demostración: Esta parte de verdades establecidas, de las que se extraen todas las relaciones lógicas y evidentes para no dejar lugar a dudas de la conclusión, el principio o ley que se quiere demostrar como verdadero. Desde el punto de vista educativo, una demostración es una explicación visualizada de un hecho.

- Esquemas, mapas, gráficos: Son representaciones simplificadas de una realidad compleja. Su uso ayuda a comprender, memorizar y jerarquizar los elementos que la integran, engranándolos entre sí mediante vínculos conceptuales." (Castellano, 2011)

- Método de diagnóstico

"Se puede definir al diagnóstico como un proceso analítico que permite conocer la situación real de la organización en un momento dado para descubrir problemas y áreas de oportunidad, con el fin de corregir los primeros y aprovechar las segundas. En del diagnóstico se examinan y mejoran los sistemas y prácticas de la comunicación interna y externa de una organización en todos sus niveles" (Sanchez, 2011)

Método de diagnóstico participativo

“El Diagnóstico Participativo es un método para determinar, desde el punto de vista de los miembros de la comunidad, qué actividades son necesarias y pueden apoyarse; si los miembros de la comunidad aceptan las actividades propuestas por el personal externo y si tales actividades son razonables y prácticas

Los miembros de la comunidad, ayudados por el personal externo, pasan por un proceso en el cual identifican las condiciones que son necesarias para la realización exitosa de las actividades y acopian información para determinar si la comunidad reúne estas condiciones o si puede crearlas. El «marco referencial del diagnóstico» examina cada actividad en relación con las condiciones necesarias y elimina aquellas actividades para las que no se dan estas condiciones.

- Lógica del método

Con frecuencia la manera como las actividades están planificadas puede significar que ya se han tomado algunas decisiones sin recibir aportes de la comunidad. Puede ser

- ◊ Que los problemas y las soluciones a los problemas hayan sido determinados por el personal externo,
- ◊ Que se haya decidido en cuanto al financiamiento,
- ◊ que la administración nacional o local haya negociado con el personal externo o, en algunos casos, haya iniciado el proyecto,
- ◊ que se haya determinado una zona de trabajo y se hayan asignado roles específicos al personal de campo”. (Depósito de documentos de la FAO)

- ★ Método de modelación

“La modelación es el proceso mediante el cual se crea una representación o modelo para investigar la realidad.

El modelo científico es un instrumento de la investigación de carácter material o teórico, creado para reproducir el objeto que se está estudiando. Constituye una reproducción simplificada de la realidad que cumple una función heurística que permite descubrir nuevas relaciones y cualidades del objeto de estudio. Un modelo científico es la configuración ideal que representa de manera simplificada una teoría. Es un instrumento de trabajo que supone una aproximación intuitiva a la realidad y que tiene por función básica la de ayudar a comprender las teorías y las leyes. La aplicación del método de la modelación está íntimamente relacionada con la necesidad de encontrar un reflejo mediatizado de la realidad objetiva. De hecho el modelo constituye un eslabón intermedio entre el sujeto (investigador) y el objeto de investigación. La modelación es justamente el método mediante el cual se crea abstracciones con vistas a explicar la realidad”. (Ecured)

- Lógica del método de modelación

  - ◊ “Hacer un análisis objetivo y concreto del proceso existente, descubrir el conjunto de conexiones internas del proceso, en todos sus aspectos, movimiento y desarrollo.

  - ◊ Indagar los aspectos y los momentos contradictorios, considerando al proceso como una totalidad y como una unidad de contradicciones.

  - ◊ Examinar el conflicto interno de los opuestos, el desenvolvimiento de las luchas, sus cambios, alteración y sus tendencias

  - ◊ Descubrir y analizar conexiones y las relaciones del proceso con los otros procesos en su actividad y en su influencia recíproca.

  - ◊ Comprobar en la realidad todo aquello que ha sido resultado de la abstracción, de lo pensado y decidido generalizándolo y explicando racionalmente a partir de un sistema.

  - ◊ Profundizar y ampliar constantemente la investigación, sin tomas jamás el conocimiento teórico sistematizado como lo acabado, definitivo e inmutable.” (Scribd, 2011)

- ★ Taller pedagógico

El aula-taller se constituye en ámbito de una relación entre docente y estudiante, mutuamente modificante, abierta al cambio, que acepta el error e integra la teoría y la práctica (Parry, 1996). Para conducir la estrategia del aula-taller, aprender esa experiencia, es, sin duda, indispensable un docente que disfrute de la tarea, que transforme el dilema en problema, que no sacralice la estrategia y esté dispuesto a la ruptura de hábitos, a la aceptación de divergencias y disensos (Lensmire, 1994). Este docente pensante, capaz de ejercer su autonomía, interpreta la trasgresión como base del acto creativo y está dispuesto a develar lo oculto de un problema. Los estudiantes, por su lado, sin importar la edad ni los objetivos enunciados, constituyen un grupo con intereses coincidentes que trabajan a veces solos, o en pequeños subgrupos; otras veces trabajarán integrados totalmente. (Villalobos)

- o Lógica del taller pedagógico

Los pasos para la realización de un taller se detallan a continuación

- ◊ “Planeación del Taller
  - ∞ Definir objetivos: es importante que concretemos lo que queremos lograr con el taller por ejemplo: ¿se intenta transmitir nueva información?, ¿queremos cambiar comportamientos?, etc
  - ∞ Información de los participantes: obtener información de los que asistirán al taller, ejemplo: edad, nivel educativo actualmente cursado, número de asistentes, etc
  - ∞ Diseñar métodos de enseñanza y actividades: formular los métodos de enseñanza conforme a las actividades y de acuerdo a la temática que se abordará, ejemplo: videos, técnicas de grupo, diapositivas, etc.
- ◊ Realización del taller
  - ∞ Presentación : permitir que los participantes se conozcan , realizar técnicas de presentación
  - ∞ Enunciar objetivos: contar al grupo lo que se busca lograr con el taller , establecer reglas y enunciar actividades que se harán, pedir retroalimentación

- Crear ambiente adecuado: si se hace correctamente los pasos anteriores, se logara una buena atmósfera
- Participación activa y resolución de conflictos: permitir que todos los asistentes participen y busquen solucionar los conflictos
- Proporcionar información: dar conocimientos generales de la temática del taller
- Recordar los aprendizajes obtenidos: hacer un recuento de todo lo enseñado para generar conexiones de aprendizaje
- Cambio de actividades: si es necesario, cambia tus actividades, es por eso que se te pide que tengas unas actividades extras.

