

# Revista Técnica

# Energía

REVISTA # 1

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA  
ÁREA DE LA ENERGÍA, LAS INDUSTRIAS Y LOS  
RECURSOS NATURALES NO RENOVABLES  
CARRERA DE INGENIERIA ELECTROMECAÁNICA



# HIMNO A LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA

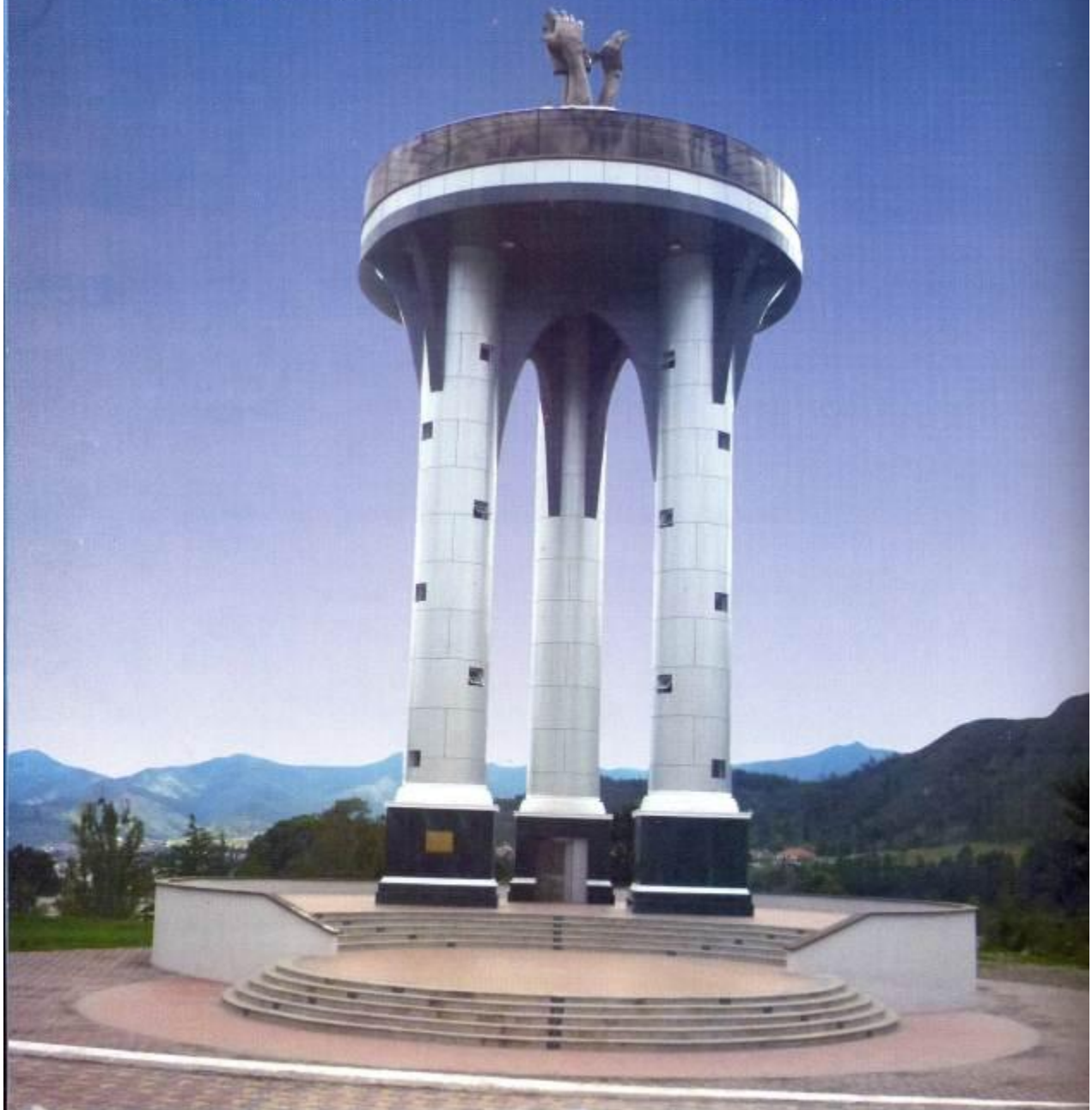
Letra: Dr. Benjamín Ruiz y Gómez  
Música: Maestro Segundo Puertas Moreno

## CORO

Gloria Loja, por siempre cantemos  
Con acento de voz inmortal  
Fuimos grandes y hoy más lo seremos  
Con el triunfo de nuestro ideal.

I  
Al calor de un brillante pasado  
Que dio a Loja, blasón de talento,  
De hidalguía, de fe y sentimiento,  
Nueva vida queremos vivir.

II  
La inquietud cultural vigoriza  
La conciencia de un pueblo escogido  
Que si acaso parece dormido  
Hoy despierta a un glorioso existir.



# Editorial

*La presente publicación se constituye en la primera edición de la revista técnica de la carrera de Ingeniería Electromecánica del Área de la Energía, las Industrias y los Recursos Naturales No Renovables de la Universidad Nacional de Loja.*

*Los artículos y evidencias fotográficas que forman parte de esta publicación dan cuenta del trabajo que viene desarrollando nuestra carrera en los tres ejes fundamentales del quehacer universitario: formación de recursos humanos, investigación y vinculación con la colectividad durante el periodo 2008-2011 para el que fui honrosamente designado en la coordinación de la carrera, trabajo desarrollado con el apoyo decidido de la Comisión Académica, Director del Área y del Rector de nuestra Universidad.*

*Los autores de los artículos técnicos demuestran el esfuerzo de nuestros docentes que nos participan sus experiencias y trabajos de investigación que se vienen ejecutando en la carrera en el ámbito técnico y científico.*

*De igual forma hacemos conocer los talleres y laboratorios con que cuenta el Área de Energía para la formación de los estudiantes de nuestra carrera: Taller mecánico, taller eléctrico y los laboratorios de automatización, máquinas eléctricas, máquinas de fluidos, laboratorio de electrónica, aula virtual, tres laboratorios de computación y una biblioteca con 50 computadores con servicio de internet; los mismos que se encuentran equipados con tecnología de última generación como fresadoras y tornos con control numérico, controladores programables industriales, equipos de instrumentación y comunicaciones industriales, analizadores de redes, equipos de mediciones y pruebas eléctricas y mecánicas, una estación meteorológica, etc. y trabajos de tesis elaborados por nuestros estudiantes que dan fe de su capacidad para aplicar sus conocimientos científico-tecnológicos.*

*Así mismo nos sentimos orgullosos con una planta docente de primer nivel en su gran mayoría con estudios de cuarto nivel, maestrías y doctorados donde se conjuga la experiencia con la juventud y se cumple en forma responsable con la hermosa y fecunda tarea de compartir sus conocimientos y de ser el guía y tutor de la formación profesional con excelencia académica contando con el apoyo eficiente del personal administrativo.*

*Es grato tener en nuestra aulas universitarias a estudiantes que día a día se esfuerzan por formarse en una Universidad para el pueblo, sesquicentaria, orgullo de nuestra patria y acreditada como una de las mejores del Ecuador, que les abrió las puertas para que sean ellos mismos los que forjen su futuro con esfuerzo y dedicación, fruto de lo cual encontramos que nuestros profesionales se encuentran trabajando en todo el país en su campo profesional con gran éxito.*

*Al presentar esta revista técnica a la comunidad universitaria y ciudadanía en general lo hacemos con el ánimo de difundir nuestro accionar y con el compromiso de mejorar para conseguir la excelencia académica convencidos que siempre nuestra misión será la de contribuir positivamente a la formación profesional con pertinencia, ética, responsabilidad social y alto nivel académico para contribuir al desarrollo de nuestra patria y solucionar los problemas de la sociedad.*

Norman Jiménez León  
COORDINADOR DE LA CARRERA DE ING. ELECTROMECAICA  
PERIODO 2008-2011

Loja, Julio del 2011





**Universidad Nacional de Loja**  
**Área de Energía y los Recursos Naturales no Renovables**  
**CARRERA DE INGENIERIA ELECTROMECAÁNICA**



**PLANTA DOCENTE DE LA CARRERA DE INGENIERIA ELECTROMECAÁNICA**

- ING. ELECTROMECAÁNICO FRANCISCO ALEGA LAOIZA Mg. Sc.
- ING. ELECTROMECAÁNICO DARWIN TAPIA PERALTA
- ING. ELECTROMECAÁNICO MANUEL AYALA CHAUVIN Mg. Sc.
- ING. ELECTROMECAÁNICO CARLOS SAMANIEGO OJEDA Mg. Sc.
- ING. ELECTROMECAÁNICO PATRICIO ARMIJOS
- ING. ELECTROMECAÁNICO EDWIN PACCHA Mg. Sc.
- ING. ELECTROMECAÁNICO JOSE BENAVIDES Mg. Sc.
- ING. ELECTROMECAÁNICO JOSE ESPINOSA LEON
- ING. ELECTROMECAÁNICO LUIS YUNGA HERRERA Mg. Sc.
- ING. ELECTROMECAÁNICO DIOGENES BUSTAN JARAMILLO.
- ING. MECÁNICO TUESMAN MONTAÑO PERALTA Mg. Sc.
- ING. MECÁNICO MILTON LEON TAPIA Mg. Sc
- ING. MECÁNICO PATRICIO VALAREZO GARCIA
- ING. MECÁNICO ARMANDO SALGADO
- ING. MECÁNICO MIGUEL ERAS
- ING. MECÁNICO MIGUEL CARABLLO Dr. PHD.
- ING. MECÁNICO GONZALO RIOFRIO CRUZ
- ING. MECÁNICO MARCO ROJAS MONCAYO Mg. Sc.
- ING. ELÉCTRICO JAIME LARRIVA VELEZ
- ING. ELÉCTRICO DANIEL MAHAUAD ORTEGA Mg. Sc.
- ING. ELÉCTRICO HECTOR SALCEDO LOPEZ
- ING. ELÉCTRICO JORGE MUÑOZ V. Mg. Sc.
- ING. ELÉCTRICO NORMAN JIMÉNEZ LEÓN Mg. Sc.