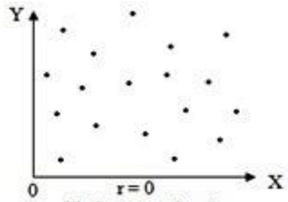
◊ Evaluación

- Resumir la sesión y pedir retroalimentación: es importante hacer un resumen breve para que realmente se haga un aprendizaje significativo y la retroalimentación te ayuda a ti, a mejorar." (Slideshare, 2010)

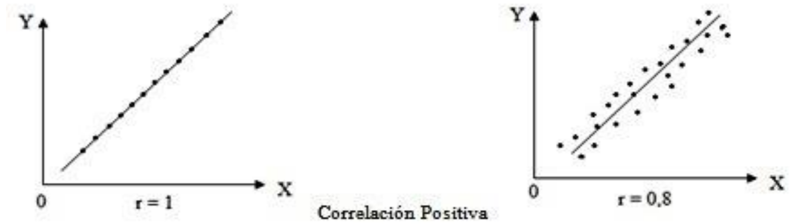
★ r de Pearson

"Dado dos variables, la correlación permite hacer estimaciones del valor de una de ellas conociendo el valor de la otra variable.

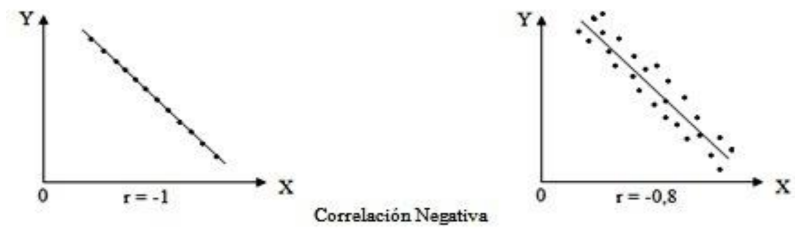
Los coeficientes de correlación son medidas que indican la situación relativa de los mismos sucesos respecto a las dos variables, es decir, son la expresión numérica que nos indica el grado de relación existente entre las 2 variables y en qué medida se relacionan. Son números que varían entre los límites +1 y -1. Su magnitud indica el grado de asociación entre las variables; el valor $r = 0$ indica que no existe relación entre las variables; los valores ± 1 son indicadores de una correlación perfecta positiva (al crecer o decrecer X, crece o decrece Y) o negativa (Al crecer o decrecer X, decrece o crece Y).



No hay correlación



Correlación Positiva



Correlación Negativa

Para interpretar el coeficiente de correlación utilizamos la siguiente escala:

Valor	**Significado**
-1	Correlación negativa grande y perfecta
-0,9 a -0,99	Correlación negativa muy alta
-0,7 a -0,89	Correlación negativa alta
-0,4 a -0,69	Correlación negativa moderada
-0,2 a -0,39	Correlación negativa baja
-0,01 a -0,19	Correlación negativa muy baja
0	Correlación nula
0,01 a 0,19	Correlación positiva muy baja
0,2 a 0,39	Correlación positiva baja
0,4 a 0,69	Correlación positiva moderada
0,7 a 0,89	Correlación positiva alta
0,9 a 0,99	Correlación positiva muy alta
1	Correlación positiva grande y perfecta

Para datos agrupados, el coeficiente de Correlación de Pearson se calcula aplicando la siguiente fórmula:

$$r = \frac{n \cdot \sum f \cdot dx \cdot dy - (\sum fx \cdot dx)(\sum fy \cdot dy)}{\sqrt{[n \cdot \sum fx \cdot dx^2 - (\sum fx \cdot dx)^2][n \cdot \sum fy \cdot dy^2 - (\sum fy \cdot dy)^2]}}$$

Donde

n = número de datos.

f = frecuencia de celda.

fx = frecuencia de la variable X.

fy = frecuencia de la variable Y.

dx = valores codificados o cambiados para los intervalos de la variable X, procurando que al intervalo central le corresponda dx = 0, para que se hagan más fáciles los cálculos.

dy = valores codificados o cambiados para los intervalos de la variable X, procurando que al intervalo central le corresponda dy = 0, para que se hagan más fáciles los cálculos." (Ibujes)

Interpretación

"El coeficiente de correlación como previamente se indicó oscila entre –1 y +1 encontrándose en medio el valor 0 que indica que no existe asociación lineal entre las dos variables a estudio. Un coeficiente de valor reducido no indica necesariamente que no exista correlación ya que las variables pueden presentar una relación no lineal como puede ser el eso del recién nacido y el tiempo de gestación. En este caso el r infraestima la asociación al medirse linealmente. Los métodos no paramétrico estarían mejor utilizados en este paso para mostrar si las variables tienden a elevarse conjuntamente o a moverse en direcciones diferentes.

La significancia estadística de un coeficiente debe tenerse en cuenta conjuntamente con la relevancia clínica del fenómeno que estudiamos ya que coeficientes de 0.5 a 0.7 tienden ya a ser significativos como muestras pequeñas (6). Es por ello muy útil calcular el intervalo de confianza del r ya que en muestras pequeñas tenderá a ser amplio.

La estimación del coeficiente de determinación (r^2) nos muestra el porcentaje de la variabilidad de los datos que se explica por la asociación entre las dos variables. Como previamente se indicó la correlación elevada y estadísticamente significativa no tiene que asociarse a causalidad. Cuando objetivamos que dos variables están correlacionadas diversas razones pueden ser la causa de dicha correlación:

a) epude que X influencie o cause Y,

b) puede que influencie o cause X,

c) X e Y pueden estar influenciadas por terceras variables que hace que se modifiquen ambas a la vez.

El coeficiente de correlación no debe utilizarse para comparar dos métodos que intentan medir el mismo evento, como por ejemplo dos instrumentos que miden la tensión arterial. El coeficiente de correlación mide el grado de asociación entre dos cantidades pero no mira el nivel de acuerdo o concordancia. Si los instrumentos de medida miden sistemáticamente cantidades diferentes uno del otro, la correlación puede ser 1 y su concordancia ser nula" (Fernández & Díaz., 2001)

- **Resultados de la investigación**

Para construir los resultados se tomará en cuenta el diagnóstico del aprendizaje de las funciones trigonométricas y la aplicación de las técnicas de aprendizaje cooperativo, por tanto existirán dos campos de resultados:

- Resultados de diagnóstico del aprendizaje de funciones trigonométricas
- Resultados de la aplicación de técnicas de aprendizaje cooperativo.

- **Discusión**

La discusión contendrá los siguientes acápites:

- Discusión con respecto del diagnóstico: hay o no hay dificultades del aprendizaje de funciones trigonométricas.
- Discusión en relación a la aplicación de las técnicas de aprendizaje cooperativo: dio o no dio resultado, cambió o no cambió el aprendizaje de funciones trigonométricas.

Conclusiones

La elaboración de las conclusiones se realizará a través de los siguientes apartados:

- Conclusiones con respecto al diagnóstico del aprendizaje de funciones trigonométricas
- Conclusiones con respecto de la aplicación de técnicas de aprendizaje cooperativo.

Recomendaciones

Al término de la investigación se recomendará las técnicas de aprendizaje cooperativo, de ser positiva su valoración, en tanto la alternativa se dirá que:

- Las técnicas de aprendizaje cooperativo son de vital importancia y deben ser utilizadas por los docentes y practicada por los estudiantes.
- Recomendar las técnicas de aprendizaje cooperativo para superar los problemas del aprendizaje de funciones trigonométricas.
- Son observadas y elaboradas para que los actores educativos estudiantes, profesores e inclusive los directivos tomen a la propuesta del uso de las técnicas de aprendizaje cooperativo para superar los problemas del aprendizaje del movimiento ondulatorio.

Población y muestra

Participantes	Población	Muestra
Estudiantes	25	-------

g. CRONOGRAMA

Cronograma de actividades								
Tiempo / Actividades	2015							2016
	Ene-Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul-Nov	Dic	Ene-Jun
Aprobación del proyecto de tesis								
Construcción del título								
Construcción de preliminares								
Construcción de introducción y resúmenes en castellano e inglés								
Construcción de revisión de literatura								
Construcción de materiales y métodos								
Construcción de resultados								
Construcción de discusión								
Construcción de conclusiones y recomendaciones								
Construcción de la bibliografía								
Construcción de anexos								
Construcción de informes de tesis								
Elaboración del artículo científico								
Procesos de grado privado								
Agregado de sugerencias del tribunal de la tesis								
Proceso de grado público								

h. PRESUPUESTO Y FINANCIAMIENTO

RECURSOS HUMANOS

Aspirante al Grado: Mónica Janeth Armijos Labanda

Director (a) de Tesis: ....

Estudiantes de 2ºaño de Bachillerato General Unificado, de la Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio

MATERIALES Y SERVICIOS

- Material de Escritorio
- Material Bibliográfico
- Accesorios de Computación
- Servicios de reproducción de información
- Anillado y empastado del trabajo
- Movilización, transporte y comunicaciones
- Imprevistos

PRESUPUESTO

El detalle de los rubros económicos a invertir en la presente práctica profesional se sujetará al siguiente presupuesto:

INGRESOS	
APORTACION	VALOR
Mónica Janeth Armijos Labanda	1200.00
Total	$ 1200.00

EGRESOS	
DETALLE	VALOR
Material de Escritorio	170.00
Material Bibliográfico	50.00
Accesorios de Computación	300.00
Servicios de reproducción de información	150.00
Anillado y empastado del trabajo	200.00
Movilización, transporte y comunicaciones	150.00
Imprevistos	180.00
TOTAL	$ 1200.00
Son: Mil doscientos dólares americanos.	
Financiamiento: Todos los valores económicos, resultante del proceso investigativo, serán asumidos en su totalidad por la aspirante al Grado de Licenciado en Ciencias de la Educación mención Físico Matemáticas.	

i. BIBLIOGRAFÍA

Achury, T. (23 de Octubre de 2011). *Trigonometría didáctica 10 b*. Recuperado el 21 de Enero de 2015, de Razones trigonométricas: http://trigonometriadidactica10b.blogspot.com/2011/10/personajes-que-aportaron-la_23.html

Alonso, P., López, A., Martin, P., Figueroa, V., Solari, M., & Rasskin., I. (s.f.). *Aprendizaje cooperativo.* Recuperado el 29 de Noviembre de 2014, de http://www.google.com.ec/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CBwQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.smsavia.com%2Fsites%2Fdefault%2Ffiles%2Felemento%2Ffichero%2FGu%25C3%25ADas%2520espec%25C3%25ADficas%2520para%2520los%2520programas%2520de%2520innovaci%25

Aritor. (s.f.). Recuperado el 12 de Enero de 2015, de Funciones trigonométricas inversas: nometria/funciones_inversas.html

Calculo.cc. (s.f.). Recuperado el 7 de Enero de 2015, de Dominio y recorrido de la funciones trigonométricas: http://calculo.cc/temas/temas_bachillerato/primero_ciencias_sociales/funciones_elementales/teoria/dom_trigo.html

Carvajal, L. (18 de Enero de 2013). *Lizardo Carvajal*. Recuperado el 5 de Marzo de 2015, de Método deductivo: http://www.lizardo-carvajal.com/el-metodo-deductivo-de-investigacion/

Castellano, L. (19 de Marzo de 2011). *Slideshare*. Recuperado el 5 de Marzo de 20015, de Método deductivo y inductivo: http://es.slideshare.net/LUZCASTELLANO/mtodos-deductivo-y-inductivo-7318991

Corella, J. (12 de Febrero de 2012). *Reflexiones sobre la evaluación educativa*. Recuperado el 15 de Febrero de 2015, de La evaluación dinámica: http://reflexionevaluacioneducativa.blogspot.com/2012/02/la-evaluacion-dinamica.html

Definición de. (s.f.). Recuperado el 29 de Enero de 2015, de Definición de radian: http://definicion.de/radian/

Depósito de documentos de la FAO. (s.f.). Recuperado el 5 de Marzo de 2015, de Sección 2 Los Métodos: http://www.fao.org/docrep/007/x9996s/x9996s02.htm

Disfruta las matemáticas. (2011). Recuperado el 16 de Febrero de 2015, de Ángulos: http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/angulos.html

Ecured. (s.f.). Recuperado el 12 de Enero de 2015, de Método de modelación: http://www.ecured.cu/index.php/M%C3%A9todo_de_modelaci%C3%B3n

Fernández, P., & Díaz., P. (30 de Marzo de 2001). *fisterra.com*. Recuperado el 5 de Marzo de 2015, de Relación entre variables cuantitativas: http://www.fisterra.com/mbe/investiga/var_cuantitativas/var_cuantitativas2.pdf

Galindo, E. (2012). *Matemática 2.* Quito: Prociencia Editores.

Galindo, E. (2012). *Matemática 2.* Quito: Prociecia editores.