**Ing. José Ochoa A.**  
**DIRECTOR DEL ÁREA**

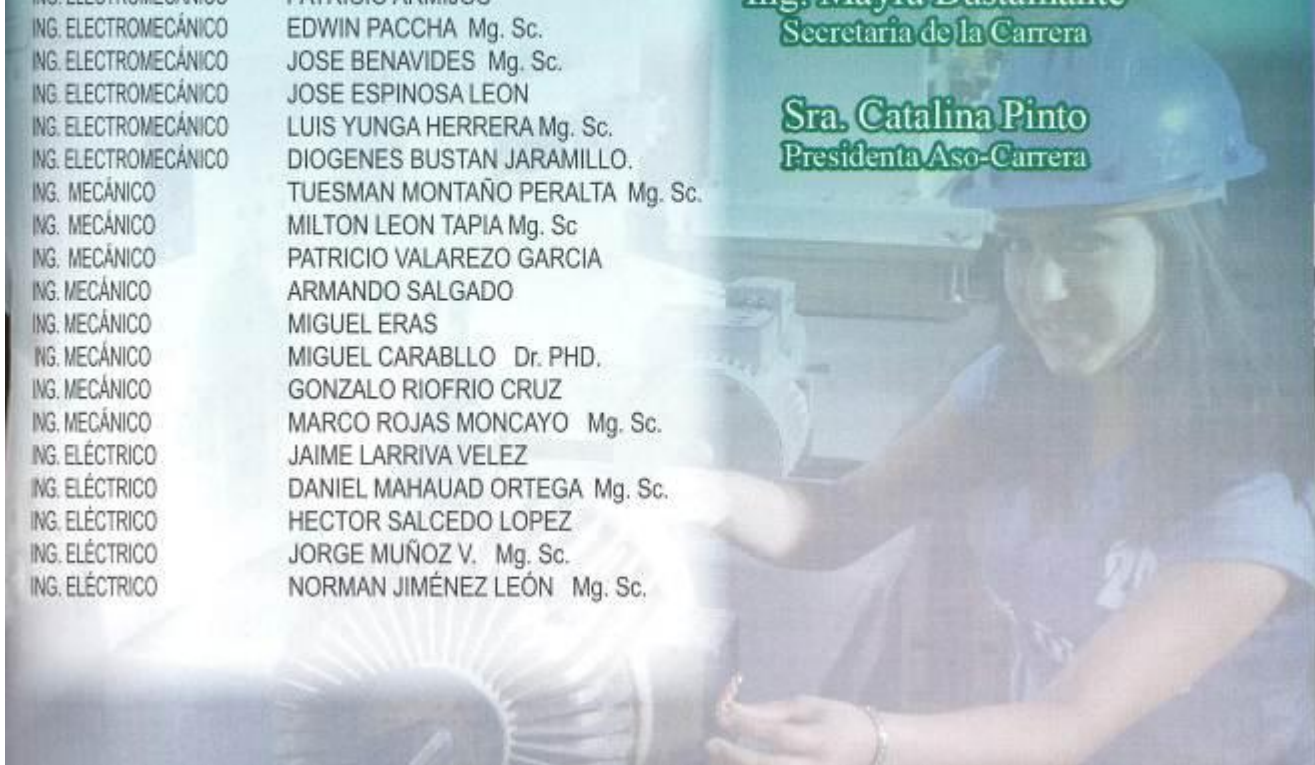
**Ing. Norman Jiménez León**  
**COORDINADOR DE LA CARRERA**

**Ing. Marco Rojas M.**  
**Dr. Miguel Caraballo**  
**COMISIÓN ACADÉMICA**

**Sr. Rodrigo Ramirez**  
**Representante Estudiantil**

**Ing. Mayra Bustamante**  
**Secretaria de la Carrera**

**Sra. Catalina Pinto**  
**Presidenta Aso-Carrera**



# APLICACIÓN DEL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS EN LA CONDUCCIÓN DE CALOR UNIDIRECCIONAL – ESTADO ESTACIONARIO – DE UNA BARRA DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE

DARWIN TAPIA PERALTA  
Ing. Electromecánico, UNL 2003  
Responsable Laboratorio de Energía y Fluidos

## RESUMEN

En el presente trabajo se describe la metodología de cálculo para la solución de la conducción de calor unidireccional – Estado Estacionario – en barras de sección transversal constante y con generación interna de calor utilizando el Método de Diferencias Finitas "MDF". Para ello se parte de la ecuación diferencial de difusión del calor y se resuelve para dos condiciones de frontera: 1) de primera clase o de Dirichlet, 2) de segunda clase o de Neumann. La Matriz de ecuaciones obtenida por el MDF en cada una de las condiciones de frontera se resuelven en un Programa desarrollado en MATLAB, el cual proyecta como resultado la evolución de la temperatura a lo largo de la barra de longitud  $x$ .