González, R. (5 de Marzo de 2009). *Funciones Trigonométricas*. Recuperado el 23 de Enero de 2015, de La Trigonometría: http://funcionestrigonometricas.blogspot.com/

Haniff, S. (18 de agosto de 2011). *Slideshare*. Recuperado el 17 de Febrero de 2015, de Funciones mentales superiores 2: http://es.slideshare.net/shanazhaniff/funciones-mentales-superiores-2

Hernández, V. (Agosto de 2000). *Razón y Palabra*. Recuperado el 17 de Febrero de 2015, de Lenguaje: Creación y expresión del pensamiento: http://www.razonypalabra.org.mx/anteriores/n19/19_vhernandez.html

Hiru.com. (s.f.). Recuperado el 29 de Enero de 2015, de Funciones Trigonométricas: http://www.hiru.com/matematicas/funciones-trigonometricas

Ibujes, M. O. (s.f.). Recuperado el 5 de Marzo de 2015, de http://www.google.com.ec/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=13&ved=0CCcQFjACOAo&url=http%3A%2F%2Frepositorio.utn.edu.ec%2Fbitstream%2F123456789%2F766%2F1%2FCoeficiente%2520de%2520Correlaci%25C3%25B3n%2520de%2520Karl%2520Pearson.docx&ei=t8D4VLmuEJPmgwS

J.Conde. (2002). Recuperado el 19 de Enero de 2015, de Eficacia y efectividad: una distinción útil para la práctica y la investigación clínicas: http://revistanefrologia.com/revistas/P1-E194/P1-E194-S123-A3494.pdf

Jiménez, G. J. (s.f.). *Academia.edu*. Recuperado el 28 de Enero de 2015, de Resumen Teórico.Funciones trigonométricas en la vida cotidiana: http://www.academia.edu/6123267/15_Funciones_trigonometricas_en_la_vida_cotidiana._Notafrancesco_doc

Johnson, D., & Johnson, R. (1999). *catedu.es.* Recuperado el 27 de Febrero de 2015, de El aprendizaje cooperativo en el aula: http://e-ducativa.catedu.es/50009129/sitio/upload/Profesores._El_AC_en_el_aula._D._y_R._Johnson.pdf

López, D. (s.f.). *Matemáticas IES*. Recuperado el 17 de Febrero de 2015, de Leras griegas y símbolos matemáticos: http://matematicasies.com/Letras-griegas-y-simbolos-matematicos

Mamani, Y., Pinto, S., & Torpo., R. (marzo de 2012). Recuperado el 15 de diciembre de 2014, de http://www.google.com.ec/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=8&sqi=2&ved=0CD8QFjAH&url=http%3A%2F%2Fwww.virtual.ucb.edu.bo%2Fpluginfile.php%2F1%2Fblog%2Fattachment%2F512%2FUNIVERSIDAD%2520CATOLICA%2520BOLIVIANA%2520SAN%2520PABLO.docx&ei=cRriVJGGMYm-ggT

Mattrigonometría. (24 de Noviembre de 2008). Recuperado el 21 de Enero de 2015, de Trigonometría: http://mattrigonometria.blogspot.mx/

Muños, M. (24 de septiembre de 2012). *La chakana*. Recuperado el 15 de diciembre de 2014, de http://psicologiaporlavida.blogspot.com/2012/09/la-zona-de-desarrollo-proximo.html

Orientared. (s.f.). Recuperado el 19 de enero de 2015, de El concepto de "desarrollo próximo" y la ZDP: http://www.orientared.com/articulos/vygotsky.php#top

Pérez, H. (23 de Marzo de 2011). *slideshare.* Recuperado el 13 de Febrero de 2015, de Paradigma sociocultural: http://es.slideshare.net/heae2002/paradigma-sociocultural-7364061

Pérez, V. (19 de Octubre de 2010). *La Guía*. Recuperado el 21 de Enero de 2015, de Historia de la trigonometría: http://matematica.laguia2000.com/general/historia-de-la-trigonometria

Pujolás Masét, P. (5-9 de Octubre de 2009). *mecd.gob.ec.* Recuperado el 28 de Diciembre de 2014, de Aprendizaje cooperativo y educación inclusiva:Una forma práctiva de aprender juntos alumnos diferentes: http://www.mecd.gob.es/dms-static/f4d240d3-55ad-474f-abd7-dca54643c925/2009-ponencia-jornadas-antiguas-pere-pdf.pdf

Pujolás, P. (s.f.). Recuperado el 14 de Noviembre de 2014, de Algunas Técnicas de aprendizaje cooperativo: http://www.aulalibre.es/IMG/pdf_DOC_7_Tecnicas_de_Trabajo_Cooperativo.pdf

Sanchez, J. (26 de Abril de 2011). *Slideshare*. Recuperado el 5 de Marzo de 2015, de Método de diagnóstico: http://es.slideshare.net/jesussanval/metodo-de-diagnostico

Sangrá, L. M. (14 de Mayo de 2013). *Universidad Zaragoza.* Recuperado el 27 de Noviembre de 2014, de Análisisd e Técnicas de Aprendizaje Colaborativo on-line(TAC) para la didáctica de las ciencias sociales: http://zaguan.unizar.es/record/12522?ln=es

Santisi, S. (2006). *Ecuaciones en Latex*. Recuperado el 26 de Enero de 2015, de http://web.fi.uba.ar/~ssantisi/works/ecuaciones_en_latex/4_1_Letras_griegas.html

Scribd. (2011). Recuperado el 16 de Enero de 2015, de La modelación como método científico: http://es.scribd.com/doc/96367818/La-Modelacion-como-metodo-cientifico-2#scribd

Serrano, S. (10 de marzo de 2012). *slideshare*. Recuperado el 15 de Febreo de 2015, de Funciones mentales de Vigotsky: http://es.slideshare.net/SarahiSerrano1/funciones-mentales-de-vigotsky

Sierra, P. P. (2006). Recuperado el 23 de Noviembre de 2014, de Implicacioness del aprendizaje de tipo cooperativo en las relaciones interpersonales y en el rendimiento académico: http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/4110/1/tesis_doctoral_patricia_poveda.pdf

Slideshare. (5 de diciembre de 2010). Recuperado el 17 de Febrero de 2015, de Cómo hacer un taller educativo: http://es.slideshare.net/46123/cmo-hacer-un-taller-educativo

Stigliano, D., & Gentile, D. (2008). Enseñar y aprender en grupos cooperativos: comunidades de diálogo y encuentro. En D. Stigliano, & D. Gentile, *Enseñar y aprender en grupos cooperativos: comunidades de diálogo y encuentro* (págs. 28-29). Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

Tusa, L. (9 de Febrero de 2015). Síntesis sobre el enfoque histório-cultural de Vigotsky. Loja, Loja, Ecuador.

Universidad Politécnica de Madrid. (2008). Recuperado el 15 de diciembre de 2014, de http://innovacioneducativa.upm.es/guias/Aprendizaje_coop.pdf

Villalobos, J. (s.f.). Recuperado el 20 de Enero de 2015, de El Aula-Taller como actividad pedagógica para promover la participación en un aula de clase: http://www.google.com.ec/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CBwQFjAA&url=http%3A%2F%2Ferevistas.saber.ula.ve%2Findex.ph

p%2Flegenda%2Farticle%2Fdownload%2F558%2F562&ei=D6zkVPiLCMKmggSCz4IY&usg=AFQjCNHKGRPj4ZR0GwgLZDe8uiq910H_kA&bvm=bv.85970519,d

Wiki Matemática. (18 de Mayo de 2010). Recuperado el 21 de Enero de 2015, de Origen de las funciones Trigonométricas: http://www.wikimatematica.org/index.php?title=Origen_de_las_Funciones_Trigonometricas

Withers, J. (s.f.). *Ehow*. Recuperado el 17 de Febrero de 2015, de Vigotsky y el desarrollo del lenguaje: http://www.ehowenespanol.com/vygotsky-desarrollo-del-lenguaje-sobre_108885/

OTROS ANEXOS

Anexo 1

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA COMUNICACIÓN

CARRERA DE FÍSICO MATEMÁTICAS

Encuesta sobre el aprendizaje de funciones trigonométricas

OBJETIVO:

Obtener información sobre las dificultades que se presentan en el aprendizaje de funciones trigonométricas, por lo que se le solicita sea preciso en la información, misma que tendrá un carácter de reservada.

1. **Encierre con un círculo la definición correcta de Función trigonométrica.**
   a) Son funciones que se derivan de los triángulos.
   b) Se definen como Funciones trigonométricas las que se derivan de la geometría elemental.
   c) Son funciones que se definen en base al seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante de un ángulo.
2. **Señala con una X las funciones trigonométricas.**

$\boxed{x = \frac{2\pi}{360}\alpha \text{ radianes}}$ ( )

$\boxed{Sen\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$ ( )

$\boxed{\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad x \neq 0}$ ( )

$\boxed{y = \text{sen } x}$ ( )

$\boxed{y = \cos x,}$ ( )

$\boxed{y = x^2 - 3x + 5}$ ( )

$\boxed{y = \text{tg } x}$ ( )

3. **Completa la definición de ecuación trigonométrica usando las palabras del recuadro:**

la Incógnita	los signos	las funciones

Una ecuación se llama trigonométrica si ella contiene ____________ sólo bajo____________ de __________ trigonométricas.

4. **Una con líneas las identidades con su propiedad correspondiente:**

Paridad	$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,$
Identidades circulares	$\sin(-\theta) = -\sin\theta,$ $\cos(-\theta) = \cos\theta.$
Ley de cosenos	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$
Suma y diferencia	$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$
Ángulo doble	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
Ángulo mitad	$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$
Producto	$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$
Tangente	$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

5. **Encierra en un círculo las funciones inversas:**

$y = \text{sen}\, x,$ $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1$ $y = \sec^{-1} x,$

$y = \arcsin x,$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$ $y = \arccos x,$

6. **Señale con V si es verdadero, y con F si es falso.**

a) Las funciones trigonométricas son sen x; cos x; tg x; ctg x; sc x; csc x. ( )

b) Las funciones trigonométricas se derivan del triángulo rectángulo ( )

c) Las funciones trigonométricas que se derivan del triángulo no se fundamentan en el teorema de Pitágoras. ( )

7. **Encierra en un círculo el literal de los procedimientos para la resolución de ecuaciones trigonométricas:**
   a) Expresar las razones en términos de una sola variable.
   b) Método de reducción.
   c) Método de igualación.
   d) La ecuación puede descomponerse en factores.
   e) Elevar al cuadrado los dos miembros de una ecuación.

Gracias por su colaboración

ANEXO 2

Universidad Nacional de Loja

Área de la educación, el arte y la comunicación

Carrera de Físico Matemática

Encuesta de diagnóstico sobre el aprendizaje de funciones trigonométricas en los estudiantes de 2° año de Bachillerato General Unificado

Encuesta dirigida a docentes

1. **¿En el aprendizaje de funciones trigonométricas, cuáles de las siguientes funciones mentales considera usted desarrollan sus estudiantes?**

Indicadores ( )

- ◊ Las funciones inferiores nacen con la persona ( )
- ◊ Son las funciones naturales ( )
- ◊ Están determinadas genéticamente ( )
- ◊ El comportamiento derivado de las Funciones Inferiores es limitado ( )
- ◊ Está condicionado por lo que podemos hacer ( )
- ◊ Las funciones mentales superiores se adquieren ( )
- ◊ Las funciones mentales superiores (FMS) se desarrollan a través de la interacción social ( )
- ◊ Las FMS están determinadas por una sociedad específica y cultura concreta en la que viven profesores y alumnos ( )
- ◊ Las funciones mentales superiores están mediadas culturalmente ( )
- ◊ El comportamiento derivado de las funciones mentales superiores está abierta a mayores posibilidades ( )
- ◊ El conocimiento es resultado de la interacción social ( )
- ◊ En la interacción con los demás adquirimos conciencia de nosotros ( )
- ◊ En la interacción con los demás aprendemos el uso de los símbolos que, a su vez, nos permiten pensar en formas cada vez más complejas. ( )
- ◊ A mayor interacción social mayor conocimiento ( )
- ◊ A mayor interacción social, más posibilidades de actuar ( )
- ◊ A mayor interacción social, más robustas funciones mentales superiores ( )

2. **Cuáles de las siguientes opciones usted considera que desarrollan las funciones mentales superiores en el aprendizaje de funciones trigonométricas.**

Indicadores

◊ La atención, la memoria, la formulación de conceptos son primero un fenómeno social y después progresivamente, se transforman en una propiedad del individuo ( )

◊ Cada función mental superior primero es interpsicológica y después es individual, personal, intrapsicológica ( )

◊ Cuando el estudiante se angustia por que algo no le sale bien, es una función mental interior, es una reacción del ambiente ( )

◊ Cuando el estudiante se angustia, emociona, hace gestos, se pronuncia, para llamar la atención ya es una forma mental de comunicación, que se da en la interacción con los demás, se trata de una función mental superior, interpsicológica (su de él) ( )

◊ Cuando el estudiante se angustia, emociona, hace gestos, se pronuncia, para llamar la atención ya es una forma mental de comunicación, que se da en la interacción con los demás, se trata de una función mental superior, interpsicológica (su de él) ( )

◊ El conocimiento es posible en la comunicación con los demás ( )

◊ La angustia, la emoción, la motivación, el arte de decir presente, aquí estoy, el aprendiz lo utiliza como instrumento para comunicarse; ya posee un instrumento para comunicarse. Es una función mental superior o habilidad psicológica propia, personal, dentro de su mente. ( )