## 1. INTRODUCCIÓN.

El planteamiento de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, válidas para una determinada región o dominio permiten describir cualitativamente un fenómeno físico y conocer la respuesta a posibles perturbaciones que alteren el comportamiento normal del sistema en estudio, para ello es importante imponer determinadas condiciones de borde y condiciones iniciales apropiadas, de esto dependerá una mejor confiabilidad de los resultados obtenidos. Es aquí donde aparece la mayor dificultad, dado que solamente la forma más simple de ecuaciones, con fronteras geoméricamente triviales, se vuelven muy complejas al momento de encontrar las soluciones y no es posible en muchas ocasiones resolverlas con los métodos matemáticos disponibles. La diferenciación numérica es muy útil en casos en los cuales se tiene una función que es muy engorrosa de derivar, o en casos en los cuales no se tiene una función explícita sino una serie de datos experimentales. Con el fin de evitar tales dificultades y lograr resolver el problema con la ayuda de computadoras, es necesario presentar el problema de una manera puramente algebraica mediante un proceso de discretización. El conjunto infinito de números que representan la función o funciones incógnitas es reemplazado por un número finito de parámetros incógnita, y este proceso requiere alguna forma de aproximación. La forma más simple de discretización es mediante el Método de Diferencias Finitas.

## 2. La Ecuación de Calor.

El estudio de la transferencia de calor demuestra que diferencialmente la ecuación de difusión del calor en coordenadas cartesianas  $x, y, z$ , es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_c \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_c \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_c \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}g = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \left[ \frac{W}{m^3} \right] \quad (1)$$

Ecuación diferencial de segundo orden, con generación interna de calor  $\dot{q}g$  en  $[W/m^3]$  y en estado transitorio, ya que la ecuación depende del diferencial del tiempo  $\partial t$ . El presente trabajo se enfoca a encontrar la solución de la ecuación (1), para lo cual primero se delimitan las condiciones iniciales:

- $k_c$ , conductividad térmica del material. Constante
- Difusión de Calor Unidimensional, por lo que:  $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$      $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$
- Estado Estacionario,  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

De acuerdo a estas condiciones, la ecuación 1 resulta:

$$k_c \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q}g = 0 \quad (2)$$

Entonces la ecuación (2) es la ecuación gobernante del sistema en estudio.

### 2.1. Diferencias Finitas 1-D (unidireccional). (MDF\_1D)

Considérese la barra de sección transversal constante de la figura 1, donde se desea conocer la Temperatura  $T$ , a cualquier distancia  $x$ .

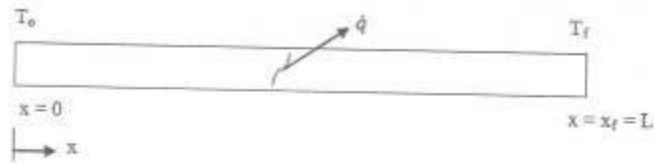


Fig.1 Barra de sección transversal constante

El objetivo es encontrar la función  $T(x)$  que satisfaga a la ecuación diferencial (2) en el dominio  $0 \leq x \leq L$ , con determinadas condiciones de frontera en  $x = 0$  y en  $x = L$ . Para ello se utilizará el método de diferencias finitas 1-D y se comenzará por discretizar de la variable independiente  $x$ ; es decir obtener puntos  $x_k$  espaciados equitativamente (ver Fig. 2) sobre el rango  $0 \leq x \leq L$ , desde  $k = 0$  hasta  $k = n$ , es decir con  $x_0$  hasta  $x_n$ , siendo el intervalo  $h$  igual a:

$$h = \frac{L - x_0}{n - 1} \quad (3)$$

donde  $n$ , es el número de puntos de discretización.

El siguiente paso es reemplazar la ecuación diferencial (2) por operaciones algebraicas de los términos  $n$  discretizados, este proceso puede efectuarse mediante la aproximación de diferencias finitas.

### 2.1.1. Método de Aproximación de Diferencias Finitas

Discretizando la barra de la figura 1 en  $n$  puntos, se obtiene:

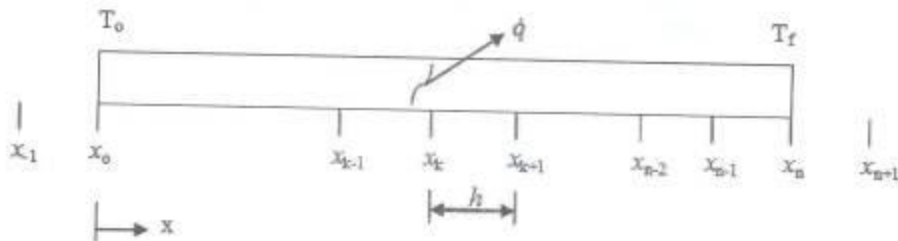


Fig. 2 Barra de sección transversal constante discretizada para  $n$  puntos

Donde  $h$  es el intervalo y  $x_1$  y  $x_{n+1}$  son puntos que están fuera del rango  $0 \leq x \leq L$ .