3. **¿Cuáles de los siguientes indicadores considera usted que son necesarios para el estudiantes al aprender funciones trigonométricas?**

Indicadores

◊ En la interacción social las habilidades interpsicológica se transforman en habilidades intrapsicológicas. ( )

◊ La interiorización, expresa el proceso de empoderamiento personal, de lo que era cultural ( )

◊ El alumno se desarrolla a plenitud en la medida en qué se apropia, hace suyo, interioriza las habilidades interpsicológicas ( )

◊ En un primer momento, depende de los otros. ( )

◊ Con la interacción de habilidades de los otros adquiere la posibilidad de actuar por sí mismo y asumir la responsabilidad de su actuar. ( )

4. **¿De los siguientes indicadores cuales considera usted importantes en el aprendizaje de las funciones trigonométricas?**

Indicadores

◊ Cada estudiante tiene su zona de desarrollo próximo	( )
◊ La zona de desarrollo próximo es la posibilidad que tiene cada estudiante (individuo) de aprender en el ambiente social, en la interacción con los demás	( )
◊ El conocimiento y la experiencia del alumno es posibilitado por la experiencia y conocimiento de los otros	( )
◊ Mientras más rica y frecuente sea la interacción con los demás, el conocimiento del estudiante será más rico y amplio	( )
◊ El estudiante aprende con la ayuda de los demás	( )
◊ El estudiante aprende en el ámbito de la interacción social	( )
◊ La interacción social como posibilidad de aprendizaje es su zona de desarrollo próximo	( )
◊ La zona de desarrollo próximo del estudiante puede ser amplia o ampliada desde el pasado, presente y futuro: interactuando con científicos, comunidades de investigación, autores notables, conferencistas, grupos cooperativos de aprendizaje, encuentros, conferencias, simposios, congresos, prometeos, etc.	( )
◊ Inicialmente las personas (maestros, padres o compañeros) que interactúan con el estudiante son las que en cierto sentido, son responsables de que el individuo aprenda	( )
◊ Aprendiendo el estudiante en su zona de desarrollo próximo, gradualmente asumirá la responsabilidad de construir su conocimiento y guiar su propio comportamiento	( )
◊ La ZDP, del estudiante es la etapa de máxima potencialidad de aprendizaje con la ayuda de los demás	( )
◊ El nivel de desarrollo de las habilidades interpsicológicas depende del nivel de interacción social	( )
◊ El nivel de desarrollo y aprendizaje que el individuo puede alcanzar con la ayuda, guía o colaboración de los adultos o de sus compañeros siempre será mayor que el nivel que pueda alcanzar por sí solo.	( )

5. **En los siguientes indicadores, señale para que son necesarias las herramientas psicológicas en el aprendizaje de funciones trigonométricas.**

Indicadores

Las herramientas psicológicas (HP) son motivo para la interacción social	( )
Las HP, hacen posible el paso de las FMI a las FMS	( )
Las HP, posibilitan el paso de la habilidades interpsicológicas a las habilidades intrapsicológicas	( )

Las HP, hacen que el alumno aprenda, que construya el conocimiento ( )

Las HP, median los pensamientos, sentimientos y conductas de los estudiantes ( )

La capacidad de pensar, sentir y actuar del estudiante depende de la HP que usa ( )

El lenguaje es la HP, más importante del estudiante con lo que piensa y controla su comportamiento ( )

El lenguaje le permite al alumno cobrar conciencia de sí mismo y ejercitar el control voluntario de sus acciones ( )

Con el lenguaje tiene la posibilidad de afirmar o negar, en ese momento empieza a ser distinto y diferente de los objetos y de los demás ( )

Con el lenguaje del estudiante se apropia de la riqueza del conocimiento, apropiándose del contenido y herramientas del pensamiento. ( )

6. ¿Cómo considera usted deberían ser las herramientas psicológicas de los estudiantes para poder aprender funciones trigonométricas?

Indicadores

Lo que aprendemos depende de las HP que tenemos ( )

Las HP, dependen de las culturas en que vivimos ( )

Nuestros pensamientos, nuestras experiencias, nuestras intenciones y nuestras acciones están culturalmente mediadas ( )

La cultura proporciona las orientaciones que estructura el comportamiento de los individuos ( )

Lo que los seres humanos percibimos como deseable o no deseable depende del ambiente, de la cultura a la que pertenecemos, de la sociedad de la cual somos parte ( )

El ser humano, en cuanto sujeto que conoce, no tiene acceso directo, a los objetos; el acceso es mediado a través de las herramientas psicológicas de que dispone ( )

El conocimiento se construye a través de la interacción con las demás mediada por la cultura, desarrolladas histórica y socialmente ( )

La cultura es determinante primario del desarrollo individual ( )

Los seres humanos somos los únicos que creamos cultura y en ella es como nos desarrollamos ( )

A través de la cultura el aprendiz adquiere el contenido de su pensamiento, el conocimiento ( )

La cultura nos dice qué pensar y cómo pensar ( )

La cultura nos da el conocimiento y la forma de construir ese conocimiento ( )

7. **¿Cómo considera usted al conocimiento de los alumnos que aprenden funciones trigonométricas?**

Indicadores	
El conocimiento de construye socialmente, el plan y programa de estudios están diseñados para posibilitar la interacción social: alumno- alumno- padre de familia alumno(a)-experto(a) alumno-comunidad alumno- grupo etc.	( )
La zona de desarrollo próximo, que es la posibilidad de aprender con el apoyo de los demás, crea condiciones para ayudarlo personalmente en su aprendizaje y desarrollo.	( )
El conocimiento es construido a partir de la experiencia, va más allá del pizarrón y acetato, introduce actividades de laboratorio, experimentación y solución de problemas contextuales. Máxima preocupación por el ambiente de aprendizaje	( )
El aprendizaje es construcción social en equipos, clubs, comunidades de aprendizaje, grupos ecológicos, grupos de andinismo, excursiones, rincones de aprendizaje, técnicas cooperativas, vínculos asociativos con la comunidad, grupos de socorro y ayuda, grupos de deportes, de recreación, grupos de investigación acción, etc…	( )
El dialogo entendido como intercambio activo entre locutores es básico en el aprendizaje, mediante el estudio colaborativo, grupos y equipos de trabajo participativo en discusiones de alto nivel sobre el contenido del aprendizaje de funciones trigonométricas	( )
El aprendizaje es un proceso activo en el que se experimenta, se cometen errores, se buscan soluciones, la búsqueda, la indagación, la exploración, la investigación y la solución de problemas contextuales propios del medio comunitario-social.”	( )

Anexo 3

Test de aplicación de la alternativa

Test N°1

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA EDUCACIÓN.