Utilizando el teorema de Taylor a las expresiones de la figura 2:

$$T(x_{k+1}) = T(x_k + h) = T_k + h T'_k + \frac{h^2}{2} T''_k + \frac{h^3}{6} T'''_k + \dots \quad (4)$$

$$T(x_{k-1}) = T(x_k - h) = T_k - h T'_k + \frac{h^2}{2} T''_k - \frac{h^3}{6} T'''_k + \dots \quad (5)$$

Realizando una diferencia hacia adelante basado en la figura 2 y las ecuaciones 4 y 5, se obtiene:

$$T'(x) = \frac{T_{k+1} - T_k}{h} - \frac{h}{2} T''_k + \frac{h^2}{2} T'''_k + \dots$$

$$T'(x) = \frac{T_{k+1} - T_k}{h} + O(h) \quad (6)$$

La ecuación 6 define una expresión algebraica para la primera derivada de la temperatura  $T$  con un orden de error  $h$ , quedando como resultado la ecuación aproximada (7):

$$T'(x) \cong \frac{T_{k+1} - T_k}{h} \quad (7)$$

Realizando una diferencia hacia atrás basado en la figura 2 y las ecuaciones 4 y 5, se obtiene:

$$T'(x) = \frac{T_k - T_{k-1}}{h} - \frac{h}{2} T''_k + \frac{h^2}{2} T'''_k + \dots$$

$$T'(x) = \frac{T_k - T_{k-1}}{h} + O(h) \quad (8)$$

De la misma forma de la ecuación 8, se obtiene la expresión algebraica aproximada 9:

$$T'(x) \cong \frac{T_k - T_{k-1}}{h} \quad (9)$$

Para aproximar  $T''$  se realiza la diferencia central de las ecuaciones 4 y 5

$$T_{k+1} + T_{k-1} = 2 T_k + h^2 T''_k + O(h^4)$$

$$T''(x) = \frac{T_{k+1} - 2 T_k + T_{k-1}}{h^2} + O(h^2) \quad (10)$$

Siendo la solución aproximada 11:

$$T''(x) \cong \frac{T_{k+1} - 2 T_k + T_{k-1}}{h^2} \quad (11)$$

Como conclusión se ha obtenido las ecuaciones algebraicas aproximadas tanto para la primera como para la segunda derivada de  $T$ , dadas por las ecuaciones 7, 9 y 11.

### 2.1.2. Resolución de la Ecuación de Calor por el MDF\_1D

En este caso se considera dos condiciones de frontera definidos para la ecuación (2):

- Condición de contorno de primera clase o de Dirichlet: Superficie mantenida a Temperatura constante  $T(x=0) = T_s$ , (12)
- Condición de contorno de segunda Clase o de Neumann: Flujo de Calor fijo o constante en la superficie,  $q_s$

$$q_s(x=0) = -kc \frac{\partial T}{\partial x} \quad (13)$$

Nota: Para el presente estudio se contempla las soluciones para las fronteras de primera y segunda clase y se desprecia cualquier efecto de transferencia de calor de tercera clase, es decir no hay transferencia de calor por convección.

Una vez definidas las condiciones de frontera, como segundo paso para la resolución de la ecuación (2), es discretizar en  $n$  puntos la barra en el rango  $0 \leq x \leq L$ , como se indica en la figura 2, desde  $k=0$  hasta  $k=n$ , para ello reemplazar la ecuación (11) en la ecuación gobernante (2), sabiendo que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = T''(x) \quad (16)$$

Ec. 11 en Ec. 2:  $k_c \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{q}g = 0$

$$k_c \left( \frac{T_{k+1} - 2T_k + T_{k-1}}{h^2} \right) = -\dot{q}g$$

$$-T_{k-1} + 2T_k - T_{k+1} = \frac{h^2 \dot{q}g}{k_c} \quad (17)$$

Siendo  $\frac{h^2 \dot{q}g}{k_c}$ , una constante y para facilitar la escritura se adopta:  $S = \frac{h^2 \dot{q}g}{k_c}$ , por lo que la Ec. 17 resulta:

$$-T_{k+1} + 2T_k - T_{k-1} = S \quad (18)$$

Que es la ecuación algebraica aproximada que gobierna al sistema de ecuación (2).

De la ecuación (18) se pueden obtener un sistema ecuaciones según el número  $n$  de puntos discretizados, de la siguiente forma:

Para  $k=1$   $-T_{1-1} + 2T_1 - T_{1+1} = S$

$$-T_0 + 2T_1 - T_2 = S \quad (19)$$

Para  $k=2$   $-T_{2-1} + 2T_2 - T_{2+1} = S$

$$-T_1 + 2T_2 - T_3 = S \quad (20)$$

Para  $k=3$   $-T_2 + 2T_3 - T_4 = S$  (21)

Para  $k=n-2$   $-T_{n-3} + 2T_{n-2} - T_{n-1} = S$  (22)

Para  $k=n-1$   $-T_{n-2} + 2T_{n-1} - T_n = S$  (23)

Donde  $T_0$  expresa la temperatura en  $x = 0$  y  $T_n$  expresa la temperatura en  $x = L$

Las ecuaciones 19, 20, 21, 22 y 23 forman el sistema de ecuaciones y pueden ser expresadas en forma matricial:

$$[A] [T] = [B] \quad (24)$$

### 2.1.3. Solución a la Condición de Dirichlet

Como se había expresado anteriormente de acuerdo a la ecuación (12) las temperaturas de borde se mantienen constantes, esto es  $T_0$  y  $T_n$ , por lo que la ecuación 19 y 23 resultarían:

$$2T_1 - T_2 = S + T_0 \quad (25)$$

$$-T_{n-2} + 2T_{n-1} = S + T_n \quad (26)$$

De acuerdo a las ecuaciones 25, 20, 21, 22 y 26 en forma matricial resultan:

$$\begin{array}{ccccccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_{n-3} & T_{n-2} & T_{n-1} \\ 2 & -1 & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} = S + T_0$$



$$\begin{array}{cccccc}
 -1 & 2 & -1 & & 0 & = S \\
 & -1 & 2 & -1 & & = S \\
 & & -1 & 2 & -1 & = S \\
 & & & -1 & 2 & -1 & = S \\
 & & & & 0 & -1 & 2 & -1 & = S \\
 & & & & & & -1 & 2 & = S + T_n
 \end{array}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & 0 \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & \ddots \\ 0 & & & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} S + T_0 \\ S \\ S \\ \vdots \\ S + T_n \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{n-1} \end{bmatrix} \quad (28)$$

La matriz idéntica  $\bar{A}$  es tridiagonal. La solución de la matriz  $\bar{T}$  esta dada por la ecuación (24)

### 2.1.3.1. Programación en Matlab

```

%Código Matlab
%Resolución de valores de contorno para la ecuacion de Calor: Método de
%Diferencias Finitas para condición de contorno Dirichlet Ts = To = constante y Tn = Tf = constante
clear all
clc
N=input('Ingrese puntos de discretización: N=');
n=N-2; %orden de Matriz, para calcular las temperaturas entre Xo y xf, se resta 2 ya que las
temperaturas en xo y xf son conocidas
Ts=input('Ingrese Temperatura superficial inicial To en °C, Ts=To =');
To=Ts;
Tf=input('Ingrese Temperatura Final en °C: Tf =');
Xo=0;
Xf=input('Ingrese Longitud total en metros: L=Xf =');
L=Xf;
h=(Xf-Xo)/(N-1);
qg=input('Ingrese generación de calor en W/m^3: qg =');
kc=input('Ingrese conductividad material en W/(m K): kc =');
S=h^2*qg/kc;
A=toeplitz([2,-1,zeros(1,n-2)]);% Matriz tridiagonal A
v=ones(n-1,1);
A1=2*eye(n)-diag(v,-1)-diag(v,1); % otra forma de realizar matriz tridiagonal
B=zeros(n,1);B(:,1)=S;B(1,1)=S+To;B(n,1)=S+Tf; % Matriz B
Tx=inv(A)*B; %Cálculo de la temperatura a n puntos x
x=Xo:h:L;

```

```
T=[To;Tx;Tf];
plot(x,T)
xlabel('Longitud');ylabel('Temperatura');title('Distribucion de Temperatura con condicion de Dirichlet');
grid;
```

### 2.1.3.2. Ejemplo de Aplicación:

Como ejemplo se dio para una barra de sección transversal constante de 30 cm de longitud y conductividad 16 W/m K, la cual se mantiene a 100 °C en  $x=0$  y 30°C en  $x = x_f = L$  y con generación interna de calor de 20 W/m<sup>3</sup>. Calcular la distribución de temperatura a lo largo de la barra.

Resolución:

Primero se definen los puntos  $n$  de discretización, para éste ejemplo se dio  $n = 10$ , que indica que el programa debe calcular 8 temperaturas para el rango  $0 \leq x \leq 30$  cm ya que  $T_0 = T(x=0) = 100^\circ\text{C}$  y  $T_n = T(x=L) = 30^\circ\text{C}$ , son valores conocidos (condición de Dirichlet), luego graficar  $T = f(x)$ . Ejecutando el código matlab anteriormente descrito en 2.1.3.1, primero pedirá el ingreso de datos como se indica:

Ingreso de datos:

```
Ingrese puntos de discretización: N=10
Ingrese Temperatura superficial inicial To en °C, Ts=To =100
Ingrese Temperatura Final en °C: Tf =30
Ingrese Longitud total en metros: L=Xf =0.3
Ingrese generación de calor en W/m^3: qg =20
Ingrese conductividad material en W/(m K): kc =16
```

Como resultados se obtienen:

La matriz A que es una matriz tridiagonal de 8 x 8

<pre>A =     2   -1    0    0    0    0    0    0    -1    2   -1    0    0    0    0    0     0   -1    2   -1    0    0    0    0     0    0   -1    2   -1    0    0    0     0    0    0   -1    2   -1    0    0     0    0    0    0   -1    2   -1    0     0    0    0    0    0   -1    2   -1     0    0    0    0    0    0   -1    2</pre>	<pre>(ya que son 8 temperaturas a calcular), así mismo se obtienen los valores de la matriz B y matriz T(x) calculada: B = 100.0014  0.0014  0.0014  0.0014  0.0014  0.0014  0.0014  30.0014</pre>	<pre>Tx = 92.2278 84.4542 76.6792 68.9028 61.1250 53.3458 45.5653 37.7833</pre>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------

Para calcular  $T(x)$  se aplica la resolución de matrices:  $Tx = \text{inv}(A) * B$ . Además internamente en el programa se guardan otros valores como el intervalo  $h$  y la constante  $S$ .

En los valores de  $T(x)$ , se puede observar las 8 temperaturas calculadas, para graficar  $T = f(x)$ , faltarían incluir los valores de frontera  $T(x=0) = 100^\circ\text{C}$  y  $T(x=L) = 30^\circ\text{C}$ .