CARRERA DE FÍSICO MATEMÁTICA

MÓDULO VII

Encuesta a estudiantes del segundo año de bachillerato general unificado de la Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio sobre el aprendizaje de funciones trigonométricas.

1. Señala con una x el en qué lugar se dio origen a las funciones trigonométricas
   - ☐ Antigua Grecia
   - ☐ Europa
   - ☐ Babilonia
   - ☐ Egipto
2. Subraya a los personajes que colaboraron en el desarrollo de las funciones trigonométricas
   - ☐ Hiparco de Nicea
   - ☐ Pitágoras
   - ☐ Francios Viette
   - ☐ Rheticus
3. Señale con una x en qué siglo el físico y matemático Leonhard Euler estudió la notación de las funciones trigonométricas
   - ☐ XX
   - ☐ XIX
   - ☐ XVIII
   - ☐ XII
4. Marque con una x el nombre del matemático que introdujo los nombres modernos de las funciones trigonométricas
   - ☐ Isaac Newton
   - ☐ Tales de Mileto

- ☐ Leonard Euler
- ☐ Thomas Fincke

5. Señala con una x cuál de los siguientes aportes que se dieron a las funciones trigonométricas fue le aporte de Isaac Newton.
    - ☐ Demostró que las propiedades básicas de la trigonometría eran simplemente producto de la aritmética de los números complejos.
    - ☐ Relacionó por primera vez las funciones trigonométricas con los ángulos y elaboró una de las mejores tablas trigonométricas de su época.
    - ☐ Introdujo los términos coseno y cotangente.
    - ☐ Inventó el cálculo diferencial e integral, siendo las funciones trigonométricas incorporadas al análisis.

Test N°2

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA EDUCACIÓN.

CARRERA DE FÍSICO MATEMÁTICA

MÓDULO VII

Encuesta a estudiantes del segundo año de bachillerato general unificado de la Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio sobre el aprendizaje de funciones trigonométricas.

1. Encierra las aplicaciones de las funciones trigonométricas
    a. Astronomía
    b. Aviación
    c. Cocina
    d. Construcción
2. Señala con una x las formas de medir un ángulo
    a. Radianes
    b. Metros
    c. Pies
    d. Grados
3. Señala con una x la opción correcta, cuando un ángulo es agudo
    a. Mide 60°
    b. Mide 180°

c. Mide menos de 90°

d. Mide 0°

4. Subraya la respuesta correcta cuando un ángulo es llano

a. Mide 360°

b. Mide 180°

c. Mide más de180°

d. Mide 0°

5. Cuando un ángulo recto

a. Mide 0°

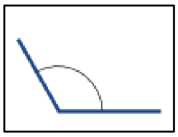
b. Mide 90°

c. Mide más de 90°

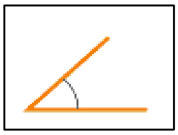
d. Mide 92°

6. Une con una línea el grafico correspondiente a cada ángulo

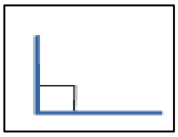
Ángulo agudo



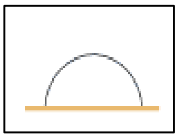
Ángulo obtuso



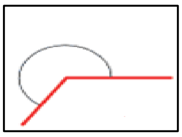
Ángulo reflejo o cóncavo



Ángulo recto



Ángulo llano



Test N°3

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA EDUCACIÓN.

CARRERA DE FÍSICO MATEMÁTICA

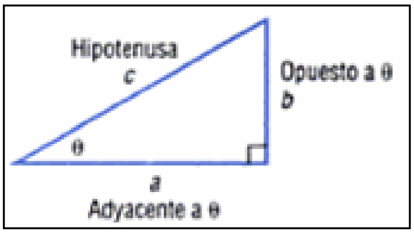
MÓDULO VII

Encuesta a estudiantes del segundo año de bachillerato general unificado de la Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio sobre el aprendizaje de funciones trigonométricas.

1. Encierra la definición correcta de funciones trigonométricas
   a. Son funciones que se derivan de los triángulos.
   b. Se definen como Funciones trigonométricas las que se derivan de la geometría elemental.
   c. Son funciones que se definen en base al seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante de un ángulo.
2. Encierra la opción correcta, como se define la función seno en un triángulo rectángulo
   a. $sen = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$
   b. $sen = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$
   c. $sen = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ \ adyacente}$
   d. $sen = \frac{cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$
3. Encierra la opción correcta, como se define la función coseno en un triángulo rectángulo
   a. $cos = \frac{cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$
   b. $cos = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$
   c. $cos = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$
   d. $cos = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ \ adyacente}$

4. Encierra la opción correcta, como se define la función tangente en un triángulo rectángulo
    a. $tan = \frac{cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$
    b. $tan = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$
    c. $tan = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ \ adyacente}$
    d. $tan = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$

5. En el siguiente triángulo que relaciones son correctas
    a. Sen θ c/a
    b. Cos θ a/c
    c. Tan θ b/c
    d. Csc θ c/a
    e. Sec θ c/a
    f. Cot θ a/b



Test N°4

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA EDUCACIÓN.

CARRERA DE FÍSICO MATEMÁTICA

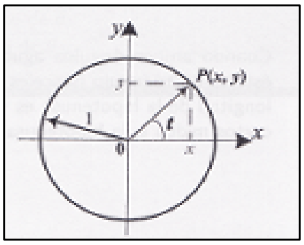
MÓDULO VII

Encuesta a estudiantes del segundo año de bachillerato general unificado de la Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio sobre el aprendizaje de funciones trigonométricas.

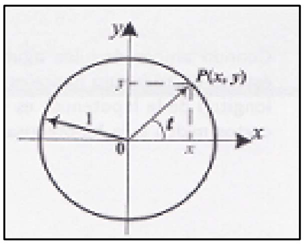
1. Encierra la definición correcta de funciones trigonométricas
    a. Son funciones que se derivan de los triángulos.
    b. Se definen como Funciones trigonométricas las que se derivan de la geometría elemental.
    c. Son funciones que se definen en base al seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante de un ángulo.