El plot indicado en la Fig.3:

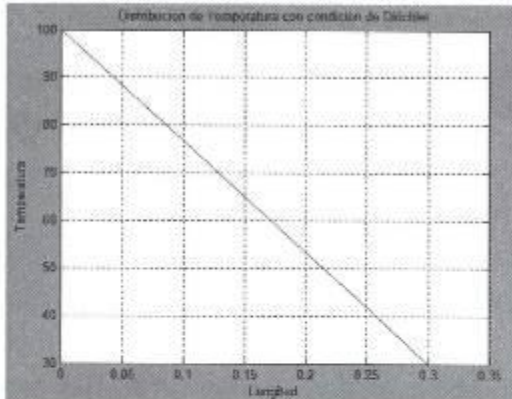


Fig. 3 Distribución de temperatura a lo largo  $x$  de la barra con  $qg = 20 \text{ W/m}^3$

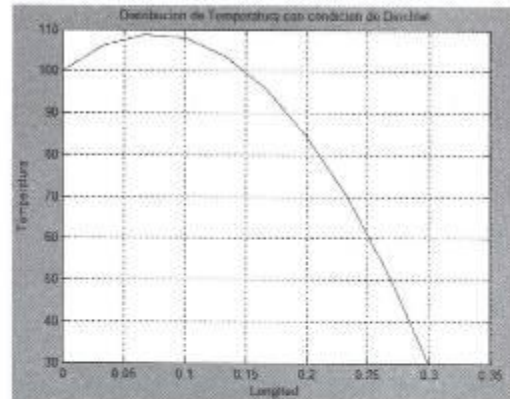


Fig. 4. Distribución de temperatura a lo largo  $x$  de la barra con  $qg = 50000 \text{ W/m}^3$

La gráfica es casi lineal ya que la generación de calor es pequeña ( $20 \text{ W/m}^3$ ), sin embargo si  $qg = 50000 \text{ W/m}^3$  y conservando el resto de valores, se puede observar el resultado en la Fig. 4:

#### 2.1.4. Solución a la Condición de Neumann

Las condiciones de borde que se adoptan a la barra de sección transversal constante son:

$$T(x=0) = T_s \quad q_s(x=L) = -kc \frac{\partial T}{\partial x}$$

El problema planteado ahora es que en  $x=L$ , la temperatura  $T_n$  es variable, en su caso existe un flujo de calor constante (ecuación 13), por tanto:

$$\text{De (13):} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q_s}{kc} \quad (29)$$

La discretización de la barra en el rango  $0 \leq x \leq L$  parte de la misma ecuación 18, sin embargo como el problema actual  $T_n$  es variable, entonces se necesita otra ecuación que relacione  $T_n$ , para ello la discretización de la condición de borde derivada se analiza introduciendo un nuevo punto ficticio  $n+1$ , es decir:  $x_{k+1} = (x_k + h)$  con su temperatura asociada  $T_{n+1}$ , ésta temperatura no tiene significado físico alguno ya que  $x_{n+1}$  está fuera del rango  $0 \leq x \leq L$ , sin embargo para complementar el número de variables con el número de ecuaciones es necesario introducirlo, por tanto aplicando la ecuación 18 con  $k=1$  hasta  $k=n$ :

$$\text{Para } k=1 \quad -T_0 + 2T_1 - T_2 = S \quad (30)$$

$$\text{Para } k=2 \quad -T_1 + 2T_2 - T_3 = S \quad (31)$$

$$\text{Para } k=3 \quad -T_2 + 2T_3 - T_4 = S \quad (32)$$

$$\text{Para } k=n-2 \quad -T_{n-3} + 2T_{n-2} - T_{n-1} = S \quad (33)$$

$$\text{Para } k=n-1 \quad -T_{n-2} + 2T_{n-1} - T_n = S \quad (34)$$

$$\text{Para } k=n \quad -T_{n-1} + 2T_n - T_{n+1} = S \quad (35)$$

$T_0$ , es valor conocido y en la ecuación (35) se puede observar la introducción de la temperatura ficticia  $T_{n+1}$ , por el momento se tiene 7 variables y para la solución del sistema se necesita una ecuación adicional que se describe a continuación:

Para la consistencia de las ecuaciones en cuanto al error de la ecuación 10 se realiza la diferencia central de las ecuaciones 4 y 5:

$$T_{k+1} - T_{k-1} = 2h T'(x_k) + \frac{h^3}{3} T'''(x_k)$$

$$T'(x_k) = \frac{T_{k+1} - T_{k-1}}{2h} + O(h^2)$$

$$T'(x_k) = \frac{T_{k+1} - T_{k-1}}{2h} \quad (36)$$

La ecuación 36 indica la aproximación de la primera derivada de  $T$ , siendo:  $T'(x_k) = \frac{\partial T}{\partial x}$

Ahora reemplazando (36) en (29) se tiene:

$$\frac{T_{k+1} - T_{k-1}}{2h} = -\frac{q_s}{k_c}$$

$$T_{k-1} - T_{k+1} = \frac{2h q_s}{k_c}$$

Adoptando  $S_1 = \frac{2h q_s}{k_c}$  (37)

Entonces:

$$T_{k-1} - T_{k+1} = S_1 \quad (38)$$

Para  $k = n$   $T_{n-1} - T_{n+1} = S_1$  (39)