2. Encierra la opción correcta, como se define la función seno en el círculo unitario

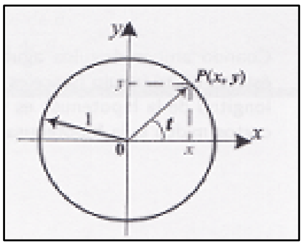
   a. $sen = \frac{y}{x}$
   b. $sen = \frac{y}{1}$
   c. $sen = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ \ adyacente}$



3. senEncierra la opción correcta, como se define la función coseno en un triángulo rectángulo
   a. $cos = \frac{x}{y}$
   b. $coscos = \frac{x}{y}$
   c. $cos = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ \ adyacente}$

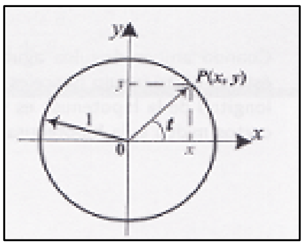


4. Encierra la opción correcta, como se define la función tangente en el círculo unitario.
   e. $\tan t = \frac{y}{x}$
   f. $tan = \frac{1}{x}$
   g. $tan = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$



5. Encierra la respuesta correcta, en el siguiente gráfico que funciones están bien expresadas :

   a. Sen t Y
   b. Cos t x/y
   c. Tan t y/x
   d. Csc t 1/y
   e. Sec t y/x
   f. Cot t x/y



Test N°5

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA EDUCACIÓN.

CARRERA DE FÍSICO MATEMÁTICA

MÓDULO VII

Encuesta a estudiantes del segundo año de bachillerato general unificado de la Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio sobre el aprendizaje de funciones trigonométricas.

1. Marca con una x cuál de las siguientes opciones representa el dominio y recorrido de la función trigonométrica seno:
   a. Dominio:{ $x \in R \mid x \neq \pi/2\ (2k + 1)$}; Recorrido { $y \in R \mid y \leq -1$ ó $y \geq 1$ }
   b. Dominio : R ; Recorrido : { $y \in IR \mid -1 \leq y \leq 1$ }
   c. Dominio: R; Recorrido: R

2. Subraya la respuesta correcta. Los ceros de la función coseno son:
   a. La función se anula para x=$\pm\pi/2$, x=$\pm\ 3\pi/2$, x= $\pm 5\ \pi/2\ldots$ y en general para x= (2k+1) $\pi/2$, con $k \in Z$.
   d. La función no tiene ceros
   e. la función se anula para x=0, x=$\pm\ \pi$, x= $\pm 2\ \pi$ y en general para x= k π, con $k \in Z$

3. Encierra la respuesta correcta, cuál es la simetría que cumple la función tangente
   a. Para a función tangente cumple tan(-x)=-tan(x),es una función impar
   b. La función coseno se cumple que cos x=cos (-x), luego esta función es par por lo tanto es simétrica con respecto al eje y.
   c. Cumple tan x = tan (-x), siendo una función par.

4. Subraya cual es la periodicidad de la función coseno
   a. La función coseno se cumple que cos x=cos (x+2k π) con $k \in Z$ con un periodo de 2 π.

b. La función seno cumple que cos x=cos (x+ kπ) con k ∈ Z, luego es una función de periodo π.
c. La función seno cumple que cos x=cos (x+2k π) con k ∈ Z, luego es una función de periodo 2 π.

5. Marca con una x cuál de las siguientes opciones representa el dominio y recorrido de la función trigonométrica coseno:
    a. Dominio:{ x∈R | x ≠ π/2 (2k + 1)}; Recorrido { y ∈ R | y ≤ -1 ó y ≥ 1 }
    b. Dominio : R ; Recorrido : { y ∈ IR | -1 ≤ y ≤ 1 }
    c. Dominio: R; Recorrido: R

6. Marca con una x cuál de las siguientes opciones representa la monotonía de la función tangente
    a. El gráfico es decreciente en los intervalos [0, π] y creciente en] π, 2].
    b. El gráfico es creciente en]$-\pi/2$, π/2[
    c. El gráfico es creciente en los intervalos [0, $\pi/2$[y]3π/2 , 2 π] y decreciente en el intervalo]π/2, 3 π/2]

Test N°6

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

ÁREA DE LA EDUCACIÓN, EL ARTE Y LA EDUCACIÓN.

CARRERA DE FÍSICO MATEMÁTICA

MÓDULO VII

Encuesta a estudiantes del segundo año de bachillerato general unificado de la Unidad Educativa Fernando Suárez Palacio sobre el aprendizaje de funciones trigonométricas.

1. Marca con una x cuál de las siguientes opciones representa el dominio y recorrido de la función trigonométrica secante:
    a. Dominio:{ x∈R | x ≠ π/2 (2k + 1)}; Recorrido { y ∈ R | y ≤ -1 ó y ≥ 1 }
    b. Dominio : R ; Recorrido : { y ∈ IR | -1 ≤ y ≤ 1 }
    c. Dominio: R; Recorrido: R

2. Subraya la respuesta correcta. Los ceros de la función cosecante son:
    a. La función se anula para x=$\pm\pi/2$, x=$\pm\ 3\pi/2$, x= $\pm 5\ \pi/2\ldots$ y en general para x= (2k+1) $\pi/2$, con k ∈ Z.
    b. La función no tiene ceros
    c. La función se anula para x=0, x=$\pm\ \pi$, x= $\pm 2\ \pi$ y en general para x= k π, con k∈ Z

3. Encierra la respuesta correcta, cuál es la simetría que cumple la función cotangente
    a. Para a función tangente cumple cot(-x)=-cot(x),es una función impar
    b. Para a función tangente cumple tan(-x)=-tan(x),es una función impar
    c. La función coseno se cumple que cos x=cos (-x), luego esta función es par por lo tanto es simétrica con respecto al eje y.
4. Subraya cual es la periodicidad de la función cosecante
    a. La función coseno se cumple que cos x=cos (x+2k π) con k ∈ Z con un periodo de 2 π.
    b. La función seno cumple que cos x=cos (x+ kπ) con k ∈ Z, luego es una función de periodo π.
    c. Es una función impar

5. Marca con una x cuál de las siguientes opciones representa el dominio y recorrido de la función trigonométrica cosecante:
    a. Dominio:{ x∈R | x ≠ π/2 (2k + 1)}; Recorrido { y ∈ R | y ≤ -1 ó y ≥ 1 }
    b. Dominio : { x∈R | x ≠k·π } ; Recorrido : { y ∈ IR | -1 ≤ y ≤ 1 }
    c. Dominio: R; Recorrido: R

6. Marca con una x cuál de las siguientes opciones representa la monotonía de la función secante:
    a. El gráfico es decreciente en los intervalos [0, π] y creciente en] π, 2].
    b. El gráfico es creciente en]$-\pi/2$, π/2[
    c. El gráfico es decreciente en los intervalos [$-\pi$, -$\pi/2$[∪]-$\pi/2$,0] y CRECIENTE en]0, $\pi/2$[∪]$\pi/2$,π[.

ÍNDICE DE CONTENIDOS