Que junto con las ecuaciones 30, 31, 32, 33, 34 y 35 completan igual número de incógnitas con el número de ecuaciones que hace que el sistema sea solucionable y de igual forma se puede escribir en forma matricial (ecuación 24). Reescribiendo el sistema de ecuaciones se tiene:

$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_{n-3}$	$T_{n-2}$	$T_{n-1}$	$T_n$	$T_{n+1}$	
2	-1								= $S + T_0$
-1	2	-1				0			= $S$
	-1	2	-1						= $S$
		-1	2	-1					= $S$
			-1	2	-1				= $S$
				-1	2	-1			= $S$
		0			-1	2	-1	0	= $S$

$$\begin{array}{rcl} -1 & 2 & -1 & = & S \\ 1 & 0 & -1 & = & S1 \end{array}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & & 0 \\ & -1 & 2 & -1 & & & & & & \\ & & -1 & 2 & & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & 0 & & & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & & 1 & 0 & -1 & & & \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} S + T_0 \\ S \\ S \\ \vdots \\ S_1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{n-1} \\ T_n \\ T_{n+1} \end{bmatrix} \quad (41)$$

La matriz  $\bar{T}$  se resuelve por la ecuación (24).

#### 2.1.4.1. Programación en Matlab

```
%Código Matlab
%Resolución de valores de contorno para la ecuación de Calor: Método de
%Diferencias Finitas para condición de contorno Neumann qs = flujo de calor
%constante en Xo y Xf
clear all
clc
n=input('Ingrese puntos de discretización: n=');
Ts=input('Ingrese Temperatura superficial inicial To en °C, Ts=To =');
To=Ts;
qs=input('Ingrese flujo de calor constante qs en W/m^2, qs=');
qg=input('Ingrese generación de calor en W/m^3: qg =');
Xo=0;
Xf=input('Ingrese Longitud total en metros: L=Xf =');
L=Xf;
h=(Xf-Xo)/(n-1);%intervalo
kc=input('Ingrese conductividad material en W/(m K): kc =');
A=toeplitz([2,-1,zeros(1,n-2)]);A(n,n)=-1;A(n,n-1)=0;A(n,n-2)=1;%Matriz Tridiagonal
S=h^2*qg/kc;S1=2*qs*h/kc;%Constantes para la matriz B
B=zeros(n,1);B(:,1)=S;B(1,1)=S+To;B(n,1)=S1;% Matriz B
Tx1=inv(A)*B; %Cálculo de la temperatura a n puntos x
x=Xo:h:L;%vector x para el plot
Tx=Tx1(1:n-1,1);%Vector que extrae las respuestas de Tx1 de la columna 1 desde la fila 1 hasta la fila
n-1
%ya que el último valor n de Tx1 corresponde a un valor ficticio de temperatura y está
%fuera del intervalo Xo,Xf
T=[To;Tx];%vector y para el plot
plot(x,T)
```

#### 2.1.4.2. Ejemplo de Aplicación:

Como ejemplo se dio para una barra de sección transversal constante de 1 m de longitud y conductividad 20 W/m K, la cual se mantiene a 30 °C en  $x=0$  y con generación interna de calor de 200 W/m<sup>3</sup>. Calcular la distribución de temperatura a lo largo de la barra cuando en  $x = L$  existe flujo de calor constante,  $q_s = 10$  W/m<sup>2</sup>.

Se discretiza la longitud de 1m en  $n=10$  puntos, el programa calculará 10 temperaturas, sin embargo el último valor corresponderá a  $T_{n+1}$ , valor que no se lo tomará en cuenta al momento de graficar  $T = f(x)$

Ejecutando el programa código matlab de la sección 1.2.4.1., primero se pedirá el ingreso de datos:

Ingreso de datos

```
Ingreso puntos de discretización: n=10
Ingreso Temperatura superficial inicial To en °C, Ts=To =30
Ingreso flujo de calor constante qs en W/m^2, qs=10
Ingreso generación de calor en W/m^3: qg =200
Ingreso Longitud total en metros: L=Xf =1
Ingreso conductividad material en W/(m K): kc =20
```

Como resultados se obtienen:

La matriz  $\bar{A}$

```
disp(A)
 2   -1   0   0   0   0   0   0   0   0
-1    2  -1   0   0   0   0   0   0   0
 0   -1   2  -1   0   0   0   0   0   0
 0    0  -1   2  -1   0   0   0   0   0
 0    0   0  -1   2  -1   0   0   0   0
 0    0   0   0  -1   2  -1   0   0   0
 0    0   0   0   0  -1   2  -1   0   0
 0    0   0   0   0   0  -1   2  -1   0
 0    0   0   0   0   0   0  -1   2  -1
 0    0   0   0   0   0   0   0   1  -1
```

La matriz  $\bar{B}$

```
disp(B)
30.1235
 0.1235
 0.1235
 0.1235
 0.1235
 0.1235
 0.1235
 0.1235
 0.1235
 0.1111
```

La matriz  $\bar{T}$

```
30.9938
31.8642
32.6111
33.2346
33.7346
34.1111
34.3642
34.4938
34.5000
34.3827
```

El último resultado de la matriz  $\bar{T}$  corresponde al punto ficticio  $n+1$  de la matriz  $\bar{B}$  (en  $x = 0.1111$ ), sin embargo para el plot no se incluye este dato (Fig. 5)